MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

I. Základy lineární algebry

Matematika I.

Informace Ústavu technické matematiky (ÚTM FSI ČVUT):

http://mat.fs.cvut.cz

Informace o předmětu Matematika I:

http://mat.nipax.cz

Garant předmětu: prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.
gejza.dohnal@fs.cvut.cz
(kontakt pro zasílání dotazů, námětů, připomínek ...)

Matematika I.

Základní doporučená literatura:

[1] **J.Neustupa: Matematika I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (a starší vydání: 2008...).

[2] **S. Kračmar, F. Mráz,J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013 (i starší, ale s jiným číslováním příkladů). Skripta obsahují vybrané úlohy ze zkoušek z minulých let.

Další doporučená literatura

[5] **E.Brožíková, M.Kittlerová: Diferenciální počet funkcí jedné proměnné**. Řešené příklady. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2004.

[6] **MATEMATIKA I - ukázka zkouškových testů.** Webové stránky ÚTM, odkaz Matematika I, též tištěné ve firmě Copia v budově na Karlově nám.

[7] **J.Neustupa: Mathematics I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2004. (Anglická verze skripta [1].)

Matematika I.

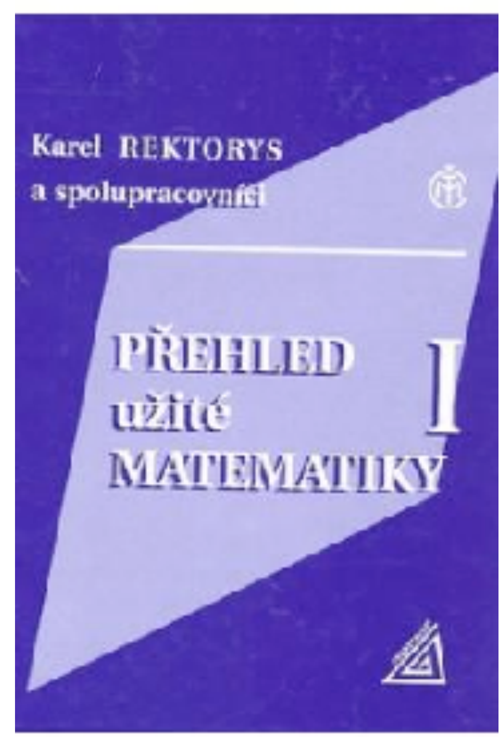
Literatura k doplnění znalostí a počítání příkladů ze středoškolské matematiky:

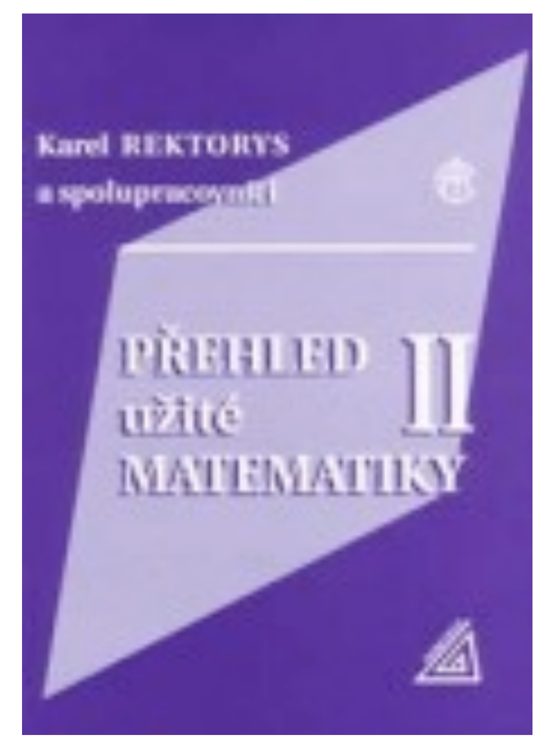
[8] **F. Mráz: Opakování středoškolské matematiky** (vybrané partie).
Webové stránky ÚTM pod pod odkazem Matematika I.

[9] **J. Černý a kolektiv: Matematika - přijímací zkoušky na ČVUT**.
Nakladatelství ČVUT Praha, 2007 (stručný přehled a příklady ze středoškolské matematiky, částečně i řešené).

Literatura pro ty, kteří to se studiem techniky myslí vážně:

[10] **K. Rektorys a spol.: Přehled užité matematiky I, II**. Nakladatelství Prometheus, 7. vydání 2000. (Encyklopedie aplikované matematiky)





Matematika I.

I. Lineární algebra

Vektorové prostory, matice, soustavy lineárních algebraických rovnic, vlastní čísla a vlastní vektory
(1.-3. týden)

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Matematika I.

I. Lineární algebra

- I.1. Reálný aritmetický vektorový prostor
- I.2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů
- I.3. Vektorový prostor, obecná definice
- I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru, podprostor
- I.5. Matice
- I.6. Hodnost matice
- I.7. Determinant matice
- I.8. Inverzní matice
- I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic
- I.10. Frobeniova věta
- I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic
- I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Matematika I.

těleso reálných čísel

0. Reálná předmluva

Vlastnosti reálných čísel: $(\boldsymbol{R}, +, .\,, 0, 1)$

- pro všechna $a,b,c \in \boldsymbol{R}$ je $a+b=b+a \in \boldsymbol{R}$ (sčítání je komutativní)
  $u+(v+w)=(u+v)+w$ (sčítání je asociativní)
- existuje nulový prvek $0 \in \boldsymbol{R}$ tak, že pro všechna $a \in \boldsymbol{R}$ je $0+a \in \boldsymbol{R}$
- pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ existuje opačný prvek vzhledem ke sčítání $y \in \boldsymbol{R}$ tak, že $x+y=0$
- pro libovolné $a,b,c \in$ R je $a.b=b.a \in \boldsymbol{R}$ (násobení je komutativní)
  $a.(b.c)=(a.b).c$ (násobení je asociativní)
- násobení a sčítání jsou distributivní: $\forall a,b,c \in \boldsymbol{R}$: $a(b+c)=a.b+a.c$
- existuje jednotkový prvek $1 \in \boldsymbol{R}$ tak, že pro všechna $a \in \boldsymbol{R}$ je $1.a \in \boldsymbol{R}$
- pro každé reálné x, $x \neq 0$ existuje v $\boldsymbol{R}$ opačný prvek vzhledem k násobení $y \in \boldsymbol{R}$ tak, že $x.y=1$

Matematika I.

