MATEMATIKA I.

prof. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

IV. Základy integrálního počtu

Matematika I.

Matematika I.

I. Lineární algebra

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

Matematika I.

I. Lineární algebra

II. Základy matematické analýzy

III. Diferenciální počet

IV. Integrální počet

Matematika I.

IV. Integrální počet

Matematika I.

IV. Integrální počet

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice: Jsou-li F a f funkce definované na intervalu I s krajními body $a, b \in \mathbf{R}^*$ a platí, že

a) $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$,

b) $F_+'(x) = f(a)$ pokud $a \in$ I,

c) $F_-'(x) = f(b)$ pokud $b \in$ I,

nazýváme funkce $F(x)$ *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na intervalu I.

Matematika I.

IV. Integrální počet

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice: Jsou-li F a f funkce definované na intervalu I s krajními body $a, b \in \mathbf{R^*}$ a platí, že

a) $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a,b)$,

b) $F_+'(x) = f(a)$ pokud $a \in$ I,

c) $F_-'(x) = f(b)$ pokud $b \in$ I,

nazýváme funkce $F(x)$ *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ na intervalu I.

Věta (o existenci primtivní funkce): Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak k funkci f existuje v intervalu I primitivní funkce.

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + C$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + \mathrm{C}$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $\mathrm{C} = G(x) - F(x)$

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + C$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I

- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $C = G(x) - F(x)$

- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkcím $f(x)$ a $g(x)$ v intervalu I, potom je součet $F(x) + G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) + g(x)$ v intervalu I

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + \mathrm{C}$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $\mathrm{C} = G(x) - F(x)$
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkcím $f(x)$ a $g(x)$ v intervalu I, potom je součet $F(x) + G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) + g(x)$ v intervalu I

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* funkce f v intervalu I.

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + C$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $C = G(x) - F(x)$
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkcím $f(x)$ a $g(x)$ v intervalu I, potom je součet $F(x) + G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) + g(x)$ v intervalu I

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* funkce f v intervalu I.

$$\int f(x)dx, \quad x \in I \qquad\qquad \int f(x)dx \qquad\qquad \int f dx$$

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

- je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I, potom i funkce $G(x) = F(x) + C$ je primitivní funkí k $f(x)$ na intervalu I
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $C = G(x) - F(x)$
- jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ primitivní funkce k funkcím $f(x)$ a $g(x)$ v intervalu I, potom je součet $F(x) + G(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x) + g(x)$ v intervalu I

Definice: Množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I nazýváme *neurčitým integrálem* funkce f v intervalu I.

$$\int f(x)dx, \quad x \in I \qquad \int f(x)dx \qquad \int f dx$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I$$

integrační konstanta

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Věta (o linearitě integrálu): Jsou-li f a g funkce integrovatelné v intervalu I a $a, b \in \mathbf{R}$ jsou libovolné reálné konstanty, potom platí

$$\int \big(a.f(x) + b.g(x)\big)dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx + C.$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Věta (o linearitě integrálu): Jsou-li f a g funkce integrovatelné v intervalu I a $a, b \in \mathbf{R}$ jsou libovolné reálné konstanty, potom platí

$$\int \big(a.f(x) + b.g(x)\big)dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)dx + C.$$

Speciálně platí, že: $\displaystyle\int a.f dx = a \int f dx,$

$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx.$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Věta (o linearitě integrálu): Jsou-li f a g funkce integrovatelné v intervalu I a $a,\ b \in \mathbf{R}$ jsou libovolné reálné konstanty, potom platí

$$\int \big(a.f(x) + b.g(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx + C.$$

Speciálně platí, že: $\displaystyle\int a.f\,dx = a\int f\,dx,$

$$\int (f+g)dx = \int f\,dx + \int g\,dx.$$

Věta (o integraci per-partes): Jsou-li f a g funkce spojitě diferencovatelné funkce v intervalu I, pak v tomto intervalu platí

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Věta (o linearitě integrálu): Jsou-li f a g funkce integrovatelné v intervalu I a $a,\, b \in \mathbf{R}$ jsou libovolné reálné konstanty, potom platí

$$\int \big(a.f(x) + b.g(x)\big)dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx + C.$$

Speciálně platí, že: $\int a.f dx = a\int f dx,$

$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx.$$

Věta (o integraci per-partes): Jsou-li f a g funkce spojitě diferencovatelné funkce v intervalu I, pak v tomto intervalu platí

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

$$(f.g)' = f'g + fg' \quad \Rightarrow \quad f.g = \int f'g dx + \int fg' dx \quad \Rightarrow \quad \text{tvrzení věty}$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \neq -1, \; x \in \mathbf{R},$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \; x \neq 0$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, $a \neq -1$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \ x \neq 0$$

b) Exponenciální funkce: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$.

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C,$ $a \neq -1$, x$\in$**R**,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

b) Exponenciální funkce: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $a > 0$, $a \neq 1$, x$\in$**R**.

c) Logaritmické funkce: $\int \log_a x dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C,$ $a > 0$, $a \neq 1$, x>0.

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, $a \neq -1$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

b) Exponenciální funkce: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbf{R}$.

c) Logaritmické funkce: $\int \log_a x dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a} \right) + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

d) Goniometrické funkce: $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, $x \in \mathbf{R}$,

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C, \quad x \in \mathbf{R}.$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, $a \neq -1$, x$\in$**R**,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

b) Exponenciální funkce: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, x$\in$**R**.

c) Logaritmické funkce: $\int \log_a x dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, x>0.

d) Goniometrické funkce: $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, x$\in$**R**,

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C, \quad x \in \mathbf{R}.$$

e) Cyklometrické funkce: $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$,

$$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (-1, 1).$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

a) Mocninné funkce: $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$, $a \neq -1$, x∈**R**,

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$, $x \neq 0$

b) Exponenciální funkce: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, x∈**R**.

c) Logaritmické funkce: $\int \log_a x dx = x\left(\log_a x - \frac{1}{\ln a}\right) + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, x>0.

d) Goniometrické funkce: $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, x∈**R**,

$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$, x∈**R**.

e) Cyklometrické funkce: $\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$,

$\int \arccos x dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$, x∈(-1, 1).

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C.$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C.$$

b) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg} x + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C \ = -\arccos x + D.$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotg}x + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \ = -\arccos x + D.$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C \quad = -\mathrm{arccotg}x + D.$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotg}x + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \ = -\arccos x + D.$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C \quad = -\mathrm{arccotg}x + D.$

Příklady:

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C.$$

b) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \ = -\arccos x + D.$$

d) $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C \quad = -\mathrm{arccotg} x + D.$$

Příklady: $$\int (x^2 + 3x - 2) e^x dx,$$

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další “tabulkové” integrály:

a) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C.$$

b) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \;\; = -\arccos x + D.$$

d) $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C \quad = -\mathrm{arccotg} x + D.$$

Příklady: $\int (x^2 + 3x - 2)e^x dx, \qquad \int \cos^2 x dx,$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další "tabulkové" integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \mathrm{tg}x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\mathrm{cotg}x + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C \;= -\arccos x + D.$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}dx = \mathrm{arctg}x + C \quad = -\mathrm{arccotg}x + D.$

Příklady: $\displaystyle\int (x^2+3x-2)e^x dx, \qquad \int \cos^2 x dx, \qquad \int e^x \sin x dx,$

IV.2. Výpočet neurčitého integrálu

Z tabulky derivací elementárních funkcí plynou další "tabulkové" integrály:

a) $$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg} x + C.$$

b) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \ = -\arccos x + D.$$

d) $$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C \quad = -\mathrm{arccotg} x + D.$$

Příklady: $$\int (x^2 + 3x - 2)e^x dx, \qquad \int \cos^2 x dx, \qquad \int e^x \sin x dx,$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx,$$

IV.3. Integrace substitucí

Věta (o integraci substitucí): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu I a funkce $x = g(t)$ je spojitě diferencovatelná v intervalu J a je $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$. Potom platí

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big).g'(t)dt$$

pro $x \in \mathrm{I}$, $t \in \mathrm{J}$.

IV.3. Integrace substitucí

Věta (o integraci substitucí): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu I a funkce $x = g(t)$ je spojitě diferencovatelná v intervalu J a je $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$. Potom platí

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big).g'(t)dt$$

pro $x \in \mathrm{I}$, $t \in \mathrm{J}$.

Tuto větu lze použít oběma směry: “zleva doprava” (substituční metoda I) i “zprava doleva” (substituční metoda 2):

IV.3. Integrace substitucí

Věta (o integraci substitucí): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu I a funkce $x = g(t)$ je spojitě diferencovatelná v intervalu J a je $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$. Potom platí

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big).g'(t)dt$$

pro $x \in \mathrm{I}$, $t \in \mathrm{J}$.

Tuto větu lze použít oběma směry: “zleva doprava” (substituční metoda I) i “zprava doleva” (substituční metoda 2):

: $\int x\sqrt{4 - x^2}dx$

- Obvykle jednodušší, bývá “vidět” na první pohled.
- Musíme určit $f(g)$, $g(t)$ a $g'(t)$.
- Uděláme substituci: $g(t)=x$, $g'(t)dt=dx$.
- Nakonec provedeme zpětnou substituci: $t=g^{-1}(x)$

IV.3. Integrace substitucí

Věta (o integraci substitucí): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu I a funkce $x = g(t)$ je spojitě diferencovatelná v intervalu J a je $g(\mathrm{J}) \subset \mathrm{I}$. Potom platí

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big).g'(t)dt$$

pro $x \in \mathrm{I}$, $t \in \mathrm{J}$.

Tuto větu lze použít oběma směry: "zleva doprava" (substituční metoda I) i "zprava doleva" (substituční metoda 2):

← : $\int x\sqrt{4-x^2}dx$

- Obvykle jednodušší, bývá "vidět" na první pohled.
- Musíme určit $f(g)$, $g(t)$ a $g'(t)$.
- Uděláme substituci: $g(t)=x$, $g'(t)\mathrm{d}t=\mathrm{d}x$.
- Nakonec provedeme zpětnou substituci: $t=g^{-1}(x)$

→ : $\int \sqrt{4-x^2}dx$

- Je komplikovanější v tom, že ji musíme "nalézt".
- Musíme určit substituci ve tvaru: $x=g(t)$, $\mathrm{d}x=g'(t)\mathrm{d}t$
- Po zintegrování provedeme zpětnou substituci: $t=g^{-1}(x)$

Příklady:

$$\int \sin^5 x \cos x \mathrm{d}x \qquad \int \sin^5 x \mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{tg} x dx$$

Příklady:

$$\int \sin^5 x \cos x \mathrm{d}x \qquad \int \sin^5 x \mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{tg} x dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1} dx, \qquad \int \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \sin^5 x \cos x \mathrm{d}x \qquad \int \sin^5 x \mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{tg} x dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1} dx, \qquad \int \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{2+\sqrt{\ln x}}{x \ln x} \mathrm{d}x$$

Příklady:

$$\int \sin^5 x \cos x \mathrm{d}x \qquad \int \sin^5 x \mathrm{d}x \qquad \int \mathrm{tg} x dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1} dx, \qquad \int \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{2+\sqrt{\ln x}}{x \ln x} \mathrm{d}x$$

$$\int (3-2x)^{256} \mathrm{d}x \qquad \int \frac{\sqrt{x-1}}{x} \mathrm{d}x \qquad \int x^3 e^{-x^2} \mathrm{d}x$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Věta (o rozkladu polynomu): Nechť $Q_m(x)$ je mnohočlen stupně $m > 1$. Potom

i) je-li α k-násobným reálným kořenem funkce $Q_m(x)$, pak $Q_m(x) = (x-\alpha)^k . U_{m-k}(x)$

ii) je-li β k-násobným komplexním kořenem funkce $Q_m(x)$, pak tato funkce má i k-násobným komplexně sdružený kořen γ a platí $Q_m(x) = (x-\beta)^k (x-\gamma)^k . U_{m-2k}(x) = (x^2+px+q)^k . U_{m-2k}(x)$, kde $x^2+px+q = (x-\beta)(x-\gamma)$.

IV.4. Integrace racionální funkce

Věta (o rozkladu polynomu): Nechť $Q_m(x)$ je mnohočlen stupně $m > 1$. Potom

i) je-li α k-násobným reálným kořenem funkce $Q_m(x)$, pak $Q_m(x) = (x-\alpha)^k . U_{m-k}(x)$

ii) je-li β k-násobným komplexním kořenem funkce $Q_m(x)$, pak tato funkce má i k-násobným komplexně sdružený kořen γ a platí $Q_m(x) = (x-\beta)^k(x-\gamma)^k . U_{m-2k}(x) = (x^2+px+q)^k . U_{m-2k}(x)$, kde $x^2+px+q = (x-\beta)(x-\gamma)$.

Je-li $Q_3(x) = rx^3 + sx + t$ polynom stupně 3, potom jsou pouze čtyři možnosti:

i) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,

ii) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x-\beta)^2$,

iii) $Q_3(x) = r(x-\alpha)^3$,

iv) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x^2+px+q)$

IV.4. Integrace racionální funkce

Věta (o rozkladu polynomu): Nechť $Q_m(x)$ je mnohočlen stupně $m > 1$. Potom

i) je-li α k-násobným reálným kořenem funkce $Q_m(x)$, pak
$Q_m(x) = (x-\alpha)^k . U_{m-k}(x)$

ii) je-li β k-násobným komplexním kořenem funkce $Q_m(x)$, pak tato funkce má i k-násobným komplexně sdružený kořen γ a platí
$Q_m(x) = (x-\beta)^k (x-\gamma)^k . U_{m-2k}(x) = (x^2 + px + q)^k . U_{m-2k}(x)$, kde
$x^2 + px + q = (x-\beta)(x-\gamma)$.

Je-li $Q_3(x) = rx^3 + sx + t$ polynom stupně 3, potom jsou pouze čtyři možnosti:

i) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$,
ii) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x-\beta)^2$,
iii) $Q_3(x) = r(x-\alpha)^3$,
iv) $Q_3(x) = r(x-\alpha)(x^2+px+q)$

Příklad: Najděte kořeny rovnice $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

IV.4. Integrace racionální funkce

Racionální (lomená) funkce: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

IV.4. Integrace racionální funkce

Racionální (lomená) funkce: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Pokud je $n \geq m$, pak lze $f(x)$ rozdělit na polynom stupně m-n a ryze racionální funkci: $$f(x) = R_{n-m}(x) + \frac{S_k(x)}{Q_m(x)}, \qquad k < m.$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Racionální (lomená) funkce: $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$

Pokud je $n \geq m$, pak lze $f(x)$ rozdělit na polynom stupně m-n a ryze racionální funkci: $f(x) = R_{n-m}(x) + \dfrac{S_k(x)}{Q_m(x)}$, $k < m$.

