Matice

Definice. *Maticí typu* $m \times n$ nazýváme obdélníkové pole, tvořené z $m \cdot n$ reálných čísel (tzv. *prvků* matice), zapsaných v m řádcích a n sloupcích.

Značíme např. $A = (a_{ij})$, kde $i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, n$

Příklad

Předpokládejme, že $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$:

Hlavní diagonála je tvořena prvky $a_{11}, a_{22}, \dots$.

Matice A se nazývá *horní trojúhelníkovou maticí*, jestliže všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule.

Matice A se nazývá *nulovou maticí*, jsou-li všechny její prvky rovny nule.

Maticí *transponovanou k matici A* nazýváme matici $A^T = (a_{ji})$.

Transponovanou matici A^T získáme "překlopením"matice A kolem hlavní diagonály. Z řádků matice A se stanou sloupce matice A^T.

Příklad.

Matici typu $n \times n$ nazýváme *čtvercovou maticí*.

Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme *jednotkovou maticí.* Tuto matici označujeme E.

Operace s maticemi

Sčítání matic. *Součtem* matic $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ stejného typu $m \times n$ nazýváme matici $C = A+B$, pro jejíž prvky platí $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$ $(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n)$.

Násobení matice reálným číslem

Součinem reálného čísla λ a matice A (nebo také *λ–násobkem matice A*) nazýváme matici $C = \lambda \cdot A$, kde $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ $(i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m)$.

Příklad:

Poznámka. Množina všech matice stejného typu $m \times n$ s těmito dvěma operacemi tvoří vektorový prostor dimenze $m \cdot n$. Navrhněte bázi tohoto prostoru.

Poznámka. Matice stejného typu lze také odčítat: *Rozdílem matic A a B* nazýváme matici $C = A + (-1) \cdot B$. Píšeme $C = A - B$.

Pro definici násobení matic se hodí následující pojem:

Skalárním součinem vektorů $\overrightarrow{u} = (u_1, \dots, u_n)$ a $\overrightarrow{v} = (v_1, \dots, v_n)$ z $\mathbb{R}^n$ nazýváme číslo $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$.

Násobení matic.
Předpoklad: $A = (a_{ij})$ je typu $m \times n$, $B = (b_{ij})$ je typu $n \times p$.
Součinem matic A a B pak nazýváme matici $C = A \cdot B$ typu $m \times p$,
jejíž prvek c_{ij} je skalárním součinem i–tého řádku z A a j–tého sloupce z B,
$(i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, p)$.

Poznámka. Je tedy $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$.

Pravidla pro operace s maticemi.
Předpokládejme, že α, β jsou reálná čísla a A, B a C jsou matice takové, že níže uvedené operace mají smysl. Pak plati:

a) $A + B = B + A$,

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

c) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$,

d) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$,

e) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

f) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,

g) $A \cdot E = A$,

h) $E \cdot B = B$,

i) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

j) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Násobení matic není komutativní, tj. obecně neplatí, že $A \cdot B = B \cdot A$!

Příklady.

Hodnost matice

Definice. *Hodností* matice A nazýváme maximální počet lin. nezávislých řádků matice A (jako aritmetických vektorů). Značíme ji $h(A)$.

Poznámka. $h(A)$ lze definovat i jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců.

Jednduché příklady:

Postup při určení hodnosti dané matice:

Je-li $\boldsymbol{m = 2}$ nebo $\boldsymbol{n = 2}$, pak lze určit hodnost přímo podle definice.

Je-li $\boldsymbol{m > 2}$ a $\boldsymbol{n > 2}$, pak danou matici převedeme na horní trojúhelníkovou.

Věta 2.17.
Nechť A je horní trojúhelníková matice typu $m \times n$, která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak $h(A) = \min\{m; n\}$, tj. počet nenulových řádků.

Příklad

Pro převod dané matice na horní trojúhelníkovou používáme tzv. ekvivalentní úpravy, které nemění hodnost matice.

Ekvivalentní úpravy matice, které budeme používat

a) změna pořadí řádků,

b) vynásobení některého řádku nenulovým číslem,

c) přičtení násobku některého řádku k jinému řádku

d) vynechání nulového řádku; vynechání řádku, který je násobkem jiného.

Úpravy z bodů a) – d) lze provádět i se sloupci matice, hodnost se rovněž nemění.

K vytvoření nulového prvku v požadovaném místě užíváme zpravidla úpravu č. 3.

Postup převedení libovolné matice pomocí ekvivalentních úprav na horní trojúhelníkovou matici, se nazývá **Gaussův algoritmus.**

Gaussův algoritmus:

1. krok:
Je-li $a_{11} \neq 0$, pak první řádek opíšeme !
Pomocí prvku a_{11} vytvoříme nuly v prvním sloupci pod ním.

Je-li $a_{11} = 0$, zaměníme řádky nebo sloupce.
Pokud lze, zaměníme tak, aby $a_{11} = 1$ nebo $a_{11} = -1$.

2. krok:
Je-li prvek $a'_{22} \neq 0$ (v nové matici),
vytvoříme pomocí něho nuly ve druhém sloupci pod ním (druhý řádek opíšeme)

Postup opakujeme, až získáme horní trojúhelníkovou matici.

Příklad:

Další příklady jsou uvedeny **v textu Hodnost matice** na webu
”Kombinované studium”