I. Lineární algebra

I.1. Vektorový prostor

Definice: Je-li $\boldsymbol{R}$ množina reálných čísel a n je nějaké přirozené číslo, potom uspořádanou n-tici reálných čísel $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, \dots a_n)$ budeme nazývat (*reálným) aritmetickým vektorem*. Číslo a_i nazýváme i-tou *složkou* vektoru $\boldsymbol{a}$. Číslo n je *rozměr* vektoru $\boldsymbol{a}$.

Sčítání aritmetických vektorů:

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_1, a_2, \dots a_n) + (b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots a_n+b_n)$$

Násobení vektoru reálným číslem $r \in \mathbf{R}$:

$$r.\boldsymbol{a} = r.(a_1, a_2, \dots a_n) = (r.a_1, r.a_2, \dots r.a_n)$$

I.1. Vektorový prostor: Reálný aritmetický vektorový prostor

Reálné aritmetické vektory o rozměru *n* tvoří *reálný aritmetický vektorový prostor*, který budeme označovat $V(\boldsymbol{R}^n)$ nebo zkráceně pouze $\boldsymbol{R}^n$.

Vlastnosti:

- pro všechna $\mathbf{a}\in\boldsymbol{R}^n$, $\mathbf{b}\in\boldsymbol{R}^n$ je $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in\boldsymbol{R}^n$
- existuje nulový prvek $\mathbf{0}\in\boldsymbol{R}^n$ tak, že pro všechna $\mathbf{a}\in\boldsymbol{R}^n$ je $\mathbf{0}+\mathbf{a}\in\boldsymbol{R}^n$
- pro každé $\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n$ existuje opačný prvek $\mathbf{y}\in\boldsymbol{R}^n$ tak, že $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$
- sčítání je asociativní: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
- sčítání je komutativní: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
- pro libovolné $\mathbf{a}\in\boldsymbol{R}^n$, $r\in R$ je $r.\mathbf{a}\in\boldsymbol{R}^n$
- násobení číslem je asociativní: $\forall a,b\in R$, $\mathbf{x}\in\boldsymbol{R}^n$: $a(b.\mathbf{x})=(ab).\mathbf{x}$
- násobení číslem je distributivní:

$$\forall a\in R,\ \mathbf{u},\mathbf{v}\in\boldsymbol{R}^n:\ a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a.\mathbf{u}+a.\mathbf{v}$$

$$\forall a,b\in R,\ \mathbf{v}\in\boldsymbol{R}^n:\ (a+b).\mathbf{v}=a.\mathbf{v}+b.\mathbf{v}$$

I. 2. Lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů

Je-li $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru **V** a $r_1, r_2, \dots, r_k$ jsou reálná čísla, potom vektor $\boldsymbol{v}$, který vznikne součtem

$$\boldsymbol{v} = r_1.\boldsymbol{a}_1 + r_2.\boldsymbol{a}_2 + \dots r_k.\boldsymbol{a}_k ,$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$.

Definice: Množina vektorů $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$ z vektorového prostoru **V** je *lineárně závislá* právě tehdy, když existuje k-tice čísel $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ z nichž alespoň jedno je nenulové taková, že

$$r_1.\boldsymbol{a}_1 + r_2.\boldsymbol{a}_2 + \dots r_k.\boldsymbol{a}_k = \mathbf{0}$$

Poslední rovnice napsaná po složkách má tvar soustavy lineárních algebraických rovnic

$$r_1.a_{11} + r_2.a_{21} + \dots r_k.a_{k1} = 0$$
$$r_1.a_{12} + r_2.a_{22} + \dots r_k.a_{k2} = 0$$
$$\dots\dots$$
$$r_1.a_{1n} + r_2.a_{2n} + \dots r_k.a_{kn} = 0$$

Lineární nezávislost (LNZ) znamená, že tato soustava má jediné, pouze nulové řešení.

I.5. Matice

$$A = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n\,=\,\text{počet sloupců, sloupcové vektory}}\right\} m = \text{počet řádků, (řádkové vektory)}$$

- A je matice typu $m{\times}n$
- je-li m=n matice se nazývá *čtvercová* ; jinak je *obdélníková*
- prvky $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ tvoří *hlavní diagonálu* matice A

příklady matic:

$$B = \begin{pmatrix} 8, & -1, & 5, & 15, & -7, & 2 \\ 0, & 3, & -11, & 5, & -12, & 24 \\ -4, & 8, & 0, & 7, & -3, & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1, & 4, \\ 2, & 0, \\ 3, & 5, \\ -2, & 8, \\ 4, & 0, \end{pmatrix}$$

$$D = (1, 4, 2, 0, 3)$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

I.5. Matice, příklady

$$F = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ 0, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

horní trojúhelníková

$$F = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 3, & 5 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dolní trojúhelníková

$$G = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 1, & 3, & 0 \\ 0, & 5, & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{11}, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & a_{22}, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

diagonální

$$H = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 3, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{21}, & \cdots & a_{m1} \\ a_{12}, & a_{22}, & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}, & a_{2n}, & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

transponovaná
J = A^T, J = A'

$$F = G^T$$

I.5. Matice, operace

Rovnost: A = B <=> jsou stejného typu $m{\times}n$ a platí $\forall$i,j: $a_{ij}=b_{ij}$

Sčítání: C = A+B <=> A a B jsou stejného typu a platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Násobení číslem: $D = k.A$ <=> $\forall$i,j: $d_{ij} = k.a_{ij}$

Matice stejného typu $m{\times}n$ tvoří vektorový prostor. Platí totiž:

a) existuje nulová matice O: $\forall$i=1, ..., m, j=1, ..., n : $o_{ij}=0$
b) platí A + B = B + A
c) A + (B + C) = (A + B) + C
d) k matici A existuje matice B = -A tak, že A + B = A - A = O
e) pro $\alpha \in \boldsymbol{R}$ platí $\alpha.(A + B) = \alpha.A + \alpha.B$
f) pro $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$ platí $(\alpha + \beta).A = \alpha.A + \beta.A$