Věta (o rozkladu racionální funkce na parciální zlomky):

Nechť $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ je ryze racionální funkce.

i) je-li x_0 k-násobným reálným kořenem funkce $Q_m(x)$, pak existují konstanty $A_1, \ldots, A_k$ a polynomy $P^*_{n-k}(x)$ a $Q^*_{m-k}(x)$ tak, že

$$f(x) = \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{P^*_{n-k}(x)}{Q^*_{m-k}(x)}$$

ii) je-li x_1 k-násobným komplexním kořenem funkce $Q_m(x)$, pak existují konstanty $B_1, \ldots, B_k$, $C_1, \ldots, C_k$ a polynomy $P^*_{n-2k}(x)$ a $Q^*_{m-2k}(x)$ tak, že

$$f(x) = \frac{B_1 + C_1 x}{x^2 + px + q} + \frac{B_2 + C_2 x}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{B_k + C_k x}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P^*_{n-2k}(x)}{Q^*_{m-2k}(x)}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

$$i) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

$$i) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)} \qquad \text{(tři reálné různé kořeny)}$$

$$ii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

$$i) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$$

(tři reálné různé kořeny)

$$ii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

(dva reálné různé kořeny, jeden dvojnásobný)

$$iii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

$$i) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$$

(tři reálné různé kořeny)

$$ii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

(dva reálné různé kořeny, jeden dvojnásobný)

$$iii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$$

(jeden reálný trojnásobný kořen)

$$iv) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}$$

IV.4. Integrace racionální funkce

Je-li jmenovatel stupně 2, lze racionální funkci rozložit pouze v případě, že jmenovatel má reálné kořeny:

$$\frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} \qquad \text{nebo} \qquad \frac{ax+b}{rx^2+sx+t} = \frac{C}{(x-\gamma)^2}$$

Je-li jmenovatel stupně 3, jsou opět pouze čtyři možnosti:

$$i) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\gamma)}$$

(tři reálné různé kořeny)

$$ii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\beta)} + \frac{C}{(x-\beta)^2}$$

(dva reálné různé kořeny, jeden dvojnásobný)

$$iii) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{B}{(x-\alpha)^2} + \frac{C}{(x-\alpha)^3}$$

(jeden reálný trojnásobný kořen)

$$iv) \quad \frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)} + \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)}$$

(jeden reálný a dva komplexně sdružené kořeny)

IV.4. Integrace racionální funkce

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx$$

$$\int \frac{3}{x^3-7x+6}dx$$

$$\int \frac{3}{x^3+5x-6}dx$$

$$\int \frac{2x^2+1}{2(x+1)^3}dx$$

$$\int \frac{x-1}{4x^3+4x^2+-7x+2}dx$$

$$\int \frac{x^3+5}{x^3+2x^2+3x}dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2^x+1}}\mathrm{d}x$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x, \quad \int \sin^5(x) \cos^2(x)\, dx, \quad \int \cos^2(2x)\, dx \quad \int \sin^2(x) \cos^4(x)\, dx,$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $\displaystyle \int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int \cos^2(2x)\,dx \quad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$

$$\boxed{\int \sin^m(x).\cos^n(x)\,dx}$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int \cos^2(2x)\,dx \quad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$

$$\boxed{\int \sin^m(x).\cos^n(x)\,dx}$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\,dx \quad \int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx,$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int \cos^2(2x)\,dx \quad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$$

$$\boxed{\int \sin^m(x).\cos^n(x)\,dx}$$

2) $$\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\,dx \quad \int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx,$$

$$\boxed{\int R\big(\sin(x),\cos(x)\big)\,dx}$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int \cos^2(2x)\,dx \quad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$$

$$\boxed{\int \sin^m(x).\cos^n(x)\,dx}$$

2) $$\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\,dx \quad \int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx,$$

$$\boxed{\int R\big(\sin(x),\cos(x)\big)\,dx} \qquad t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

1) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x, \quad \int \sin^5(x)\cos^2(x)\,dx, \quad \int \cos^2(2x)\,dx \quad \int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$

$$\boxed{\int \sin^m(x).\cos^n(x)\,dx}$$

2) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{3+\cos x}\,dx, \quad \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\sin^2 x}\,dx \quad \int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx,$

$$\boxed{\int R\big(\sin(x),\cos(x)\big)\,dx}$$

$$t = \operatorname{tg}\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

$$\left|\begin{array}{ll} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, & \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & \end{array}\right|$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx, \quad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

$$\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx}$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx, \quad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

$$\boxed{\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx} \qquad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx, \quad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

$$\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx} \qquad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

4) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,dx$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

$$\boxed{\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx} \qquad\qquad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

4) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,dx$

$$\boxed{\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx}$$

IV.5. Vybrané speciální substituce

3) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{2x+1}}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}\,dx$

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx} \qquad\qquad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

4) $\displaystyle\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\,dx$

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx}$$

$$a > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t + \sqrt{a}x$$

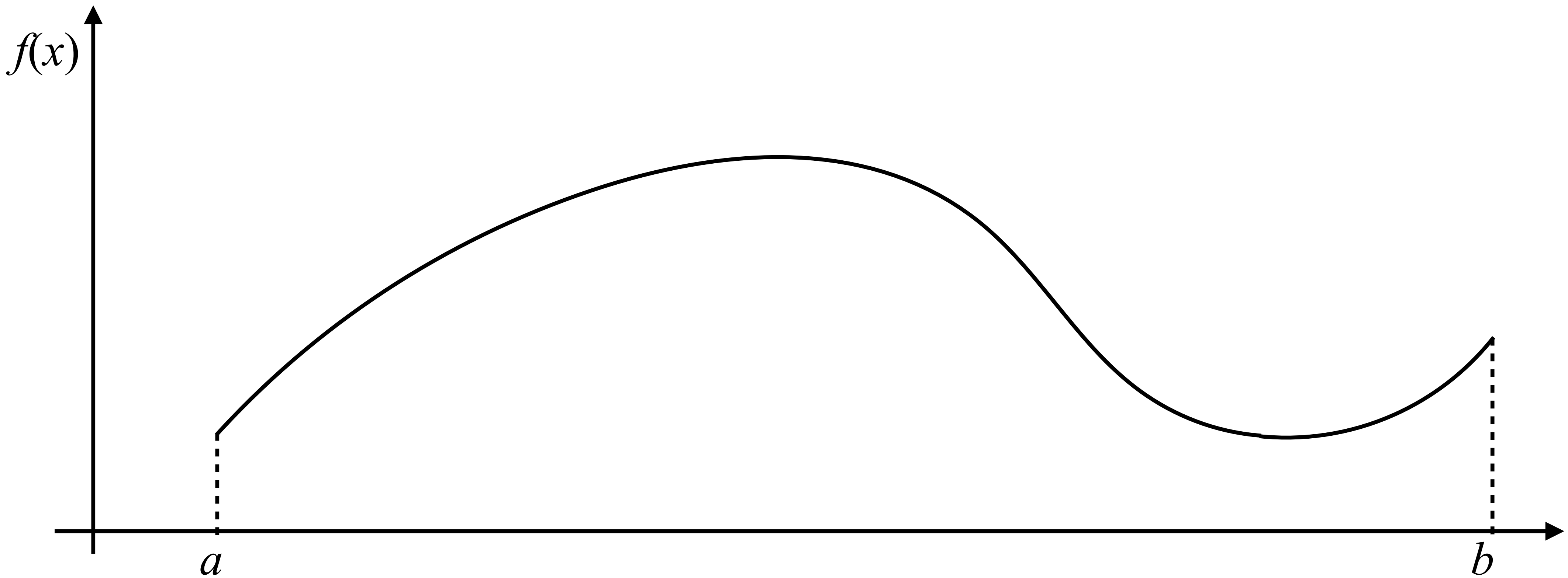
$$c > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + tx$$

$$a < 0 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{\beta - x}{x-\alpha}}$$

(tzv. *Eulerovy substituce*)

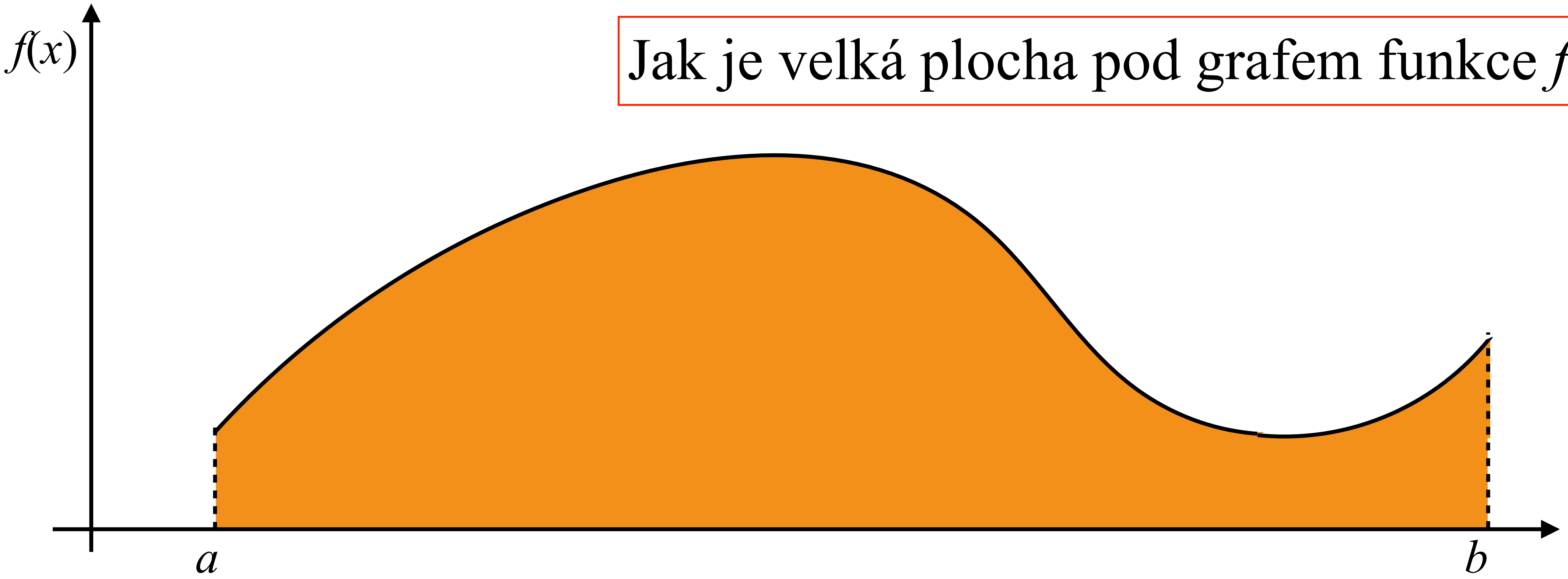
IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



IV.6. Riemanův integrál

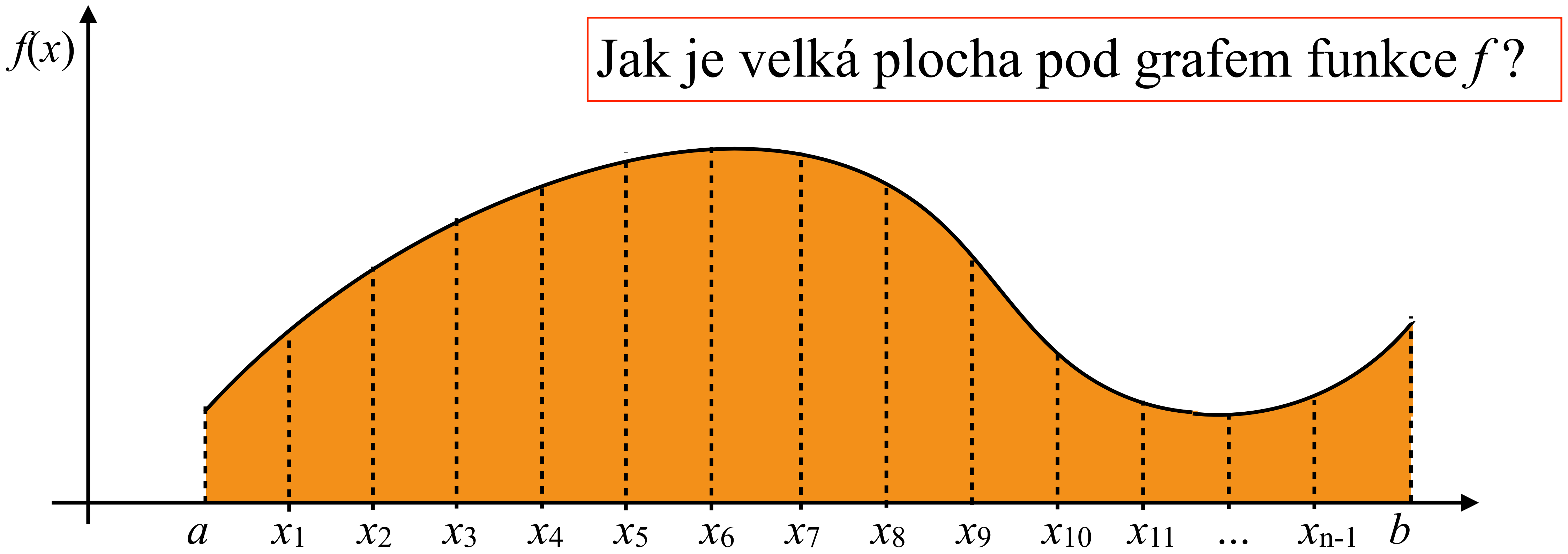
Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

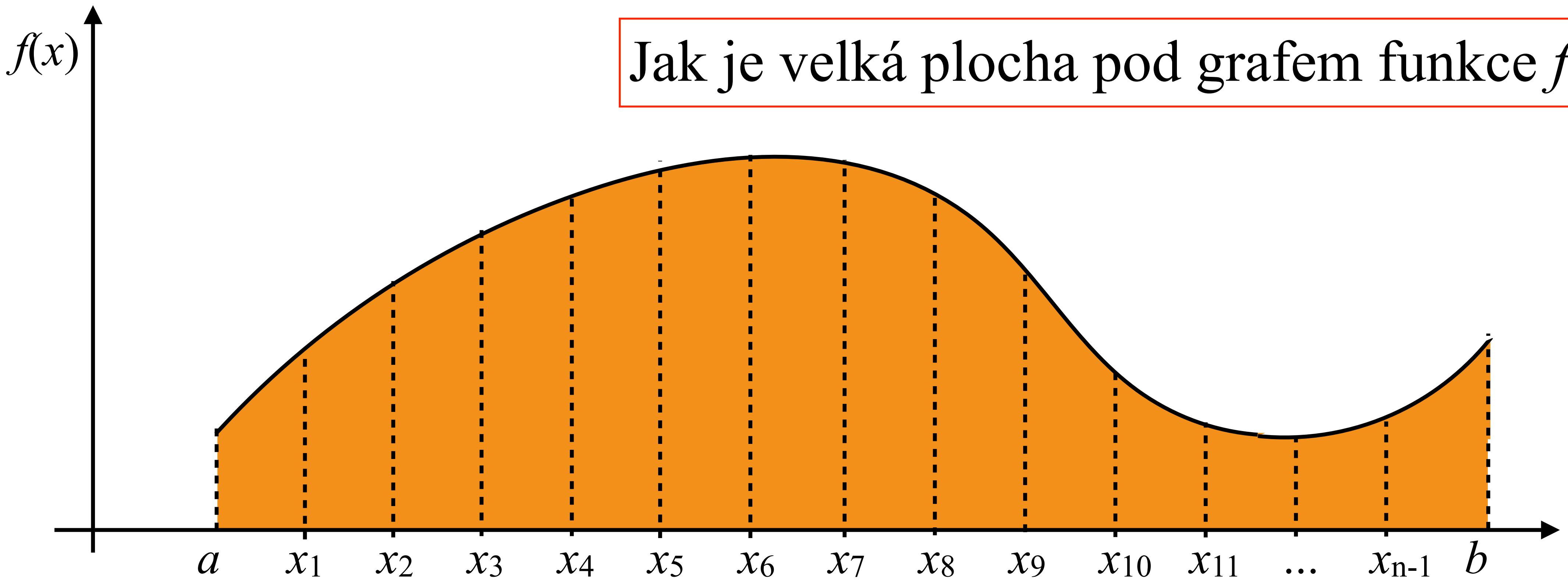


Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?



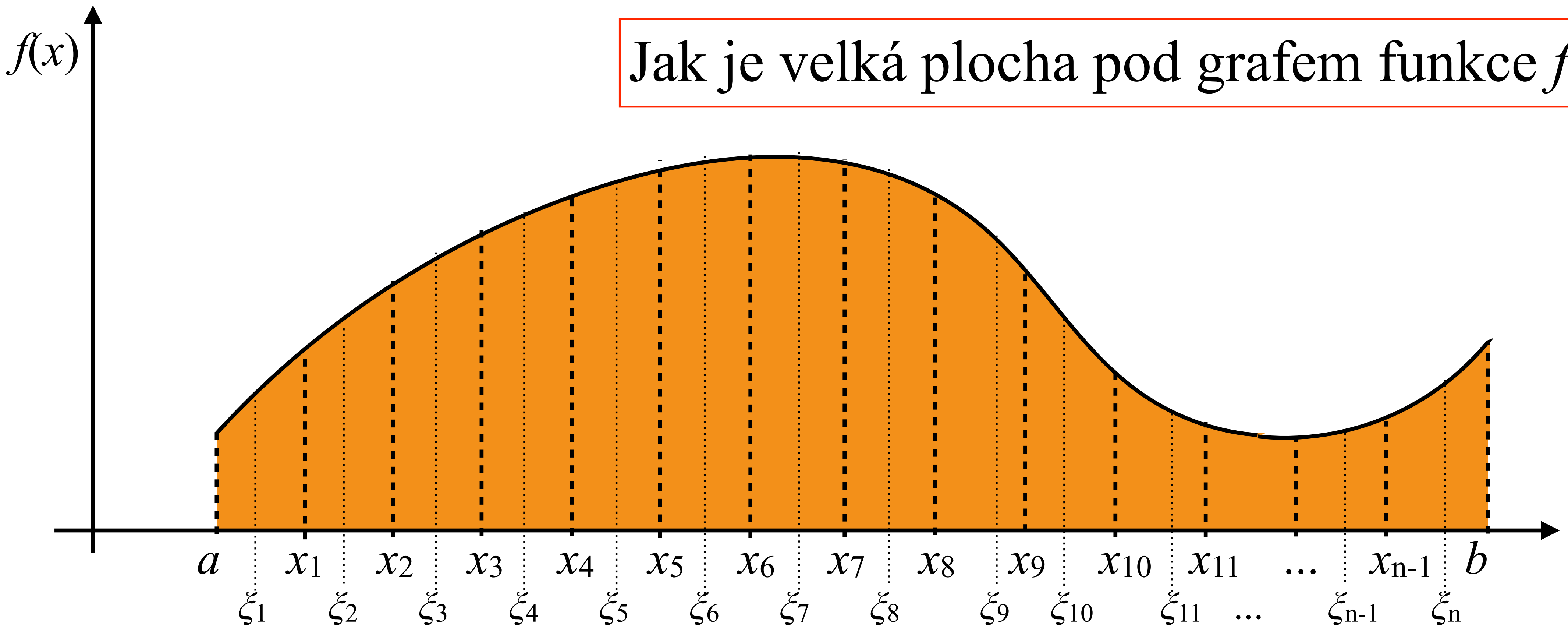
Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $\quad D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

norma dělení D: $\quad ||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1} \ ; i = 1, \ldots, n\}$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?



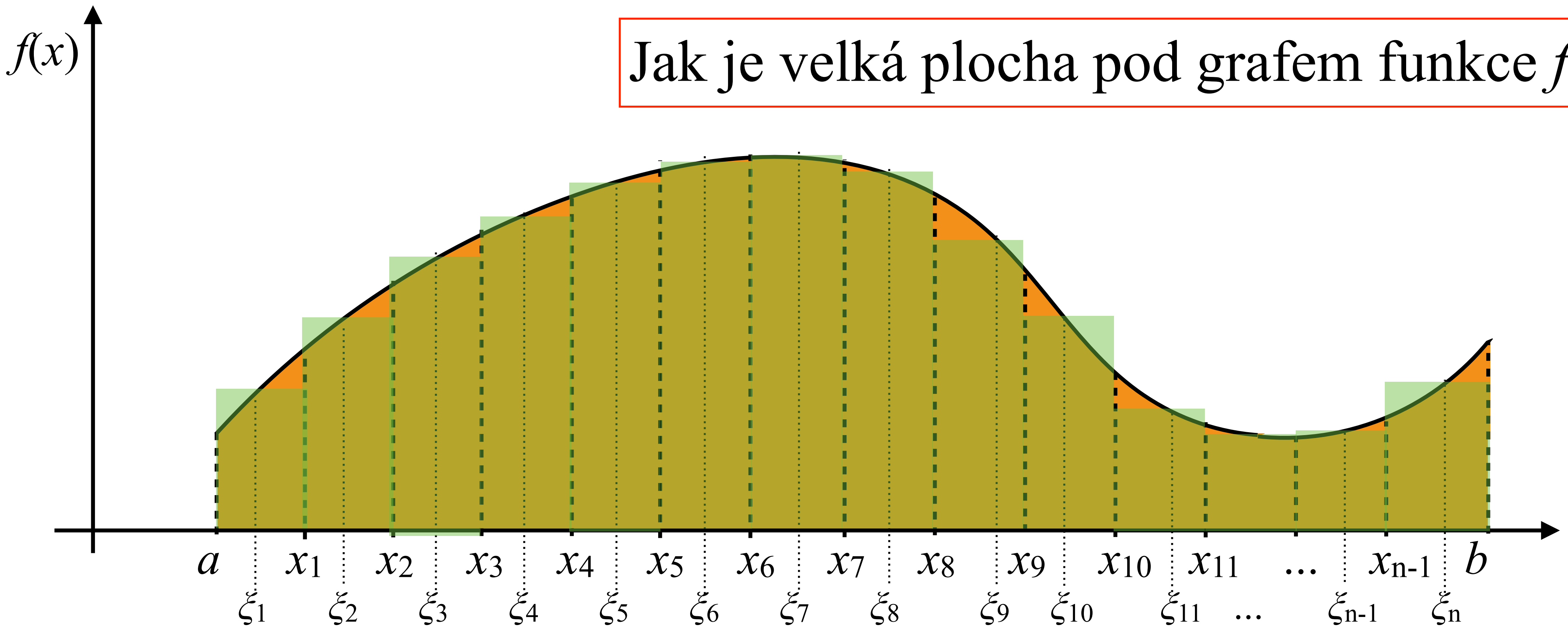
Dělení intervalu $\langle a,b \rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : \; a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

norma dělení D: $||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1} \; ; i = 1, \ldots, n\}$

výběr z intervalu $\langle a,b \rangle$: $V = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n : \; \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle, \; i = 1, \ldots, n\}$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

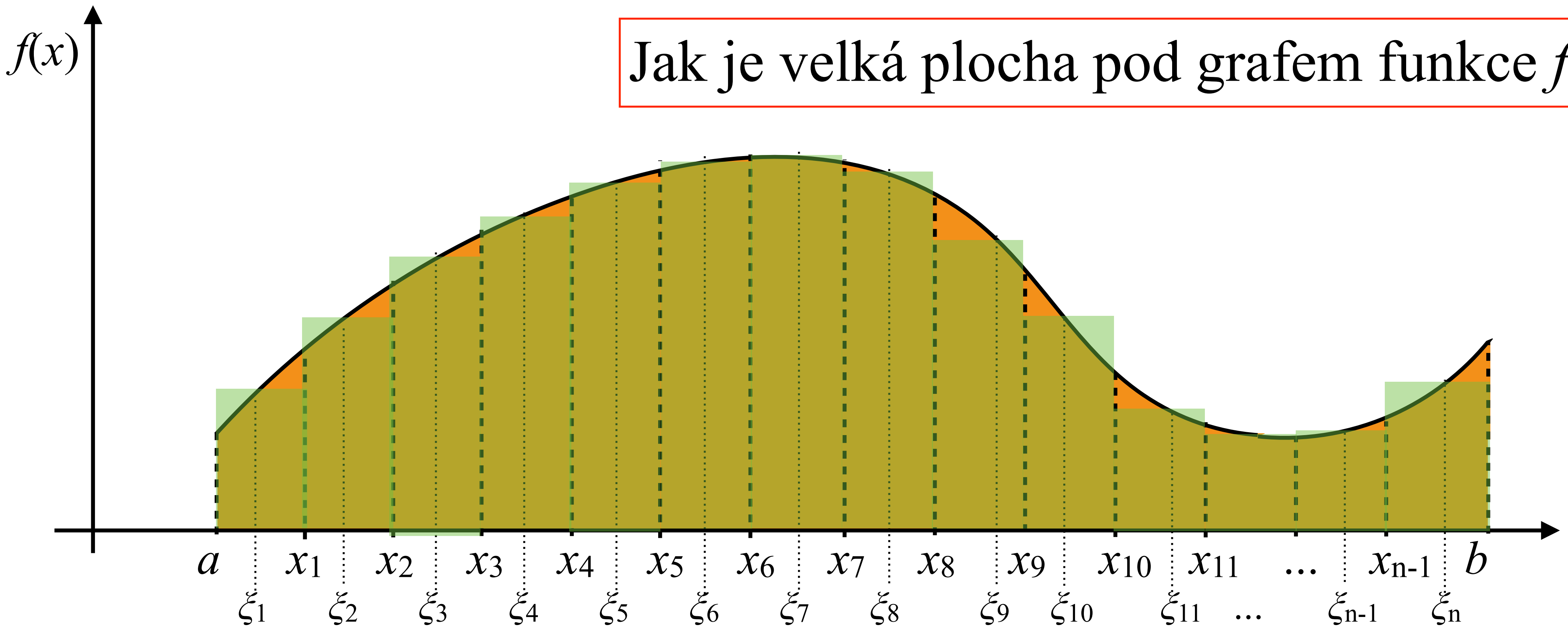
norma dělení D: $||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1} \; ; i = 1, \ldots, n\}$

výběr z intervalu $\langle a,b\rangle$: $V = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n : \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle, i=1,\ldots, n\}$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f?



Dělení intervalu $\langle a,b\rangle$: $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$

norma dělení D: $||D|| = max\{\triangle x_i : \triangle x_i = x_i - x_{i-1} \; ; i = 1, \ldots, n\}$

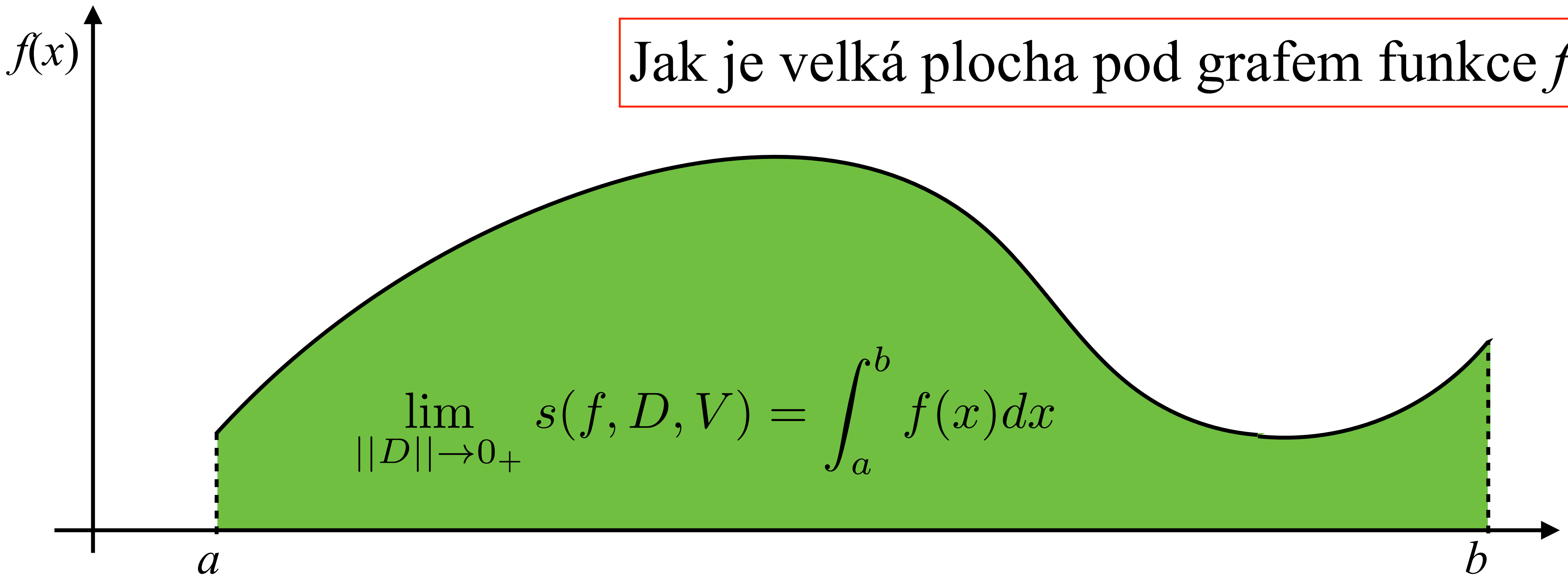
výběr z intervalu $\langle a,b\rangle$: $V = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n : \xi_i \in \langle x_{i-1}; x_i\rangle, i=1,\ldots, n\}$

Riemanův součet: $$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?

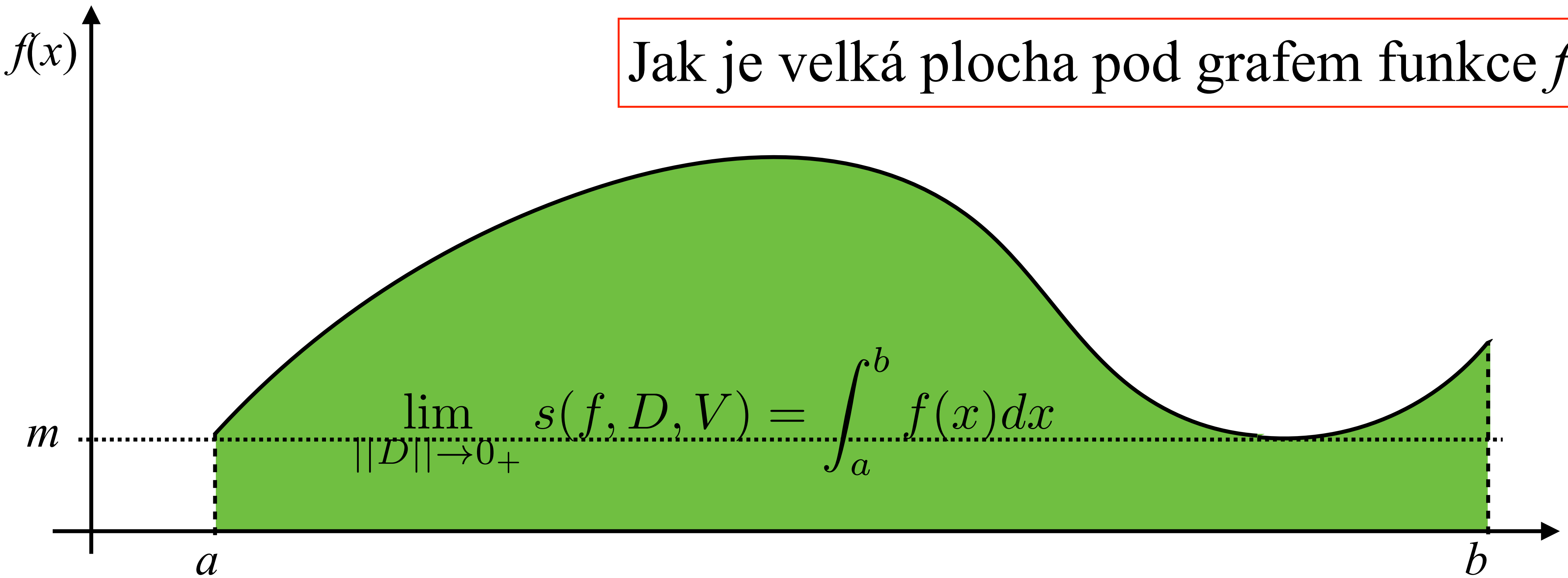


Riemanův součet: $$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?



$$\lim_{\|D\|\to 0_+} s(f,D,V) = \int_a^b f(x)dx$$

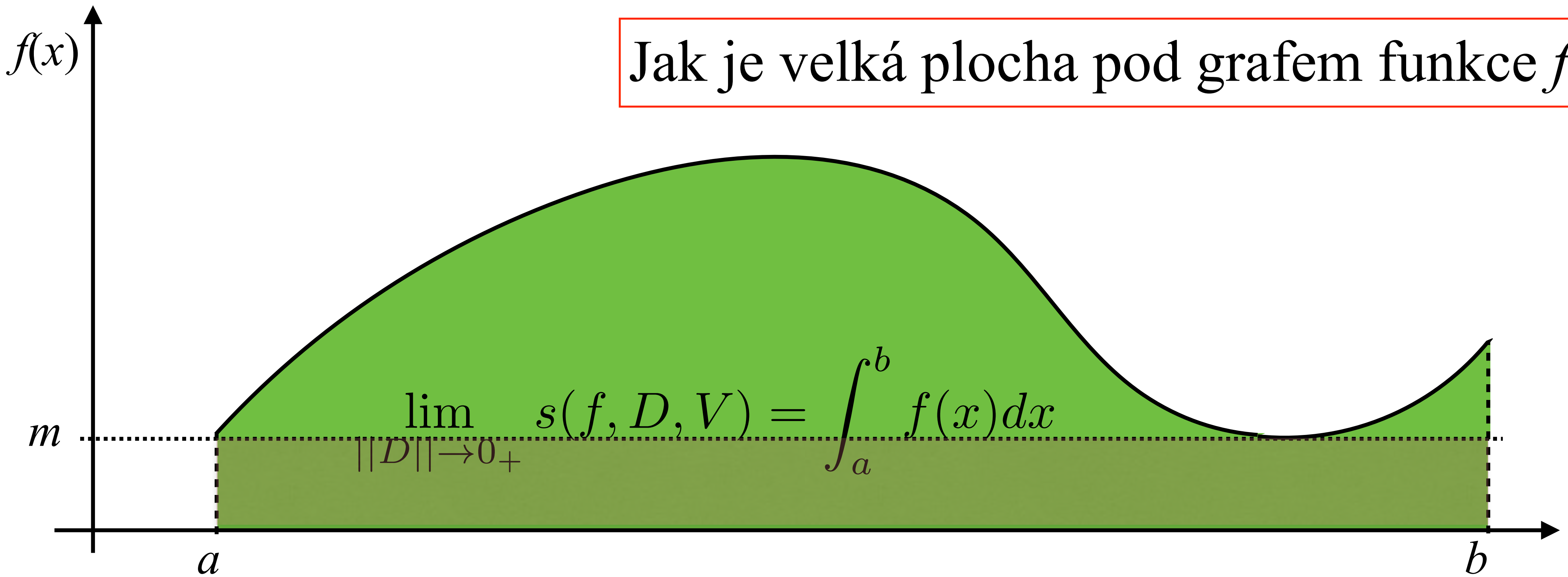
$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$

Riemanův součet: $$s(f,D,V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce *f* ?