Navíc pro sčítání a transpozici platí
g) $(A + B)^T = A^T + B^T$

I.5. Matice, násobení matic

Násobení matic: C = A.B <=> jsou *zřetězené*, tj. počet řádků matice A je stejný, jako počet sloupců matice B (A je typu $m \times k$ a B je typu $k \times n$) a platí

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

Pro násobení matic platí následující vlastnosti (při dodržení zřetězení):

a) A.(B + C) = A.B + A.C (je distributivní)

b) (A.B).C = A.(B.C) (je asociativní)

c) násobení matic není komutativní: A.B ≠ B.A

d) $(A.B)^T = B^T.\, A^T$

e) existuje jednotková matice

$$I = \begin{pmatrix} 1, & 0, & \cdots & 0 \\ 0, & 1, & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0, & 0, & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

tak, že platí: I.A = A.I = A

I.5. Matice, soustavy algebraických rovnic

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ x - 2y + 3z &= 1 \\ x + y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 1, & -2, & 3 \\ 1, & 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}.\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ 4y + 2z &= 3 \end{aligned} \quad \text{-4x}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 4, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_1.\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$\begin{aligned} -x + 3y + 2z &= 0 \\ y + 5z &= 1 \\ -18z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 5 \\ 0, & 0, & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_2.\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

$$z = \frac{1}{18} \qquad y = 1 - 5z = \frac{13}{18} \qquad x = 3y + 2z = \frac{41}{18}$$

I.5. Matice, ekvivalentní úpravy

Ekvivalentní úpravy matice (nemění řešení odpovídající soustavy rovnic):

a) změna pořadí řádků
b) vynásobení řádku nenulovým číslem
c) přičtení k libovolnému řádku lineární kombinace ostatních řádků
d) vynechání nulového řádku

I.6. Hodnost matice

Definice: *Hodnost matice* A je číslo h(A), rovné maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců nebo řádků matice.

- Je-li A horní trojúhelníková matice typu $m \times n$ jejíž diagonální prvky jsou všechny nenulové, potom $h(A) = \min\{m,n\}$.
- Ekvivalentní úpravy (na řádcích i na sloupcích) nemění hodnost matice

Hodnost matice určíme tak, že ji postupně převedeme ekvivalentními úpravami na trojúhelníkový tvar a spočteme počet nenulových řádků.

I.3. Vektorový prostor: Obecnější definice

Definice: Množinu V budeme nazývat *vektorovým prostorem*, pokud jsou pro její prvky (*vektory*) definovány operace

- sčítání, pro kterou platí
  - pro všechna $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ je $\mathbf{v}+\mathbf{w}\in\mathbf{V}$
  - existuje nulový prvek $\mathbf{0}\in\mathbf{V}$: pro všechna $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ je $\mathbf{0}+\mathbf{v}\in\mathbf{V}$
  - pro každé $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ existuje opačný prvek $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ tak, že $\mathbf{w}+\mathbf{v}=\mathbf{0}$
  - sčítání je asociativní: $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$
  - sčítání je komutativní: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$
- násobení reálným číslem (skalárem), pro které platí
  - pro libovolné $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$, $a\in\mathbf{R}$ existuje prvek $a.\mathbf{v}\in\mathbf{V}$
  - pro libovolné $\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ a jednotkový prvek $1\in\mathbf{R}$ platí $1.\mathbf{v}\in\mathbf{V}$
  - asociativní zákon: pro všechna $a,b\in\mathbf{R}$, $\mathbf{w}\in\mathbf{V}$ je $a(b.\mathbf{w})=(ab).\mathbf{w}$
  - distributivní zákon: pro všechna $a,b\in\mathbf{R}$, $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V}$ platí
    $a(\mathbf{u}+\mathbf{v})=a.\mathbf{u}+a.\mathbf{v}$ a také $(a+b).\mathbf{v}=a.\mathbf{v}+b.\mathbf{v}$

I.3. Vektorový prostor: Poznámky:

- Obecná definice definuje vektorový prostor **V(U)** s nosičem **U** nad tělesem **F** (**F** je zpravidla těleso reálných či komplexních čísel)
  - pokud je **F** množina reálných čísel **R**, hovoříme o reálném vektorovém prostoru,
  - je-li **F** tělesem komplexních čísel, potom mluvíme o komplexním vektorovém prostoru.
- Nosič prostoru $\boldsymbol{R}^n$ je vlastně kartézským součinem $\boldsymbol{R}\text{x}\boldsymbol{R}\text{x}...\boldsymbol{R}$
- Nulový vektor je určen jednoznačně (je ve **V(U)** jediný)
- Opačný vektor k vektoru **x** značíme -**x** a je také určen jednoznačně.
- Pro každý vektor **x** platí: $-(-\mathbf{x})=\mathbf{x}$; $-\mathbf{x}=(-1).\mathbf{x}$
- Pro každý vektor **x** je $0.\mathbf{x}=\mathbf{0}$; podobně pro každý skalár r je $r.0=\mathbf{0}$
- Z rovnice $r.\mathbf{x}=0$ vyplývá, že buď $r=0$ nebo $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

I.3. Vektorový prostor: Příklady:

- Vektorový prostor může být tvořen pouze jediným prvkem: **0** (je to tzv. nulový (triviální) vektorový prostor)
- Množina všech reálných čísel **R**
- Množina všech komplexních čísel **C**
- Množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel $\boldsymbol{R}^{n}$
- Množina všech uspořádaných n-tic komplexních čísel $\boldsymbol{C}^{n}$
- Množina všech reálných mnohočlenů (polynomů)
- Množina všech mnohočlenů stupně nejvýše p
- Množina všech matic typu mxn
- Množina všech reálných funkcí definovaných na intervalu $\langle a,b \rangle$
- Množina všech spojitých funkcí definovaných na intervalu $\langle a,b \rangle$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

n- rozměrný Eukleidovský vektorový prostor **V(*E*** $\mathbf{V}(\boldsymbol{E_n})$ je vektorový prostor, jehož nosičem je $\boldsymbol{R}^n$, na němž jsou definovány obvyklé operace sčítání a násobení skalárem a navíc je definována tzv. Eukleidovská vzdálenost d($\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$) dvou vektorů $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$, definovaná takto:

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

- Vektorový prostor $\mathbf{V}(\boldsymbol{E_n})$ se často označuje pouze zkráceně symbolem $\boldsymbol{E_n}$
- Prostor $\boldsymbol{E_n}$ pro n=1, 2, 3 také někdy nazýváme geometrickým prostorem
- Eukleidovská vzdálenost vektorů definuje tzv. Eukleidovskou normu vektoru $\boldsymbol{x}$, což je jeho vzdálenost od nulového vektoru **0**. Tuto normu značíme $||\boldsymbol{x}||$ a je

$$||\boldsymbol{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

I.3. Vektorový prostor: Eukleidovský prostor:

skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ *v* $\boldsymbol{E_n}$ je číslo (skalár)

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

- V $\boldsymbol{E_3}$ spro skalární součin platí rovnost

$$\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = ||\boldsymbol{x}||.||\boldsymbol{y}||.\cos(\varphi)$$

kde φ je úhel, který svírají geometrické vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$.

- Odtud lze spočítat úhel φ jako

$$\cos(\varphi) = \frac{|\boldsymbol{x}.\boldsymbol{y}|}{||\boldsymbol{x}||.||\boldsymbol{y}||}$$

- Nulovost skalárního součinu je kritériem "kolmosti":

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \iff \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = 0$$

I.4. Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice: *Báze* vektorového prostoru **V** je největší množina lineárně nezávislých vektorů tohoto prostoru. Počet vektorů báze nazýváme *dimenzí* vektorového prostoru **V**.

Věta: Je-li $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ báze vektorového prostoru **V** dimenze n, potom pro každý vektor $\boldsymbol{u}$, který je z prostoru **V** a není prvkem báze platí, že jej lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze a to právě jediným způsobem (tedy *jednoznačně*).

Koeficienty ve vyjádření vektoru $\boldsymbol{u}$ pomocí báze $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$. nazýváme *souřadnicemi* vektoru $\boldsymbol{u}$ vzhledem k bázi $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$.

Báze vektorového prostoru V dimenze n není určena jednoznačně!
To znamená, že v každém vektorovém prostoru kromě triviálního můžeme nalézt nekonečně mnoho různých bází. Všechny však mají stejný počet členů rovný dimenzi tohoto prostoru n.

I.4. Podprostor

Definice: Je-li **V** vektorový prostor a **U** je jeho podmnožina pro kterou platí

- pro libovolná $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \boldsymbol{U}$ je $\mathbf{a}+\mathbf{b} \in \boldsymbol{U}$
- pro libovolné $\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$ a $r \in \mathbf{R}$ je $r.\mathbf{a} \in \boldsymbol{U}$

potom **U** nazýváme podprostorem vektorového prostoru **V**.

Věta: Je-li $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ skupina vektorů z vektorového prostoru **V** dimenze n a je $k < n$, potom všechny lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ tvoří podprodstor dimenze k prostoru **V** (tzv. *lineární obal*).

Příklady:

1) $\boldsymbol{P}=\{\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{u} = (x,2y),\ x\in\boldsymbol{R}\}$

2) $\boldsymbol{Q}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3 : \boldsymbol{v}=(x,y,0),\ x,y\in\boldsymbol{R}\}$

3) $\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3 : \boldsymbol{v}=(x,y,1),\ x,y\in\boldsymbol{R}\}$

4) $\boldsymbol{Q}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3 : \boldsymbol{v}=(x,2x,3x),\ x\in\boldsymbol{R}\}$

5) $\boldsymbol{Z}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3 : \boldsymbol{v}=(x,y,2x-3y),\ x,y\in\boldsymbol{R}\}$

6) $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^3 : \boldsymbol{v} = (x,y,2x+3y-1),\ x,y\in\boldsymbol{R}\}$

I.7. Determinant matice

Uvažujme čtvercovou matici A typu *nxn*. *Determinantem* matice A nazveme číslo *det* A (někdy též označovaný symbolem |A|), které dostaneme výpočtem podle následujících pravidel:

a) je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1x1, potom je $\det A = a$

b) je-li $n > 1$, vybereme libovolný řádek (například i-tý) a položíme

$$\det A = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \ldots + a_{in}.A_{in} \,,$$

kde A_{ij} je tzv. *algebraický doplněk* prvku a_{ij} v matici A:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}^*$$

kde A_{ij}^* je determinant části matice A, která vznikne vyškrtnutím i-tého řádku a j-tého sloupce

- bod b) popisuje tzv. *rozvoj determinantu* podle i-tého řádku
- prodbně lze počítat determinant rozvojem podle j-tého sloupce:

$$\det A = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj}$$

I.7. Determinant matice

Definice: Je-li matice A čtvercová typu *nxn*, potom *determinant matice A* je definován vztahem

$\ldots a_{n,j_n}$

Sarussovo pravidlo:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \end{matrix}$$

kde součin j… $, n\}$ a $\pi(j_1,\ldots,j_n)$ je

tzv. znamén…

Výpočet det…

a) $n = 1$:

b) $n = 2$:

b) $n = 3$: $\det \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{13}.a_{21}.a_{32} + a_{12}.a_{23}.a_{31}$

$$-a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32}$$

c) $n > 3$: rozvojem podle nějakého řádku nebo sloupce

I.7. Determinant matice, vlastnosti

a) $\mathit{det}\ A = \mathit{det}\ A^T$

b) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je

$$\mathit{det}(A.B) = \mathit{det}\ A\ .\ \mathit{det}\ B$$

c) Obsahuje-li matice A nulový řádek nebo sloupec, je det A = 0

d) Vyměníme-li v matici A dva sousední řádky nebo sloupce, celý determinant změní znaménko

e) vynásobíme-li některý řádek (sloupec) matice A číslem λ, je determinant nové matice roven λ.det A

f) Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců)

Z vlastností c), f) vyplývají přímo dvě následující vlastnosti:

a) Je-li některý řádek (sloupec) v matici A násobkem jiného řádku (sloupce), je *det* A = 0

b) Je-li v matici A některý řádek (sloupec) lineární kombinací ostatních řádků (sloupců), je *det* A = 0

I.8. Inverzní matice

Čtvercovou matici nxn s hodností n nazýváme *regulární*.
Je-li její hodnost menší než n, potom říkáme, že je *singulární*..