$$\lim_{\|D\|\to 0_+} s(f, D, V) = \int_a^b f(x)dx$$

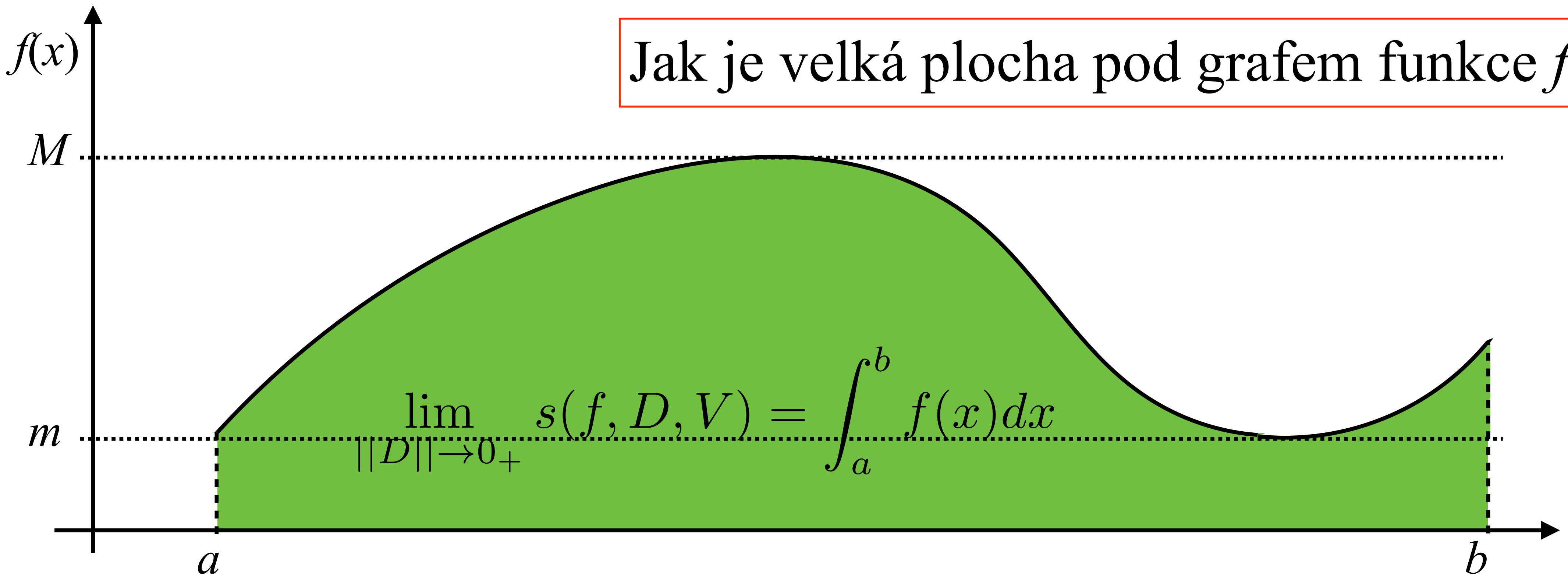
$m =$ minimum funkce *f* na intervalu $\langle a,b\rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

Riemanův součet: $s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f?



$$\lim_{||D|| \to 0_+} s(f, D, V) = \int_a^b f(x)dx$$

$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

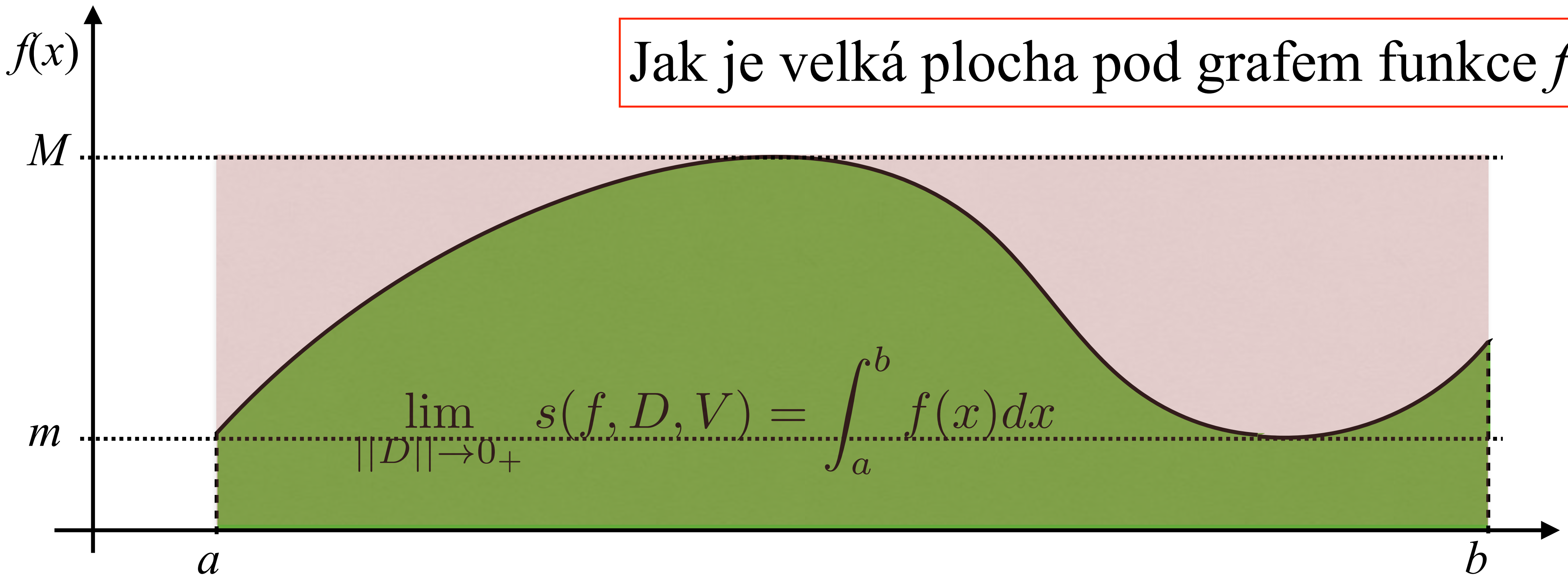
$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$

Riemanův součet: $$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f?



m = minimum funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

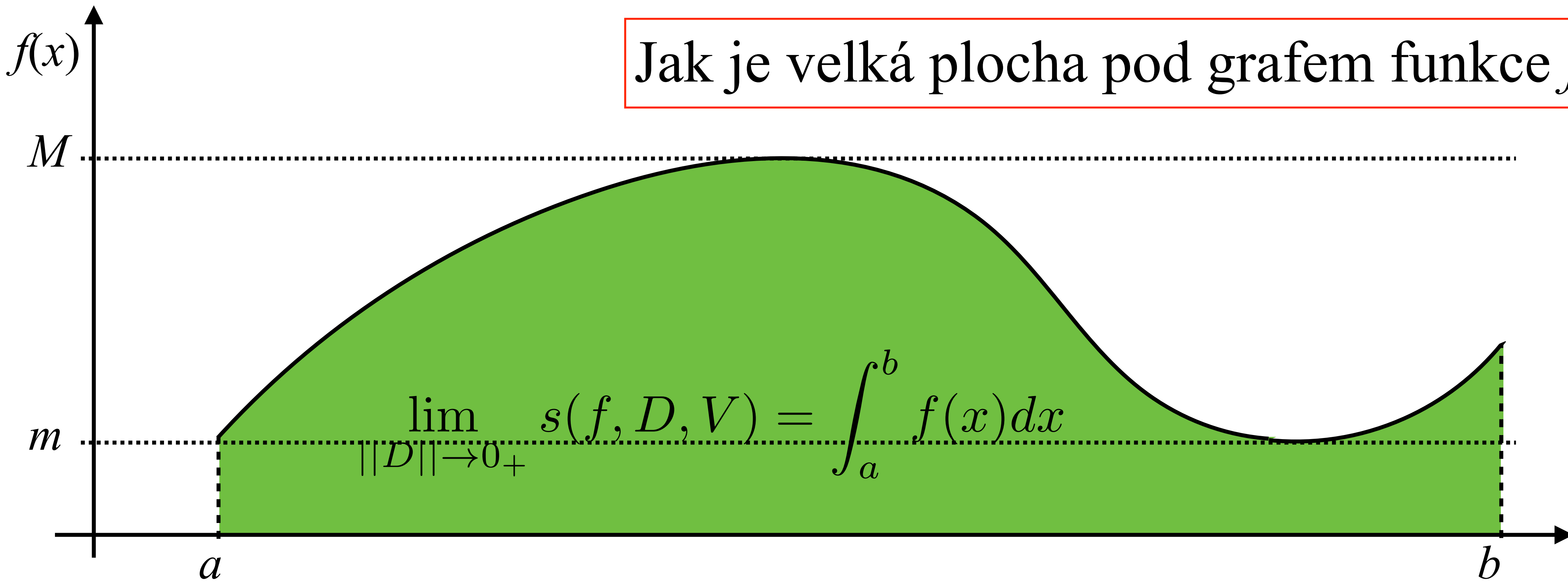
M = maximum funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

Riemanův součet: $s(f,D,V) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f ?



$$\lim_{||D||\to 0_+} s(f,D,V) = \int_a^b f(x)dx$$

$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

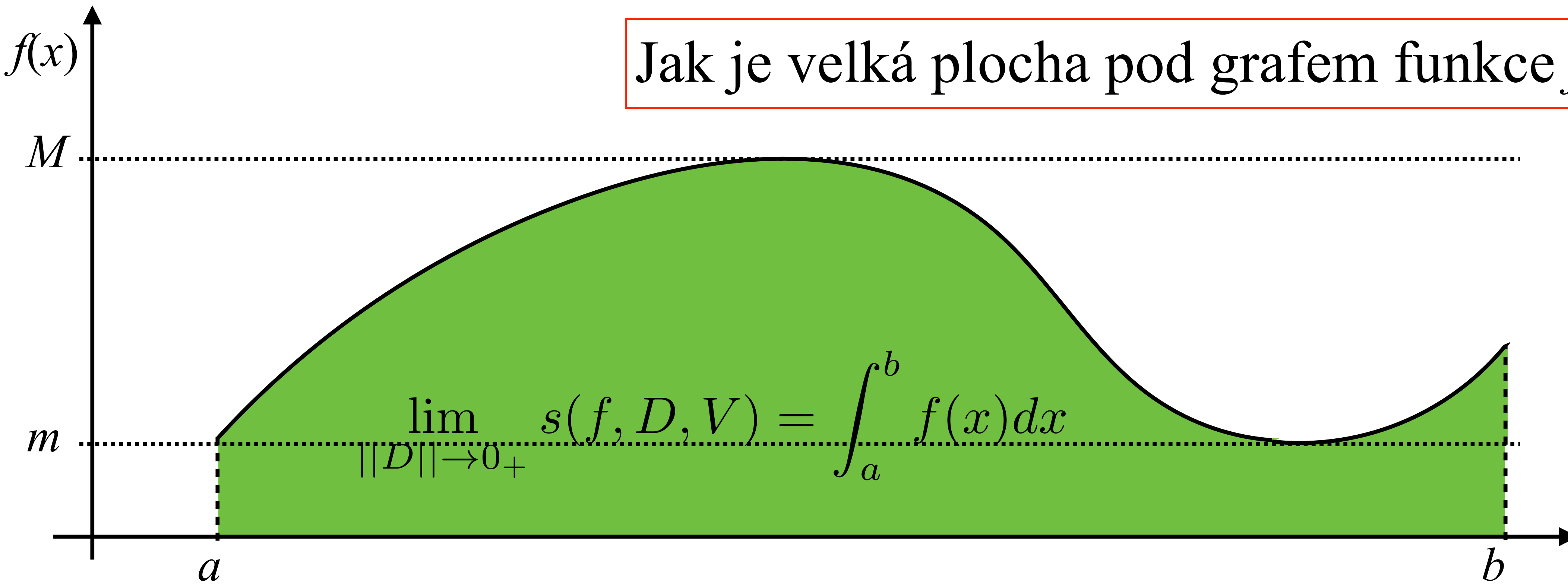
$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).\mu$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)

Jak je velká plocha pod grafem funkce f?



$$\lim_{||D||\to 0_+} s(f,D,V) = \int_a^b f(x)dx$$

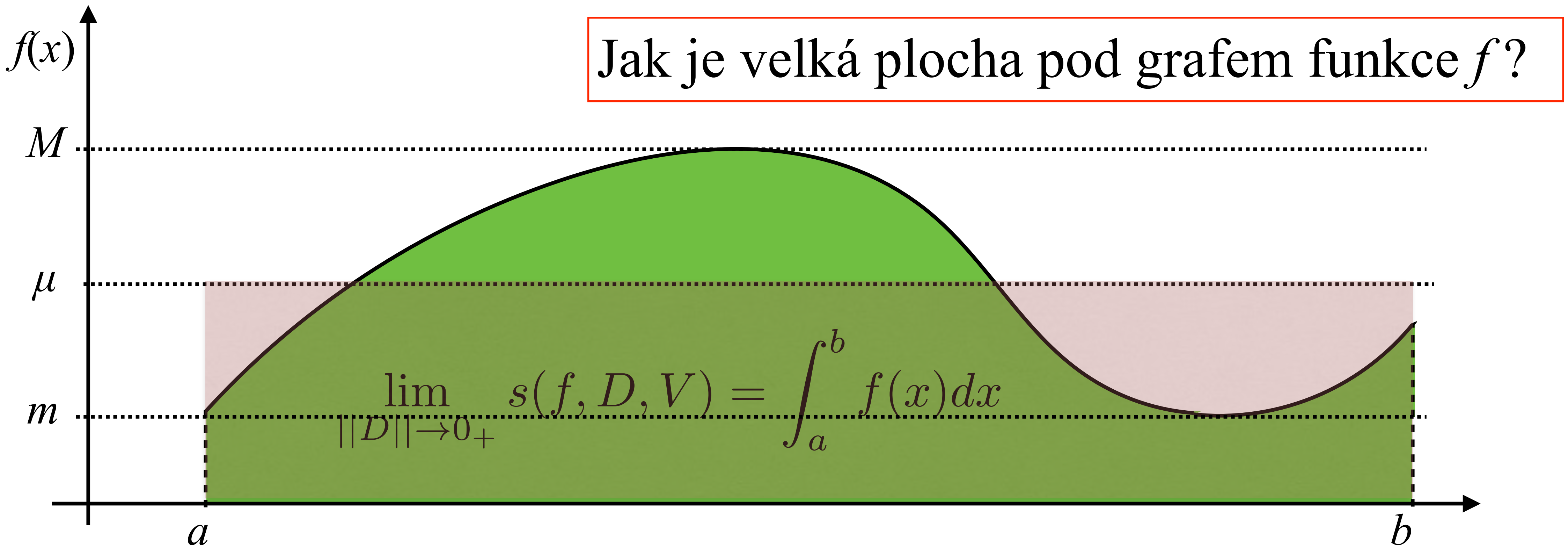
$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



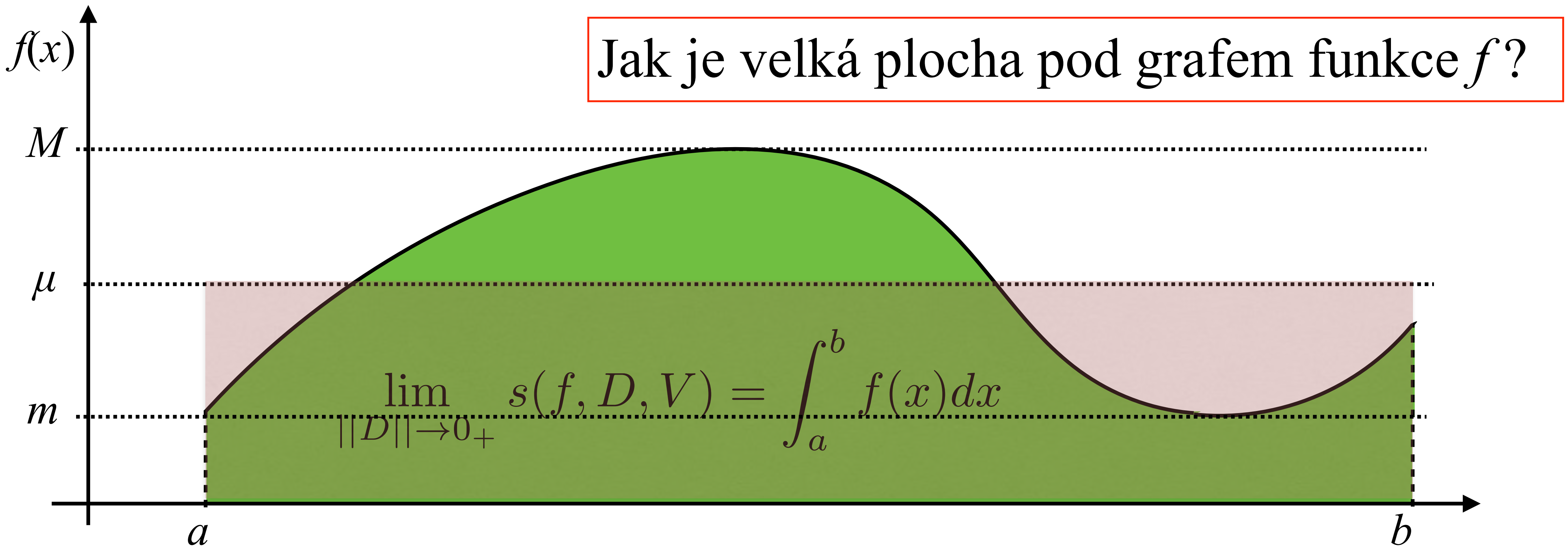
$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

IV.6. Riemanův integrál

Určitý integrál (je jich celá řada: Newtonův, Lebesgueův, Stieltjesův, …)



$m =$ minimum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $(b-a).m \leq \int_a^b f(x)dx$

$M =$ maximum funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$ => $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a).M$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a).\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