Definice: Je-li matice A regulární, potom k ní existuje matice A^{-1} taková, že

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I,$$

kde I je jednotková matice stejného rozměru jako A. Matici A^{-1} nazýváme inverzní maticí k matici A.

- Matice A je regulární právě když $\det A \neq 0$.
- Pro inverzní matice platí
  - $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

I.8. Inverzní matice, výpočet

Výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}, & A_{12}, & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

A_{ij} jsou algebraické doplňky prvků a_{ij} v matici A.

Výpočet inverzní matice pomocí ekvivalentních úprav:

$$(A \,|\, I) \sim \cdots \sim \left(I \,|\, A^{-1}\right)$$

Úpravy se mohou provádět pouze na řádcích celé rozšířené matice.

I.9. Soustava lineárních algebraických rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ \ a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ \ a_{2n}x_n &= b_n \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Zápis soustavy v maticovém tvaru:

matice soustavy

vektor neznámých

$$
\begin{pmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\
a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m
\end{pmatrix}
$$

vektor pravých stran

A.**x** = **b**

rozšířená matice soustavy

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

(A|**b**)

n = počet neznámých
m = počet rovnic
(obecně nemusí být n = m)

I.10. Frobeniova věta

Soustava *m* lineárních algebraických rovnic o *n* neznámých má řešení právě tehdy, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti matice soustavy rozšířené o vektor pravých stran.

Soustava má řešení <=> $h(A) = h(A|\mathbf{b})$

Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = n$, potom má soustava právě jedno řešení.
Je-li $h(A) = h(A|\mathbf{b}) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

- Případ kdy $h(A) = h(A|\mathbf{b}) > n$ nikdy nemůže nastat!
- Pokud je $h(A) = h(A|\mathbf{b}) = k < n$, potom množinu všech řešení lze vyjádřit pomocí n-k obecných parametrů.
- Pokud je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, je vždy $h(A) = h(A|\mathbf{0})$ a tedy taková soustava má vždy řešení (jedná se o tzv. *homogenní soustavu rovnic*)
- Je-li hodnost matice homogenní sloustavy rovna počtu neznámých n, tedy $h(A) = n$, má tato soustava pouze triviální řešení $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Je-li hodnost matice homogenní soustavy menší než n, potom množina všech jejích řešení vtoří podprostor $\boldsymbol{R}^n$ dimenze n-$h(A)$.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Gaussova eliminační metoda:

i. vezmeme rozšířenou matici soustavy a převedeme ji posloupností ekvivalentních řádkových úprav na trojúhelníkový tvar
ii. výslednou matici opět vyjádříme jako soustavu rovnic, kterou řešíme "zdola nahoru"

Gaussovu eliminační metodu lze použít na jakoukoli soustavu algebraických rovnic.

Řešení soustavy rovnic s použitím Cramerova pravidla:

i. spočteme determinant matice soustavy $d = det$ A. Pokud je různý od nuly, pokračujeme dál. V opačném případě Cramerovo pravidlo nelze použít.
ii. spočteme determinanty $d_i = det\, A_i$, $i = 1, ..., n$ kde A_i je matice, která vznikne z matice A záměnou i-tého sloupce za vektor pravých stran.
iii. potom pro řešení $(x_1, ..., x_n)$ platí, že $x_i = \dfrac{d_i}{d}$, $i = 1, ..., n$.

I.11. Metody řešení soustav lineárních algebraických rovnic

Řešení pomocí inverzní matice:

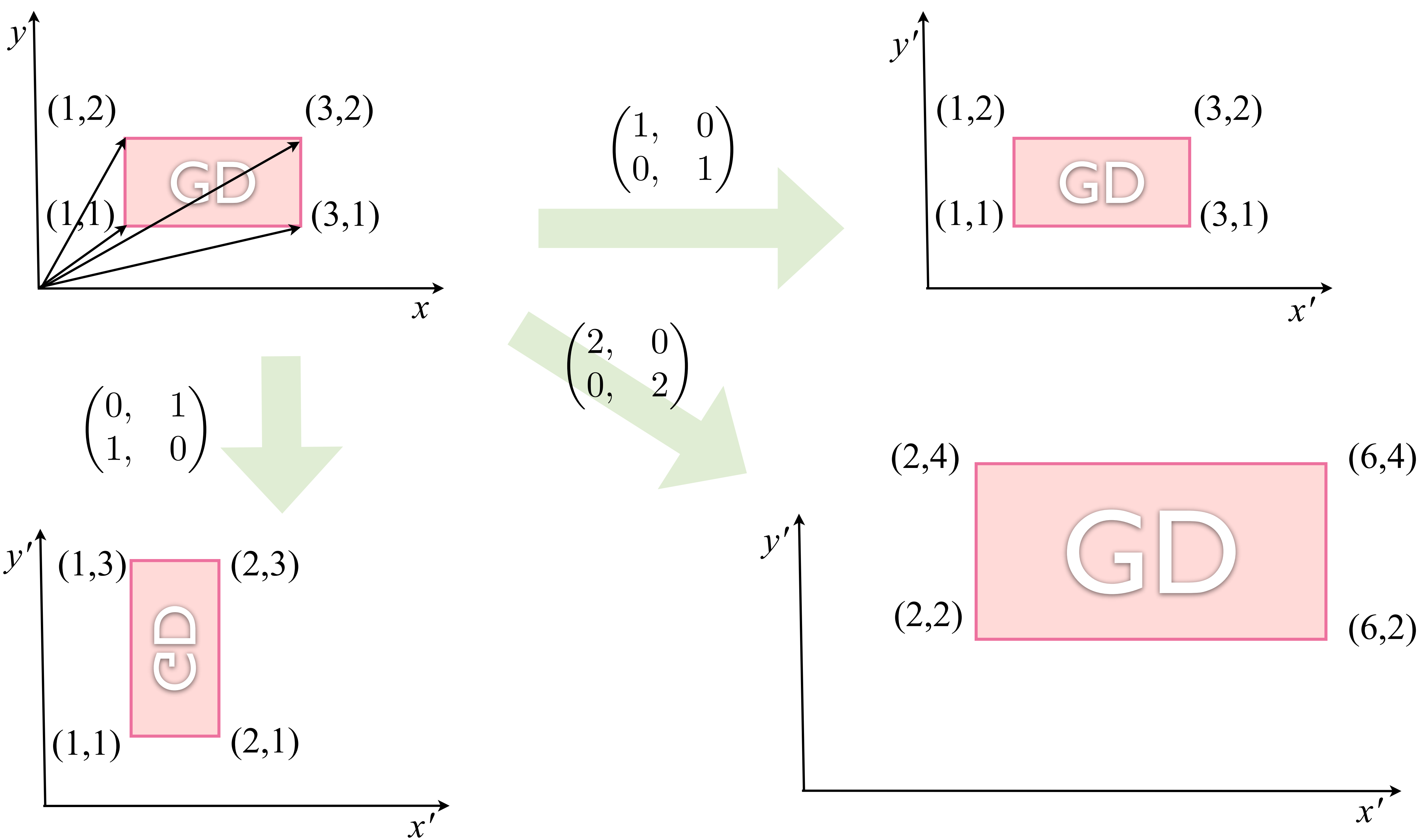
$$A.\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}.\mathbf{b}$$

Stejně jako Cramerovo pravidlo, tuto metodu lze použít pouze když
$det\, A \neq 0$

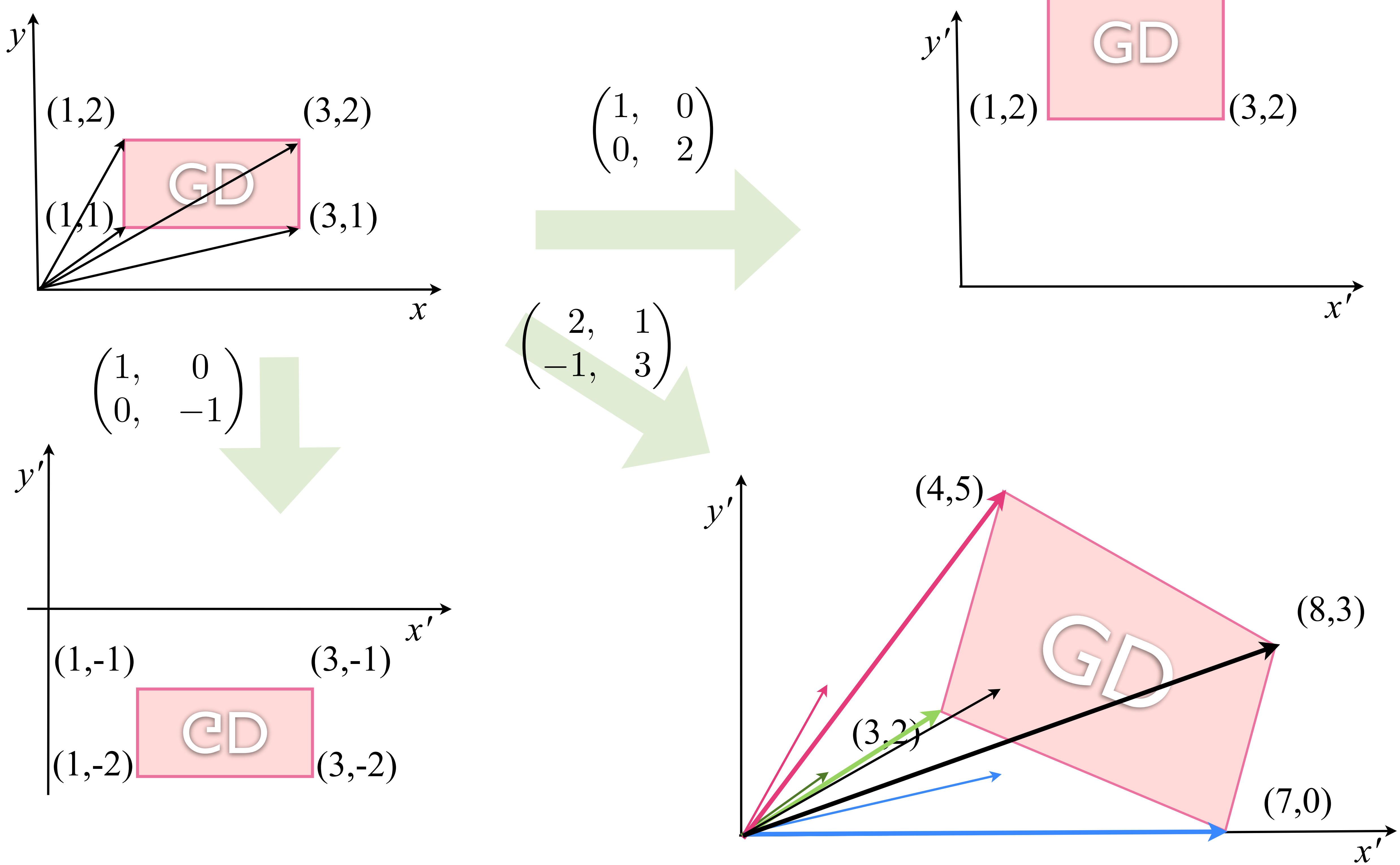
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v $\boldsymbol{E}_2$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