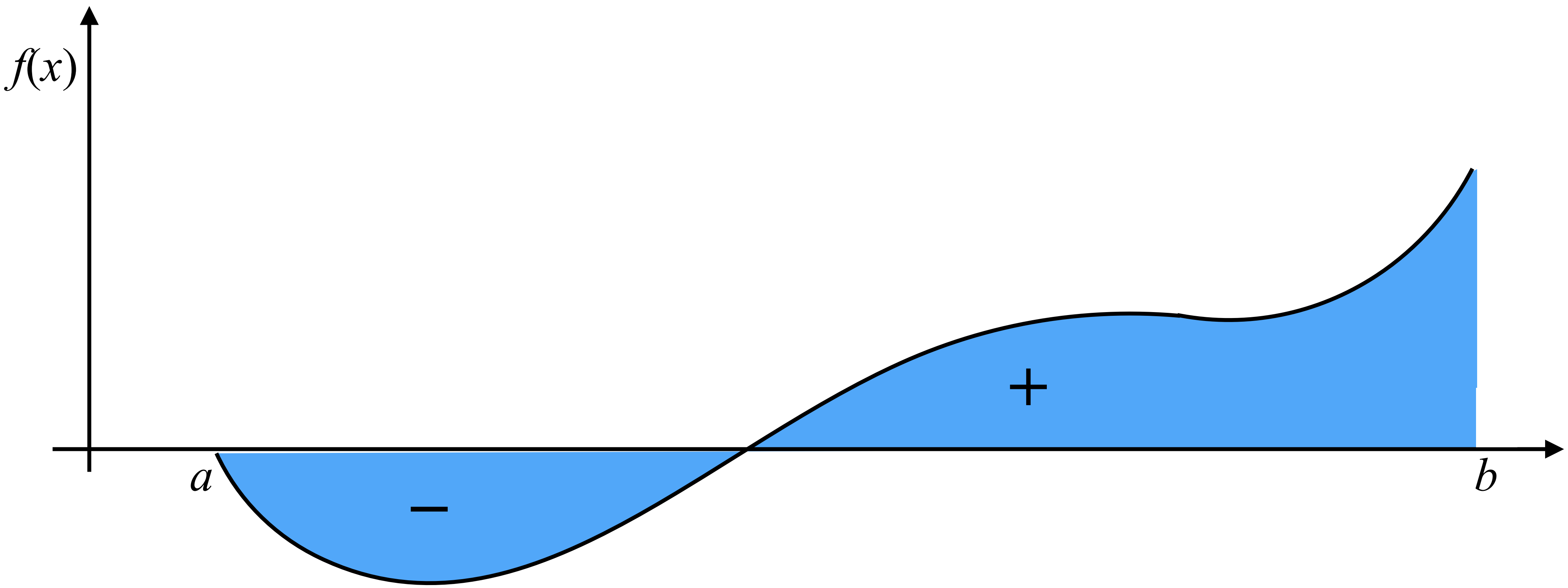
μ je tzv. *střední hodnota* integrálu funkce f na intervalu $\langle a,b \rangle$

IV.6. Riemanův integrál

$\int_a^b f(x)dx =$ plocha mezi grafem funkce a osou x nad intervalem $\langle a,b \rangle$

IV.6. Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx = \text{plocha mezi grafem funkce a osou } x \text{ nad intervalem } \langle a,b\rangle$$

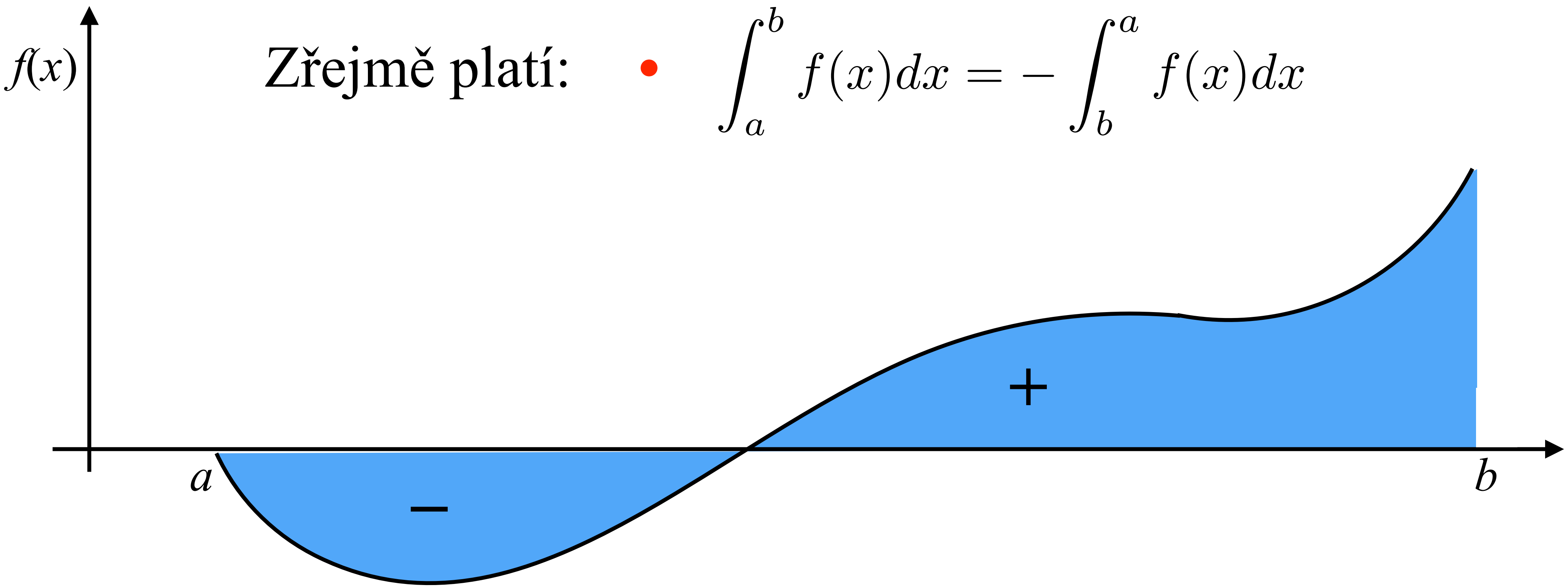


IV.6. Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx = \text{plocha mezi grafem funkce a osou } x \text{ nad intervalem } \langle a,b\rangle$$

Zřejmě platí:

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

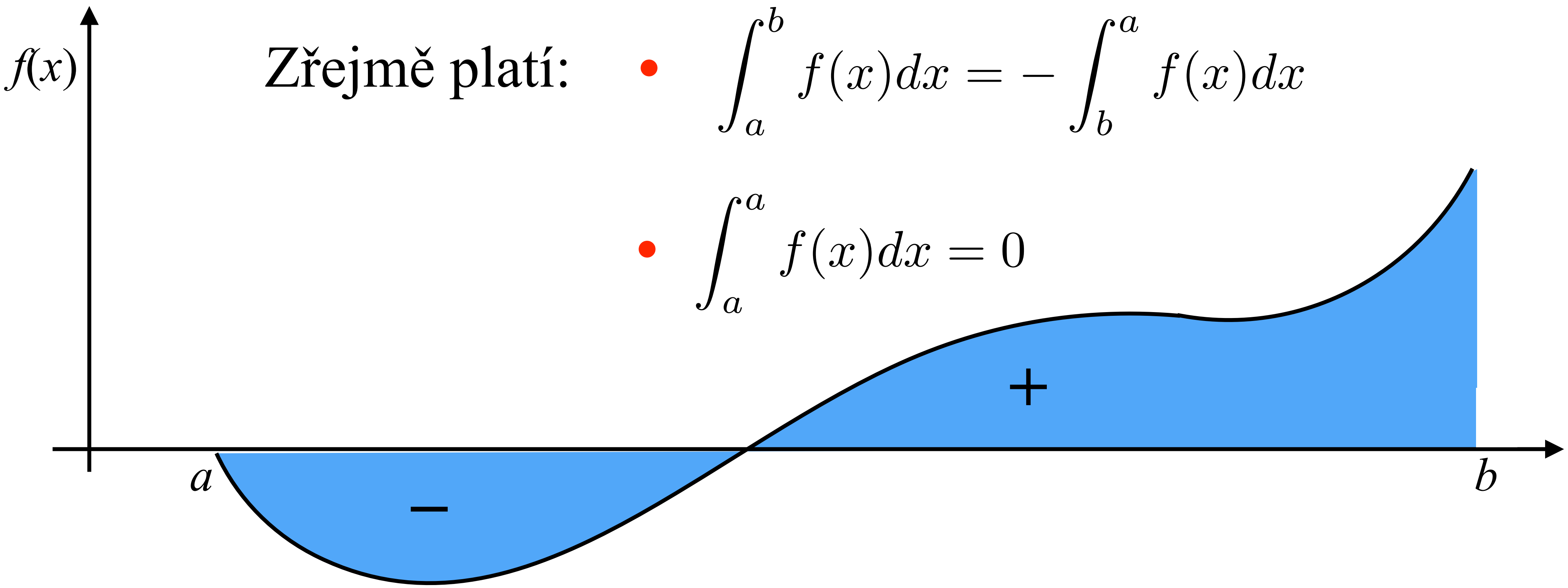


IV.6. Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx = \text{plocha mezi grafem funkce a osou } x \text{ nad intervalem } \langle a,b \rangle$$

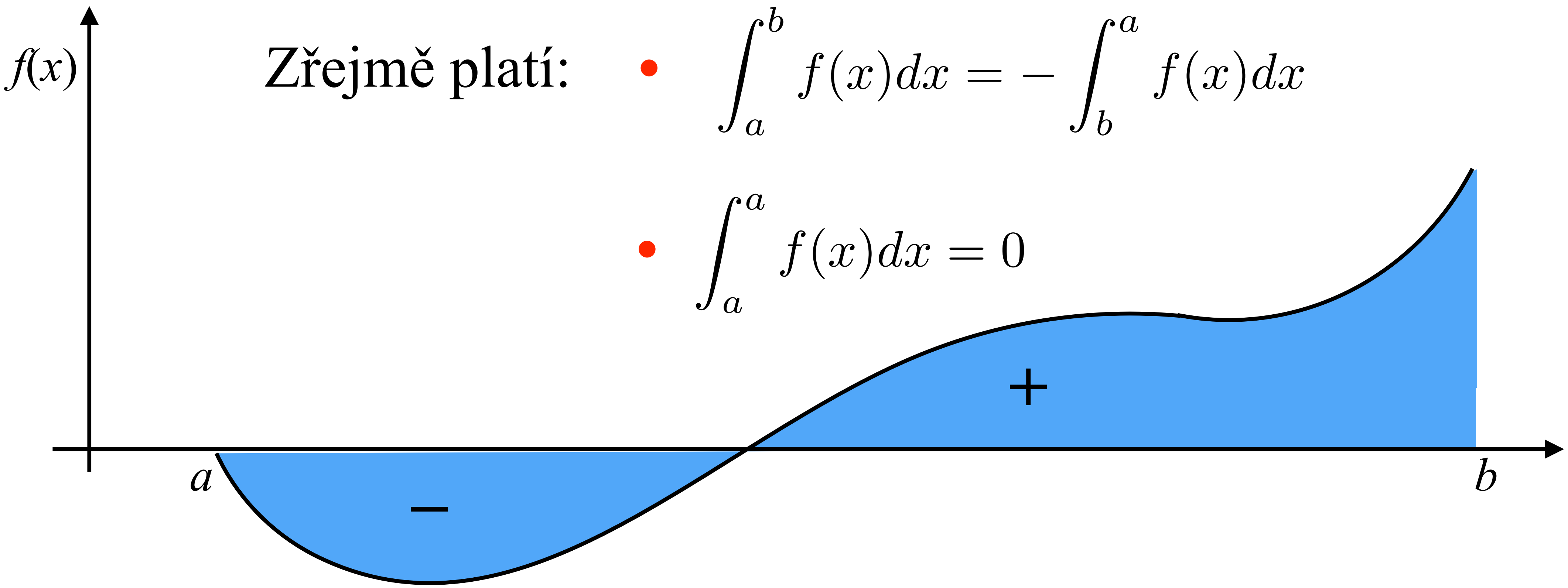
Zřejmě platí:

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$



IV.6. Riemanův integrál

$\int_a^b f(x)dx =$ plocha mezi grafem funkce a osou x nad intervalem $\langle a,b\rangle$



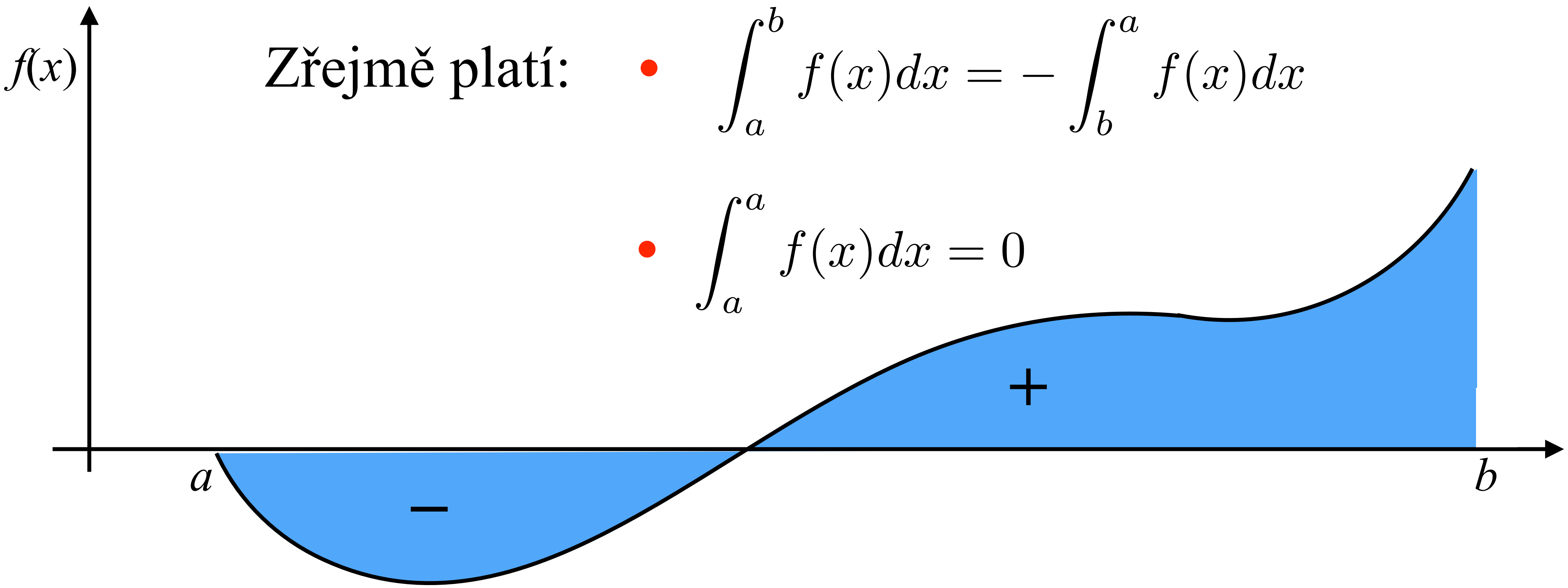
Zřejmě platí:

- $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
- $$\int_a^a f(x)dx = 0$$
- $$a \leq c \leq b \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(linearita vzhledem k mezím)

IV.6. Riemanův integrál

$\int_a^b f(x)dx =$ plocha mezi grafem funkce a osou x nad intervalem $\langle a,b \rangle$



Zřejmě platí:

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

- $a \leq c \leq b \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(linearita vzhledem k mezím)

- $\int_a^b \big(r.f(x) + s.g(x)\big)dx = r.\int_a^b f(x)dx + s.\int_a^b g(x)dx, \quad r,s \in R$

(linearita vzhledem k funkci)

IV.6. Riemanův integrál

Věta (o existenci Riemanova integrálu): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom existuje Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

IV.6. Riemanův integrál

Věta (o existenci Riemanova integrálu): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b \rangle$. Potom existuje Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

Říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b \rangle$.

IV.6. Riemanův integrál

Věta (o existenci Riemanova integrálu): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom existuje Riemanův integrál

$$\int_a^b f(x)dx$$

Říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Věta: Nechť jsou funkce f a g obě integrovatelné v intervalu $\langle a,b\rangle$.

a) Je-li $\langle c,d\rangle \subset \langle a,b\rangle$, potom jsou tyto funkce integrovatelná také v intervalu $\langle c,d\rangle$.

b) Liší-li se funkce f a g v intervalu $\langle a,b\rangle$ pouze v konečně mnoha bodech, potom je
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

c) Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$, potom je také
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

Věta (Newtonova-Leibnitzova formule): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^{1} (4x^3 + 2x - 5)dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^2-1}{x^2+1}dx$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

Věta (Newtonova-Leibnitzova formule): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^{1} (4x^3 + 2x - 5)dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^2-1}{x^2+1}dx$$

Věta (o integraci per partes): Nechť funkce f a g mají spojité derivace v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

Věta (Newtonova-Leibnitzova formule): Nechť $f(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{-1}^{1} (4x^3 + 2x - 5)dx, \qquad \int_0^1 \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}dx$$

Věta (o integraci per partes): Nechť funkce f a g mají spojité derivace v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

$$\int_0^2 x.e^{2x}dx, \qquad \int_0^{\pi} sin^2(x)dx,$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x-3}{x^2-3x+8}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin 4x\,dx,$$

$$\int_0^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx,$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

IV.6. Výpočet Riemanova integrálu

Věta (o integraci substitucí): Nechť funkce g má spojitou derivaci v intervalu $\langle a,b\rangle$ a zobrazuje $\langle a,b\rangle$ do intervalu J. Nechť funkce f je spojitá v J. Potom

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)ds.$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x-3}{x^2-3x+8}dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sin 4x\, dx,$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\, dx,$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx$$

IV.7. Riemanův integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Pro každé $x \in \langle a,b \rangle$ můžeme definovat funkci $P(x) = \int_a^x f(t)dt$

IV.7. Riemanův integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ můžeme definovat funkci $P(x) = \int_a^x f(t)dt$

Platí:

- Funkce $P(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$.