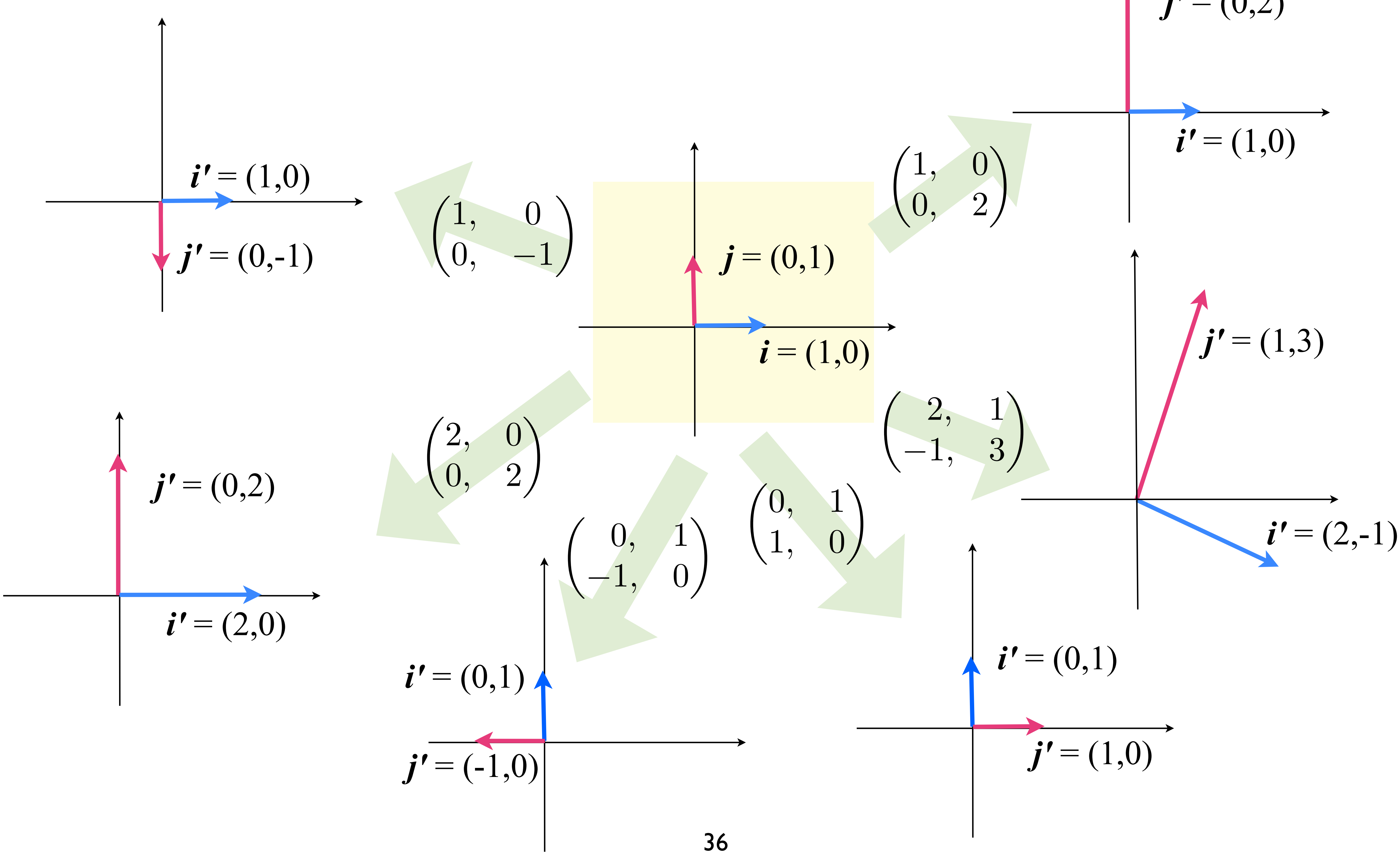
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v $\boldsymbol{E}_2$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v $\boldsymbol{E}_2$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

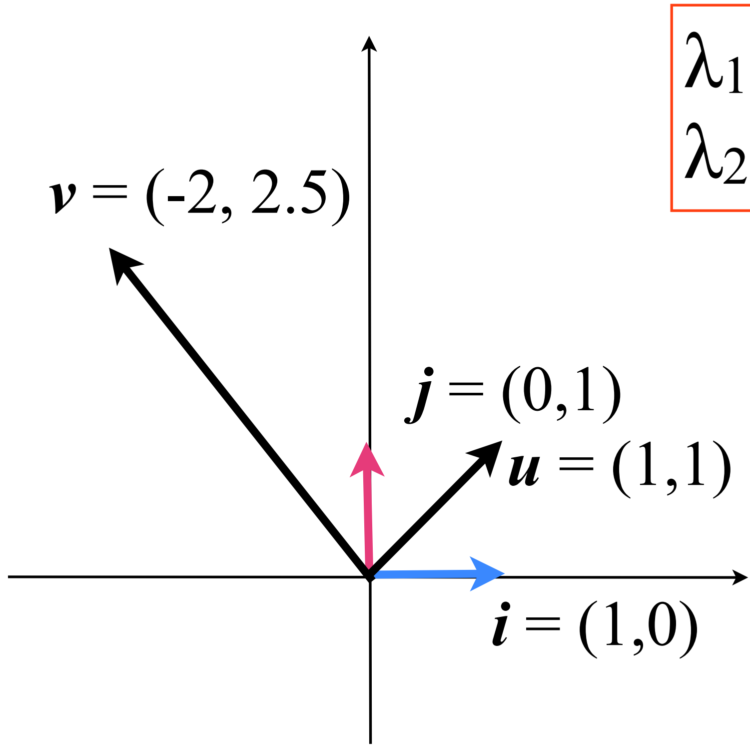
Geometrické transformace v $\boldsymbol{E}_2$: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

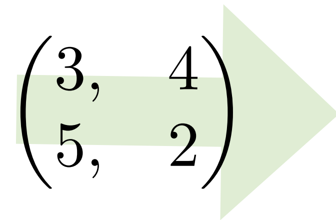
- identické zobrazení: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy x: $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- překlopení kolem osy y: $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$
- otočení o úhel ψ doleva: $A = \begin{pmatrix} cos\psi, & -sin\psi \\ sin\psi, & cos\psi \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 1. a 3. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$
- překlopení podle osy 2. a 4. kvadrantu: $A = \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}$
- změna měřítka: $A = \begin{pmatrix} a, & 0 \\ 0, & b \end{pmatrix}$
- zpětná transformace: $B = A^{-1}$