IV.7. Riemanův integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ můžeme definovat funkci $P(x) = \int_a^x f(t)dt$

Platí:

- Funkce $P(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$.
- Ve všech bodech $x \in \langle a,b\rangle$ ve kterých je funkce f spojitá je
  $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)dt = f(x).$

IV.7. Riemanův integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b \rangle$.

Pro každé $x \in \langle a,b \rangle$ můžeme definovat funkci $P(x) = \int_a^x f(t)dt$

Platí:

- Funkce $P(x)$ je spojitá v $\langle a,b \rangle$.
- Ve všech bodech $x \in \langle a,b \rangle$ ve kterých je funkce f spojitá je $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)dt = f(x).$
- Je-li $f(x)$ spojitá v intervalu I, potom funkce $P(x)$ je její primitivní funkcí v I.

IV.7. Riemanův integrál jako funkce horní meze

Předpokládejme, že funkce f je *integrovatelná* na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ můžeme definovat funkci $P(x) = \int_a^x f(t)dt$

Platí:

- Funkce $P(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$.
- Ve všech bodech $x \in \langle a,b\rangle$ ve kterých je funkce f spojitá je
$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)dt = f(x).$
- Je-li $f(x)$ spojitá v intervalu I, potom funkce $P(x)$ je její primitivní funkcí v I.
- Je-li $f(x)$ spojitá, $g(x)$ a $h(x)$ jsou diferencovatelné v intervalu I, potom pro $x \in$ I platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\mathrm{d}t = f\big(h(x)\big).h'(x) - f\big(g(x)\big).g'(x)$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (plošný obsah oblasti ohraničené křivkami): Nechť O je oblast v $\mathbf{R}^2$ ohraničená grafy spojitých funkcí f a g nad intervalem $\langle a,b\rangle$: $O=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2 : g(x)\le y\le f(x),\ x\in\langle a,b\rangle\}$. Potom plošný obsah této oblasti je dán vztahem

$$P(O) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (plošný obsah oblasti ohraničené křivkami): Nechť O je oblast v $\mathbf{R}^2$ ohraničená grafy spojitých funkcí f a g nad intervalem $\langle a,b\rangle$: $O=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2: g(x) \le y \le f(x), x\in\langle a,b\rangle\}$. Potom plošný obsah této oblasti je dán vztahem

$$P(O) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

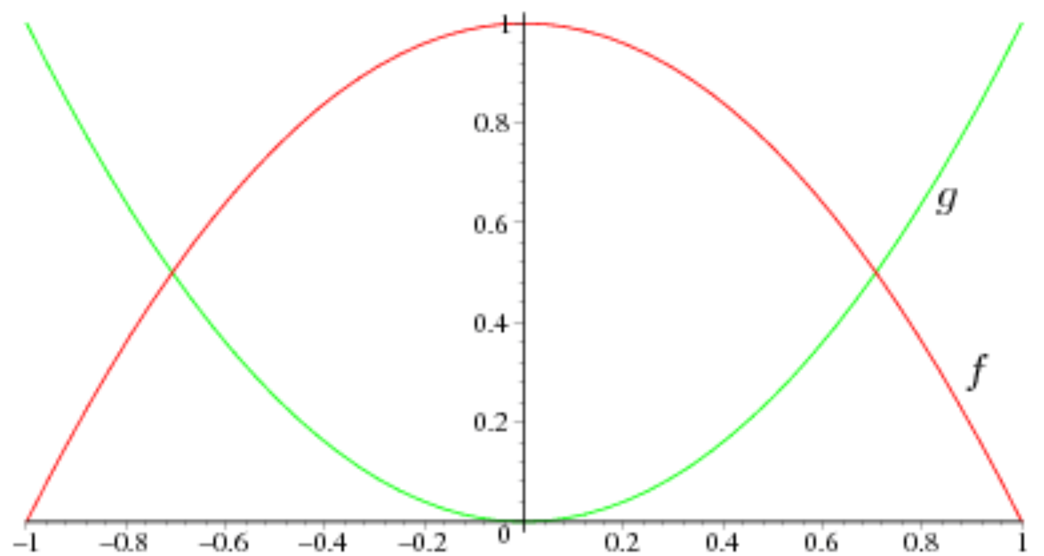
Příklad: Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami f: $y = 1 - x^2$ a g: $y = x^2$.

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (plošný obsah oblasti ohraničené křivkami): Nechť O je oblast v $\mathbf{R}^2$ ohraničená grafy spojitých funkcí f a g nad intervalem $\langle a,b\rangle$: $O=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2: g(x) \le y \le f(x), x\in\langle a,b\rangle\}$. Potom plošný obsah této oblasti je dán vztahem

$$P(O) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Příklad: Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami f: $y = 1 - x^2$ a g: $y = x^2$.

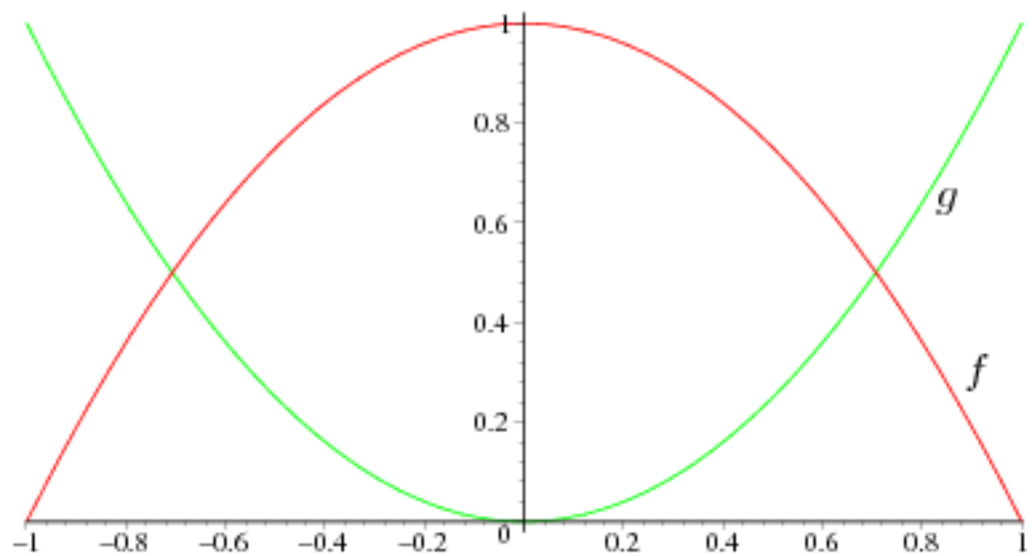


IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (plošný obsah oblasti ohraničené křivkami): Nechť O je oblast v $\mathbf{R}^2$ ohraničená grafy spojitých funkcí f a g nad intervalem $\langle a,b\rangle$: $O=\{[x,y]\in\mathbf{R}^2: g(x)\le y\le f(x), x\in\langle a,b\rangle\}$. Potom plošný obsah této oblasti je dán vztahem

$$P(O) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx$$

Příklad: Vypočtěte obsah oblasti ohraničené křivkami f: $y = 1 - x^2$ a g: $y = x^2$.



$$\left[P = \frac{4}{3\sqrt{2}}\right]$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenní rovinné plochy:

$$m = \rho \int_a^b f(x)dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenní rovinné plochy:

$$m = \rho \int_a^b f(x)dx$$

Statické momenty homogenní rovinné plochy:

$$m_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b f^2(x)dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x f(x)dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenní rovinné plochy:

$$m = \rho \int_a^b f(x)dx$$

Statické momenty homogenní rovinné plochy:

$$m_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b f^2(x)dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x f(x)dx$$

Souřadnice těžiště homogenní rovinné plochy:

$$x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m}.$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenní rovinné plochy:

$$m = \rho \int_a^b f(x)dx$$

Statické momenty homogenní rovinné plochy:

$$m_x = \frac{\rho}{2} \int_a^b f^2(x)dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x f(x)dx$$

Souřadnice těžiště homogenní rovinné plochy:

$$x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m}.$$

Momenty setrvačnosti homogenní rovinné plochy:

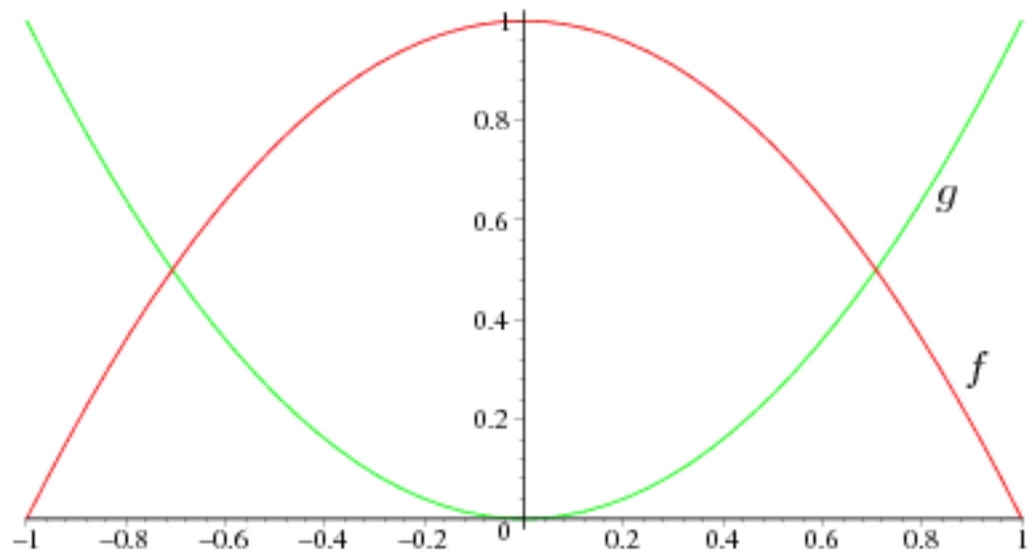
$$J_x = \frac{\rho}{3} \int_a^b f^3(x)dx, \quad J_y = \rho \int_a^b x^2 f(x)dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Příklad: Najděte souřadnice těžiště pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami o délce 1 a 4.

Příklad: Najděte souřadnice těžiště pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami o délce 1 a 4.

Příklad: Najděte souřadnice těžiště homogenní rovinné desky vyříznuté z materiálu s hustotou hmotnosti ρ=1,15 g/cm^2 a ohraničené křivkami f: $y = 1 - x^2$ a g: $y = x^2$.



IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

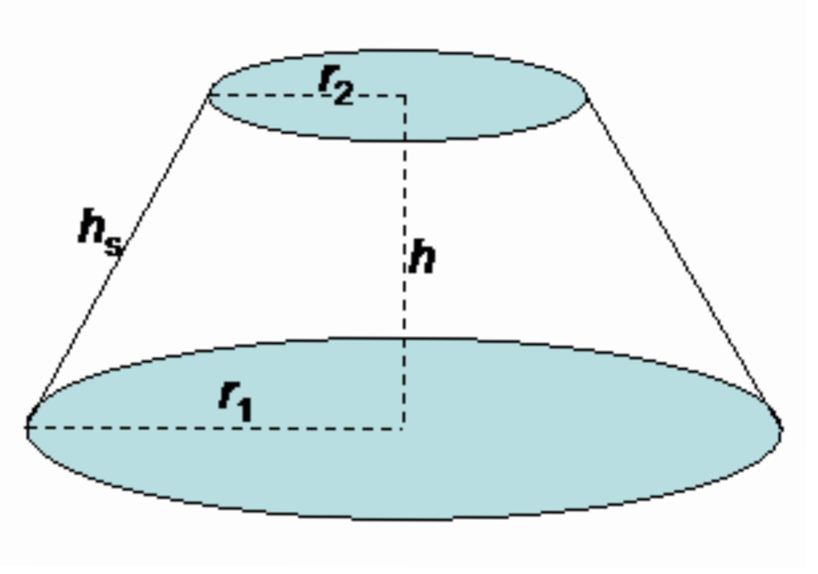
Věta (objem rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b \rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b \rangle$ kolem osy x. Potom objem tělesa T je dán vztahem

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Věta (objem rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b \rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b \rangle$ kolem osy x. Potom objem tělesa T je dán vztahem

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Příklad: Odvoďte vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

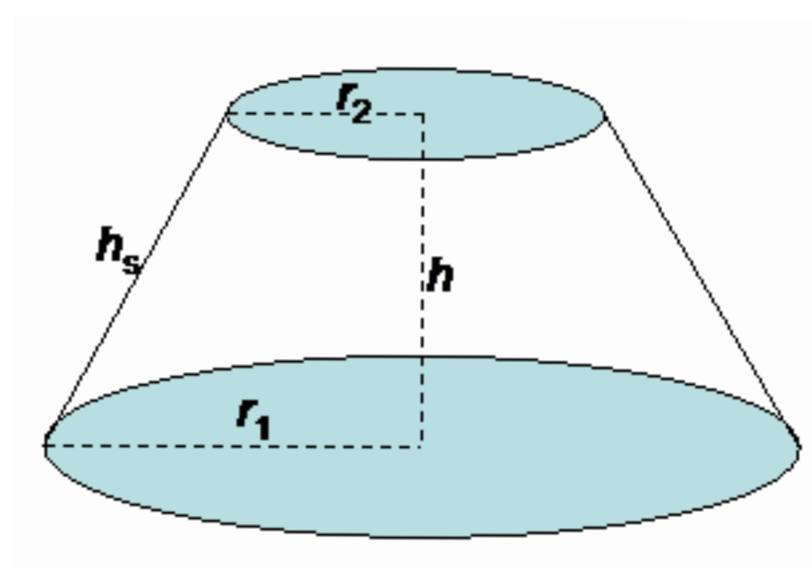


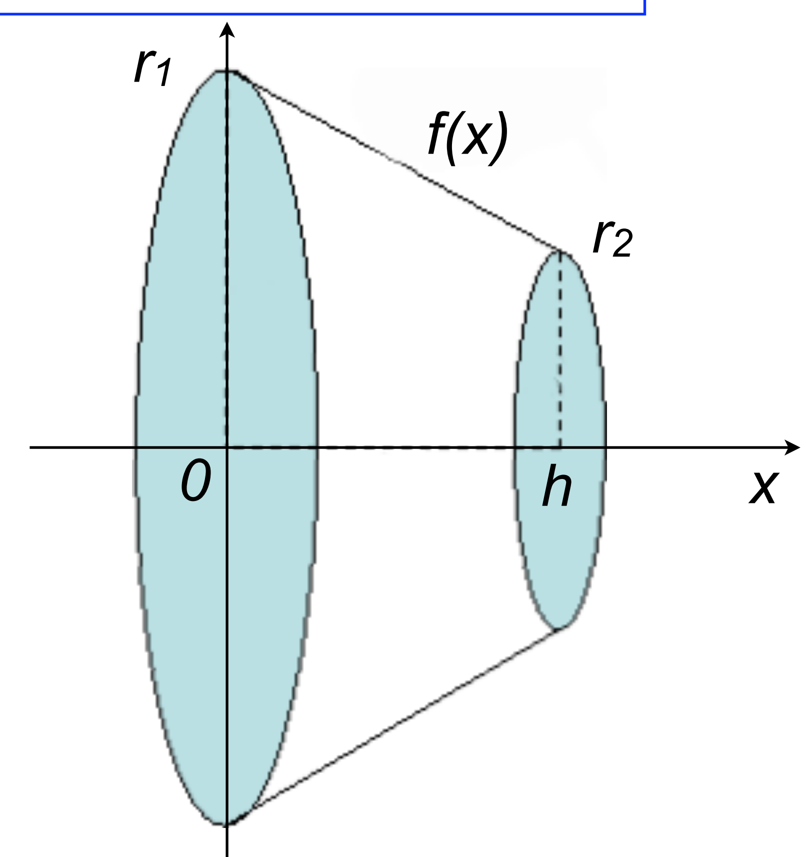
IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (objem rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom objem tělesa T je dán vztahem

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Příklad: Odvoďte vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.