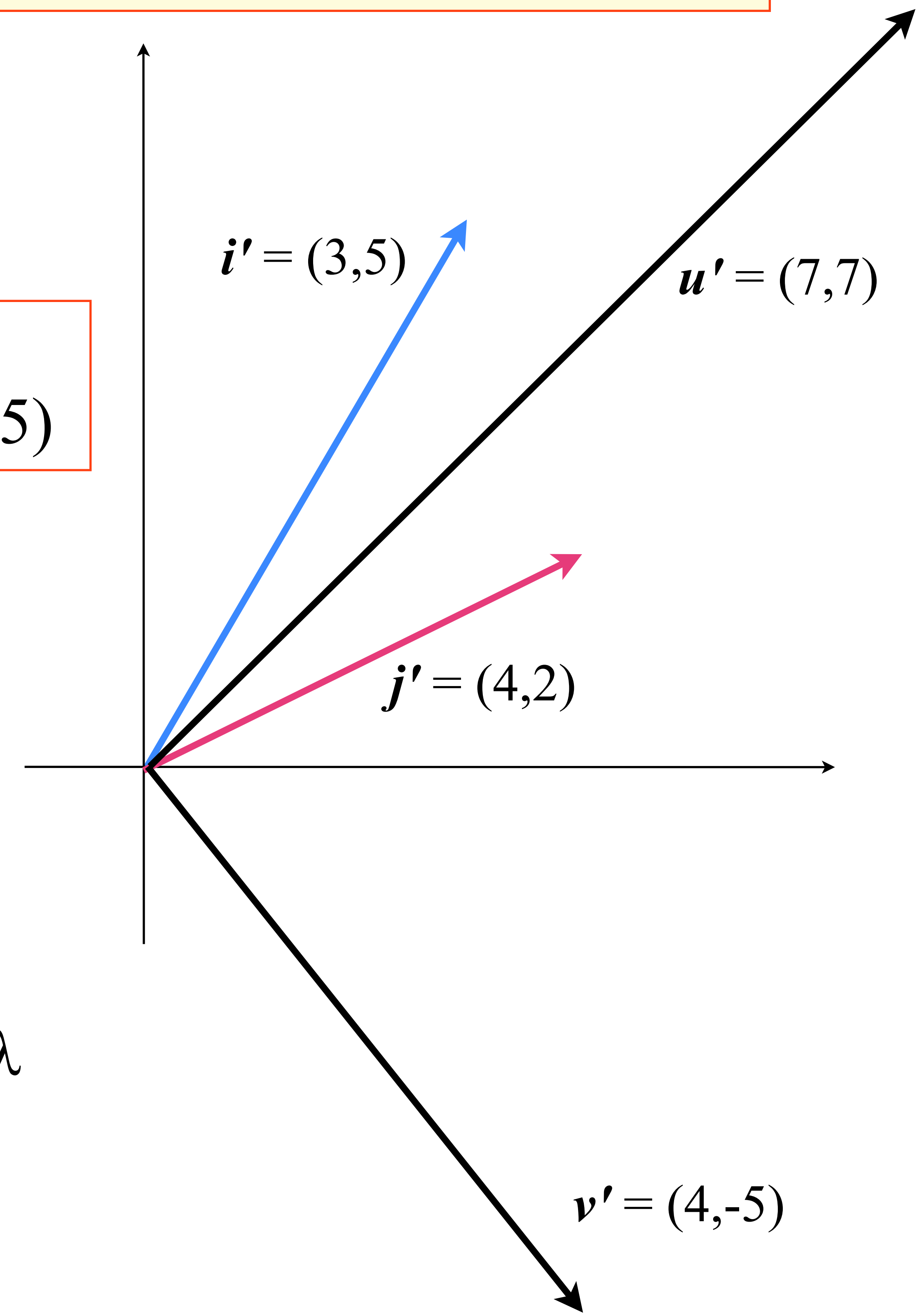
I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Geometrické transformace v $\boldsymbol{E}_2$:

$\lambda_1 = 7, \ \boldsymbol{u} = (1,1)$
$\lambda_2 = -2, \ \boldsymbol{v} = (-2, 2.5)$







Hledáme vektor $\boldsymbol{u}$, pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $\boldsymbol{u}' = \mathrm{A}.\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice: Komplexní číslo λ nazveme *vlastním číslem* čtvercové matice A, existuje-li vektor $\boldsymbol{u}$ takový, že platí $A.\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$.
Vektor $\boldsymbol{u}$ potom nazýváme *vlastním vektorem* odpovídajícím vlastnímu číslu λ.

Hledáme vektor $\boldsymbol{u}$, pro nějž existuje číslo λ tak, že platí: $A.\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$

$$(A - \lambda)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

$$det\,(A - \lambda) = 0$$ charakteristická rovnice

Je-li matice typu nxn, potom má charakteristická rovnice n kořenů $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Každému z nich odpovídají vlastní vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_n$ jako řešení soustav rovnic $(A - \lambda_i)\boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Vlastní čísla a vlastní vektory hledáme obecně jako komplexní. Pokud má matice 2x2 komplexní vlastní čísla (řešení charakteristické rovnice), potom při transformaci souřadnic v R2 neexistují vektory, které by zachovávaly směr.

I.12. Vlastní čísla a vlastní vektory matice, vlastnosti

- Vlastní vektory matice A odpovídající různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé
- Matice A má nulové vlastní číslo právě když je singulární.
- Je-li $\lambda_1=(a+\mathrm{i}b)$ komplexní vlastní číslo matice A a $\boldsymbol{u}_1$ je příslušný vlastní vektor, potom má tato matice i komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_2=(a-\mathrm{i}b)$ s vlastním vektorem $\boldsymbol{u}_2$ komplexně sdruženým k $\boldsymbol{u}_1$.
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem $\boldsymbol{u}$, potom λ^2 je vlastním číslem matice $A^2 = A.A$ se stejným vlastním vektorem $\boldsymbol{u}$.
- Je-li λ vlastním číslem matice A spolu s vlastním vektorem $\boldsymbol{u}$, potom $1/\lambda$ je vlastním číslem matice A^{-1} se stejným vlastním vektorem $\boldsymbol{u}$.
- Je-li A symetrickou čtvercovou maticí, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou v tomto případě vzájemně kolmé.