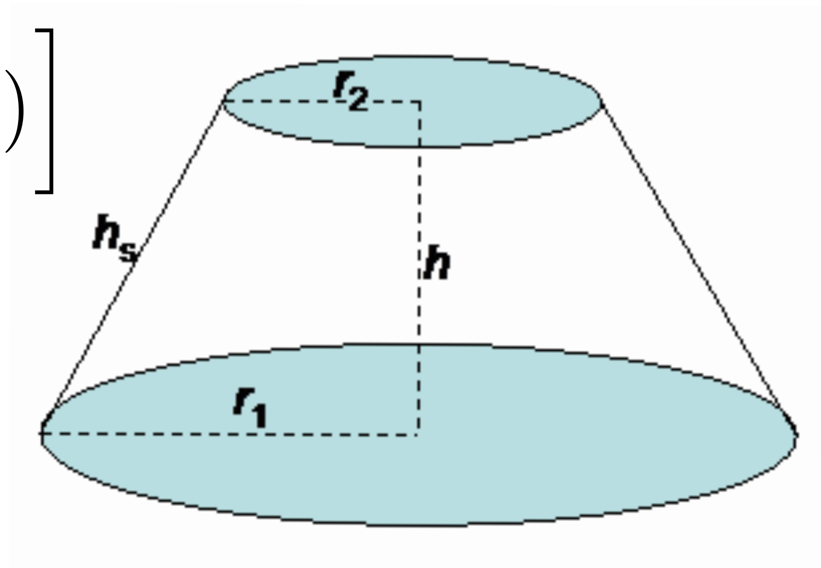
IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

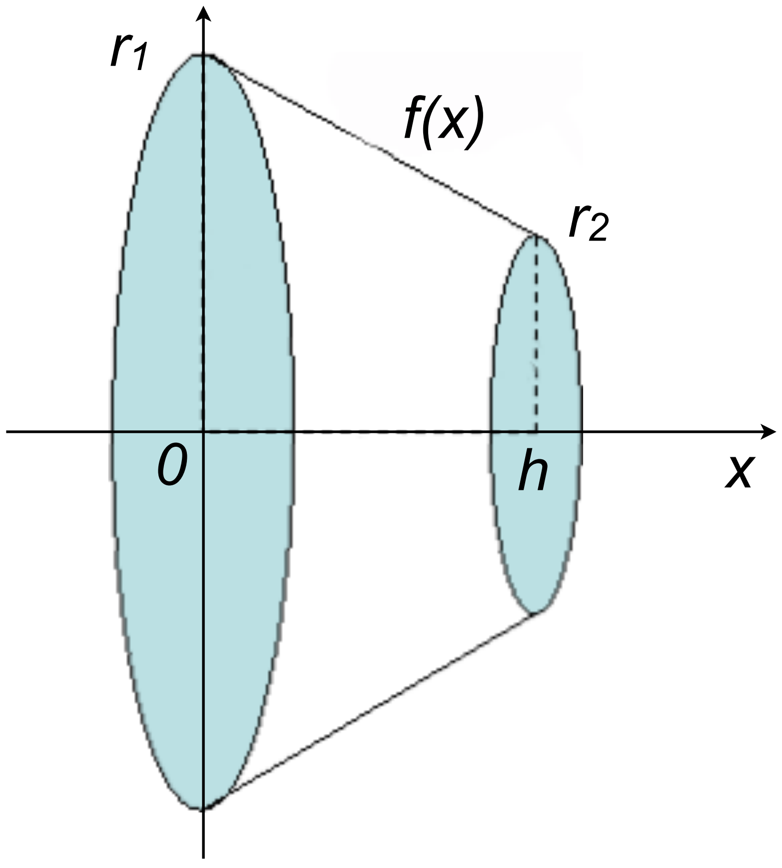
Věta (objem rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom objem tělesa T je dán vztahem

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

Příklad: Odvoďte vzorec pro objem komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

$$\left[V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$





IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenního rotačního tělesa:

$$m = \rho\pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Hmotnost homogenního rotačního tělesa:

$$m = \rho\pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Statické momenty homogenního rotačního tělesa:

$$m_{xx} = m_{xy} = 0, \quad m_{yz} = \rho\pi \int_a^b x f^2(x)dx$$

Hmotnost homogenního rotačního tělesa:

$$m = \rho\pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Statické momenty homogenního rotačního tělesa:

$$m_{xx} = m_{xy} = 0, \quad m_{yz} = \rho\pi \int_a^b x f^2(x)dx$$

Souřadnice těžiště homogenního rotačního tělesa:

$$x_T = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_T = z_T = 0.$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Hmotnost homogenního rotačního tělesa:

$$m = \rho\pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Statické momenty homogenního rotačního tělesa:

$$m_{xx} = m_{xy} = 0, \quad m_{yz} = \rho\pi \int_a^b x f^2(x)dx$$

Souřadnice těžiště homogenního rotačního tělesa:

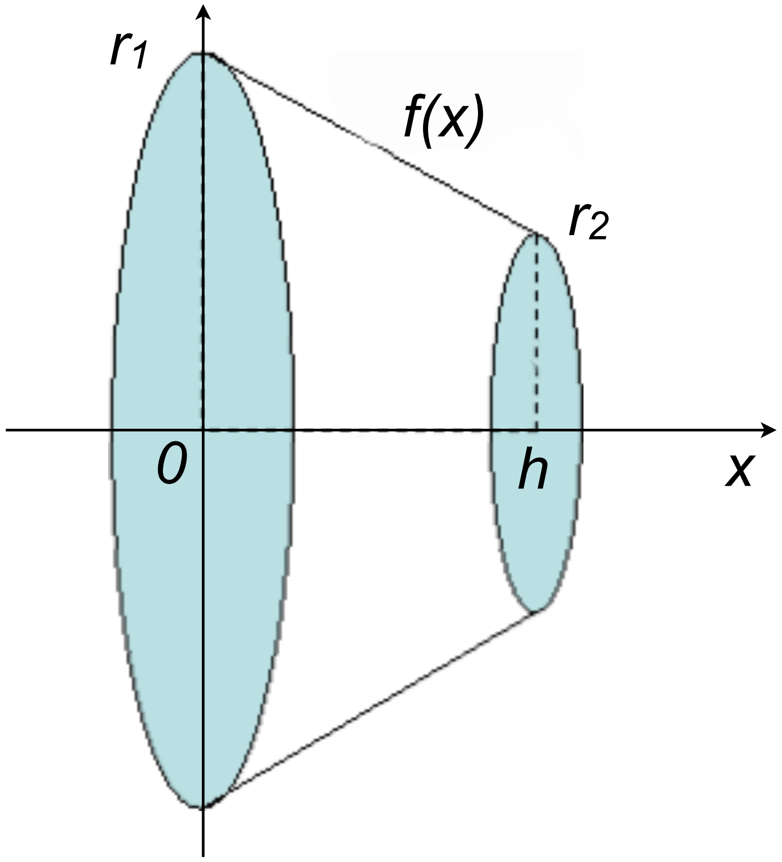
$$x_T = \frac{m_{yz}}{m}, \quad y_T = z_T = 0.$$

Momenty setrvačnosti homogenního rotačního tělesa vzhledem k ose rotace:

$$J_x = \frac{\rho\pi}{2} \int_a^b f^4(x)dx.$$

Příklad (pokračování): Najděte souřadnice těžiště komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

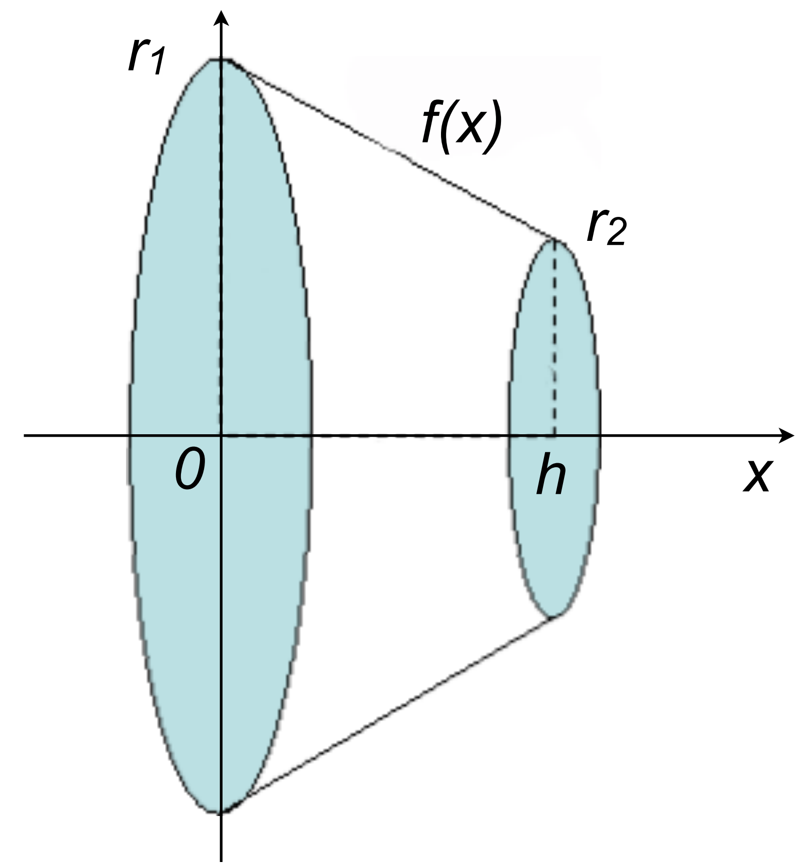
$$\left[V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$



Příklad (pokračování): Najděte souřadnice těžiště komolého rotačního kuželе s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

$$\left[V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$

$$\left[m_x = \frac{\pi h^2}{12}\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)\right]$$

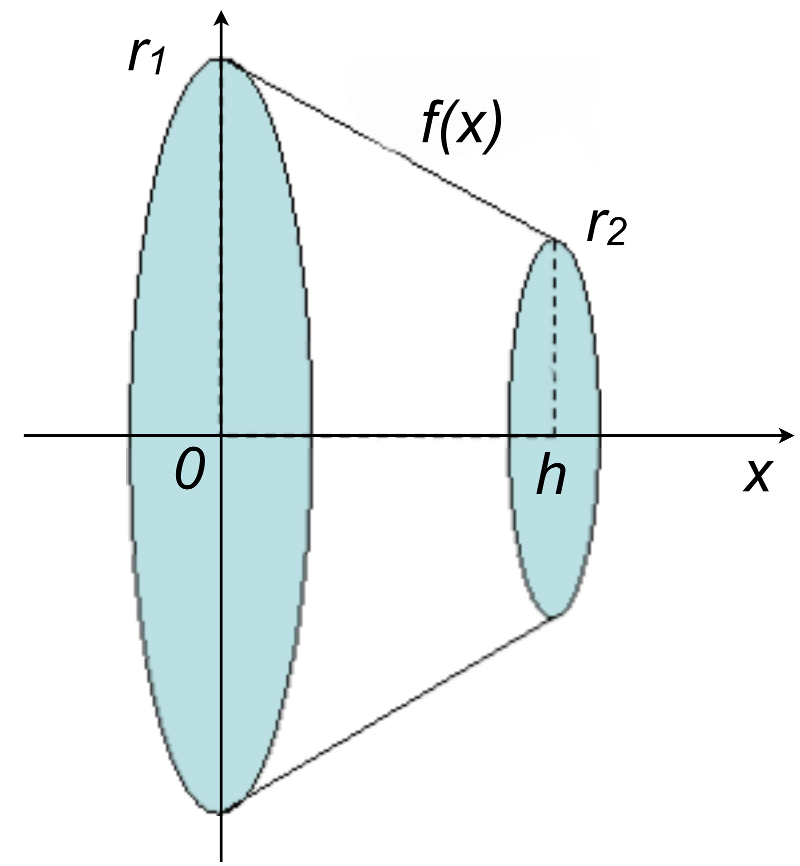


Příklad (pokračování): Najděte souřadnice těžiště komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

$$\left[V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$

$$\left[m_x = \frac{\pi h^2}{12}\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)\right]$$

$$\left[x_T = \frac{h}{4}\frac{(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2)}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}, \quad y_T = z_T = 0\right]$$



IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (délka části grafu funkce): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Délka grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ je rovna

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Věta (délka části grafu funkce): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Délka grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ je rovna

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Hmotnost homogenní rovinné křivky:

$$m = \rho \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (délka části grafu funkce): Nechť funkce *f* je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Délka grafu funkce *f* nad intervalem $\langle a,b\rangle$ je rovna

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Hmotnost homogenní rovinné křivky:

$$m = \rho \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Statické momenty homogenní rovinné křivky:

$$m_x = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (délka části grafu funkce): Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$. Délka grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ je rovna

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Hmotnost homogenní rovinné křivky:

$$m = \rho \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

Statické momenty homogenní rovinné křivky:

$$m_x = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx, \quad m_y = \rho \int_a^b x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

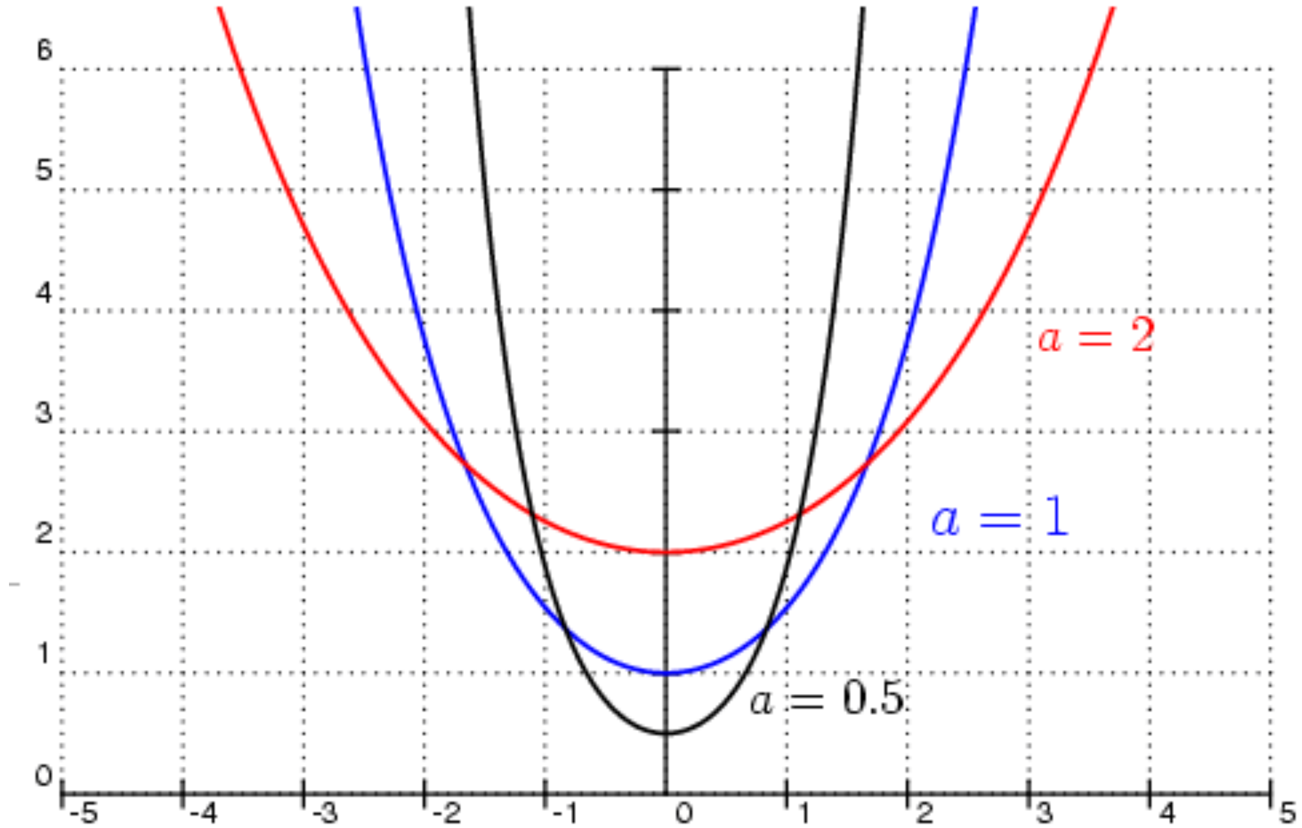
Souřadnice těžiště homogenní rovinné křivky:

$$x_T = \frac{m_y}{m}, \quad y_T = \frac{m_x}{m}.$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Příklad: Řetězovka je křivka definovaná grafem funkce

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$



$$a \cosh \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

Spočtěte délku řetězovky pro $a = 1$ a $x \in \langle -2, 2 \rangle$.

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (povrch pláště rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom povrch pláště rotačního tělesa T je dán vztahem

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

IV.8. Aplikace Riemanova integrálu

Věta (povrch pláště rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom povrch pláště rotačního tělesa T je dán vztahem

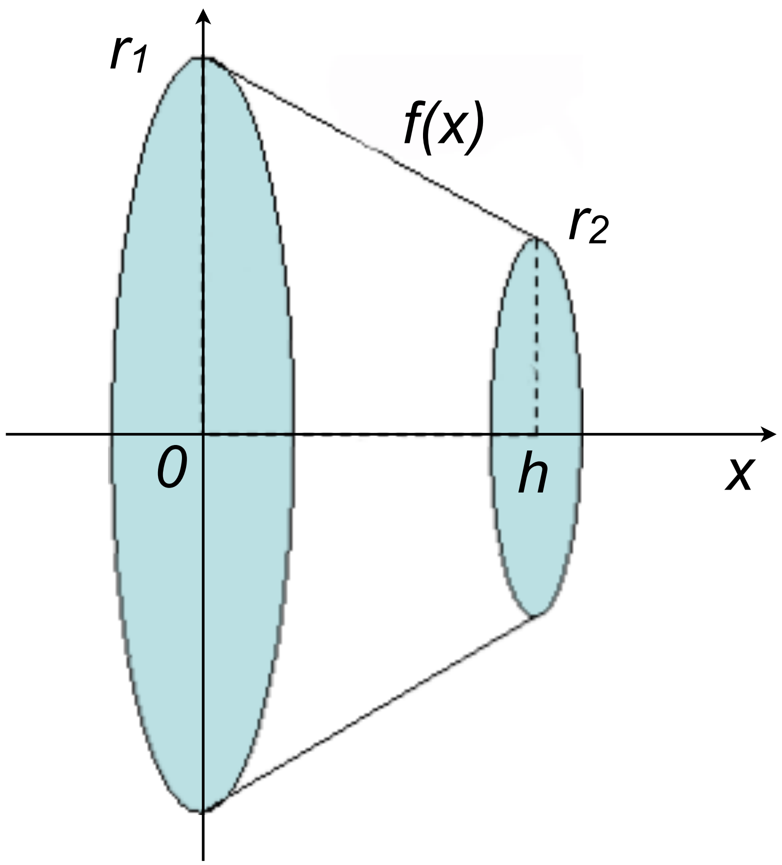
$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}dx$$

Příklad (pokračování): Odvoďte vzorec pro povrch pláště komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

$$\left[V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$

$$\left[m_x = \frac{\pi h^2}{12}\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)\right]$$

$$\left[x_T = \frac{h}{4}\frac{\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)}{\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}, \quad y_T = z_T = 0\right]$$



Věta (povrch pláště rotačního tělesa): Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Uvažujme těleso T v $\mathbf{R}^3$, které vznikne rotací části grafu funkce f nad intervalem $\langle a,b\rangle$ kolem osy x. Potom povrch pláště rotačního tělesa T je dán vztahem

$$S(T) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

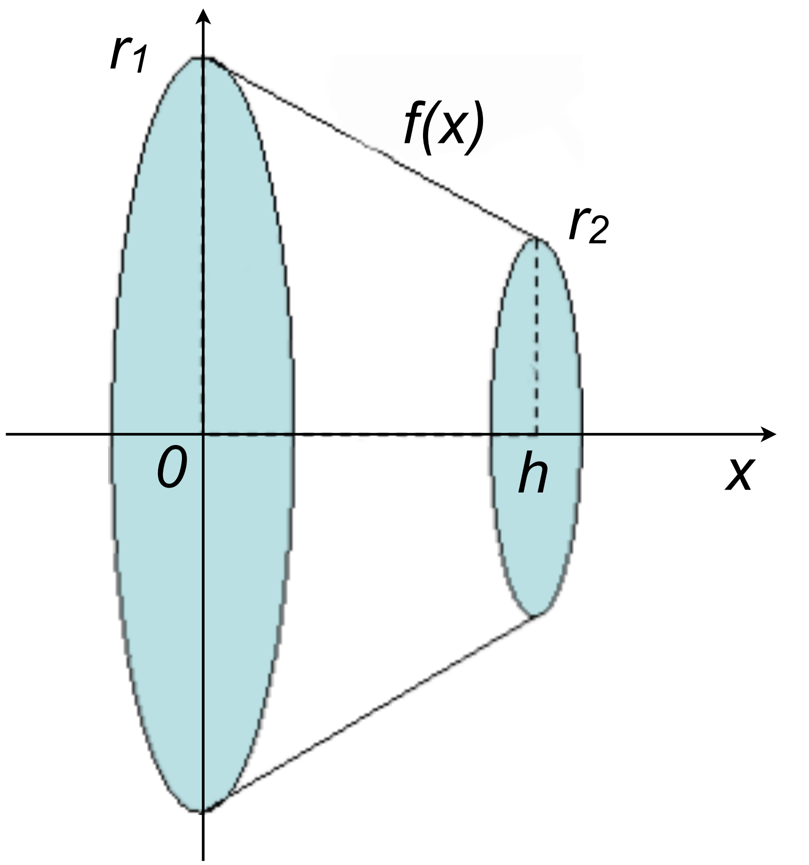
Příklad (pokračování): Odvoďte vzorec pro povrch pláště komolého rotačního kužele s poloměry podstav r_1, r_2 a výškou h.

$$\left[V = \frac{\pi h}{3}\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)\right]$$

$$\left[m_x = \frac{\pi h^2}{12}\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)\right]$$

$$\left[x_T = \frac{h}{4}\frac{\left(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2\right)}{\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)}, \quad y_T = z_T = 0\right]$$

$$\left[S = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)}\right]$$



IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Předpoklady pro existenci Riemanova integrálu dle definice:

(i) interval $\langle a,b \rangle$ je omezený,

(ii) funkce f je v intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a omezená.

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Předpoklady pro existenci Riemanova integrálu dle definice:
(i) interval $\langle a,b \rangle$ je omezený,
(ii) funkce f je v intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a omezená.

1) Funkce f je v omezeném intervalu $\langle a,b \rangle$ nespojitá, ale omezená:
Je-li funkce f v intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá "po částech", potom existuje dělení intervalu $\langle a,b \rangle$ $\{c_0, c_1, \ldots, c_k : a = c_0 < c_2 < \ldots < c_k = b\}$ takové, že funkce f je v každém intervalu $\langle c_{j-1}, c_j \rangle$, $j = 1, \ldots, k$ spojitá. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx$$

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Předpoklady pro existenci Riemanova integrálu dle definice:
(i) interval $\langle a,b\rangle$ je omezený,
(ii) funkce f je v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá a omezená.

1) Funkce f je v omezeném intervalu $\langle a,b\rangle$ nespojitá, ale omezená:
Je-li funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$ spojitá "po částech", potom existuje dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ $\{c_0, c_1, \ldots, c_k : a = c_0 < c_2 < \ldots < c_k = b\}$ takové, že funkce f je v každém intervalu $\langle c_{j-1}, c_j\rangle$, $j = 1,\ldots, k$ spojitá. Potom

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)dx$$

2) Funkce f je v omezeném intervalu (a,b) spojitá, ale neomezená:
V takovém případě je funkce f v každém intervalu $\langle u,v\rangle$, $a < u < v < b$, integrovatelná a položíme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a+}\left(\lim_{v\to b-}\int_u^v f(x)dx\right) = \lim_{v\to b-} F(v) - \lim_{u\to a+} F(u)$$

pokud tyto limity existují a výraz na pravé straně má smysl.

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Předpoklady pro existenci Riemanova integrálu dle definice:
(i) interval $\langle a,b \rangle$ je omezený,
(ii) funkce f je v intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a omezená.

3) Funkce f je spojitá v neomezeném intervalu (a,b):
V takovém případě je funkce f v každém intervalu $\langle u,v \rangle$, $a < u < v < b$, integrovatelná a položíme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u \to a+} \left(\lim_{v \to b-} \int_u^v f(x)dx \right) = \lim_{v \to b-} F(v) - \lim_{u \to a+} F(u)$$

pokud tyto limity existují a výraz na pravé straně má smysl.

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Předpoklady pro existenci Riemanova integrálu dle definice:
(i) interval $\langle a,b \rangle$ je omezený,
(ii) funkce f je v intervalu $\langle a,b \rangle$ spojitá a omezená.

3) Funkce *f* je spojitá v neomezeném intervalu (a,b):
V takovém případě je funkce f v každém intervalu $\langle u,v \rangle$, $a < u < v < b$, integrovatelná a položíme

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{u\to a+} \left(\lim_{v\to b-} \int_u^v f(x)dx \right) = \lim_{v\to b-} F(v) - \lim_{u\to a+} F(u)$$

pokud tyto limity existují a výraz na pravé straně má smysl.

Poznámka:
a) Pokud je hodnota funkce f(x) nevlastní v některém z krajních bodů omezeného intervalu $\langle a,b \rangle$, říkáme, že se jedná o *nevlastní integrál vlivem funkce*.
b) Pokud je některý z krajních bodů intervalu $\langle a,b \rangle$ nevlastní, říkáme, že se jedná o *nevlastní integrál vlivem meze*.

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

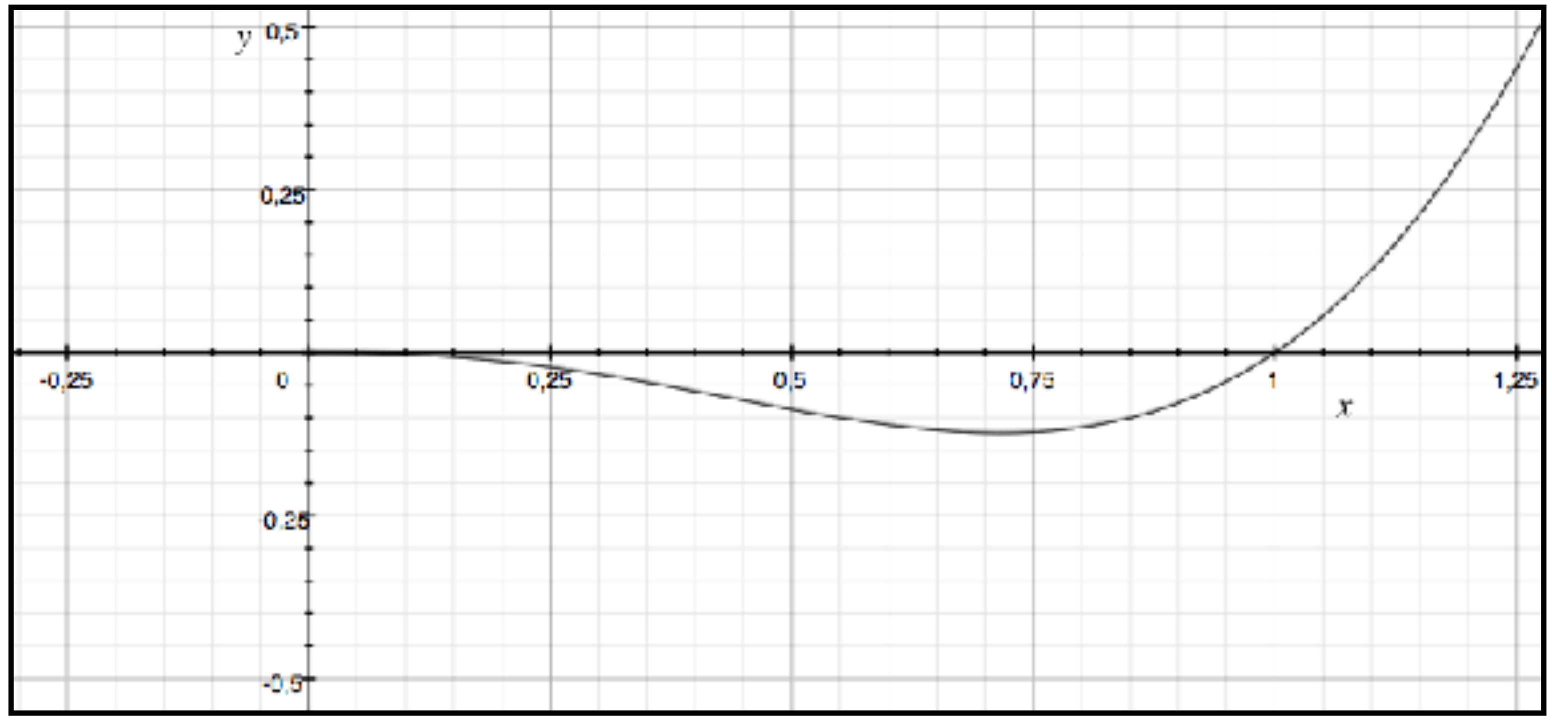
Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx,$$

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx,$$



IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx,$$

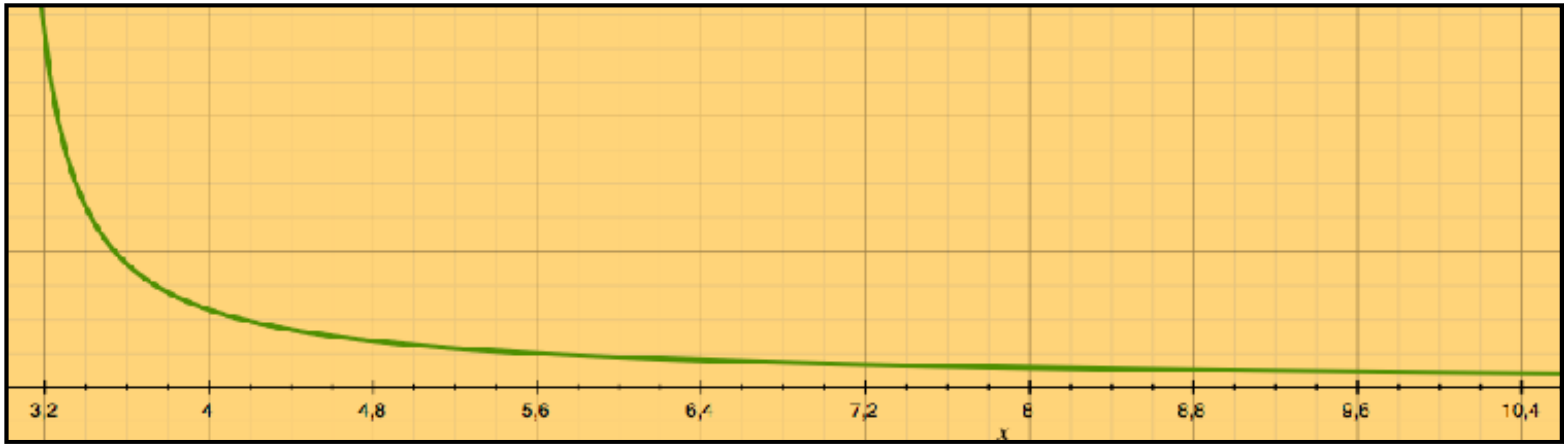
$$\int_4^\infty \frac{x}{x^2-9} dx,$$

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx,$$

$$\int_4^\infty \frac{x}{x^2-9} dx,$$



IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx,$$

$$\int_4^\infty \frac{x}{x^2-9} dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+x^2} dx.$$

IV. 9. Porušení předpokladů, nevlastní integrál

Příklad: Rozhodněte výpočtem zda konvergují nevlastní integrály

$$\int_0^1 x^3 \ln x \, dx,$$

$$\int_4^\infty \frac{x}{x^2-9} dx,$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4+x^2} dx.$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

Existují integrály, které nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí, nebo jejichž výsledek je velmi komplikovaný.

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

Existují integrály, které nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí, nebo jejichž výsledek je velmi komplikovaný.

Příklady: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx, \quad \int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx, \quad \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}.$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

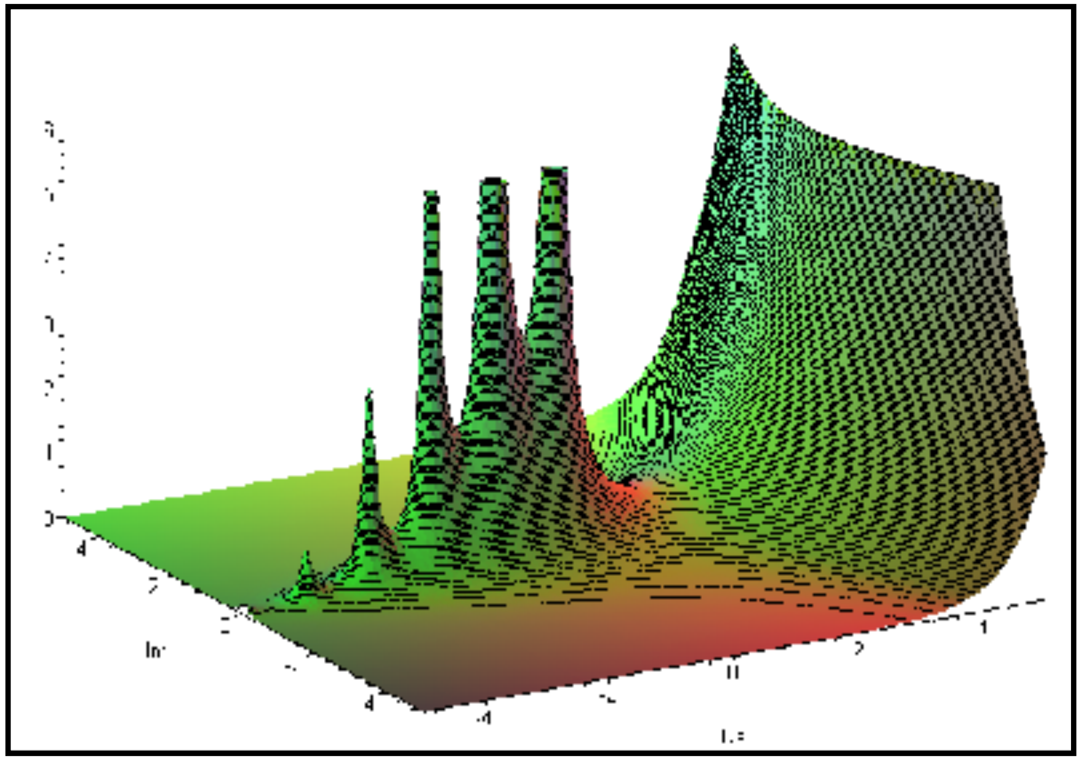
Existují integrály, které nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí, nebo jejichž výsledek je velmi komplikovaný.

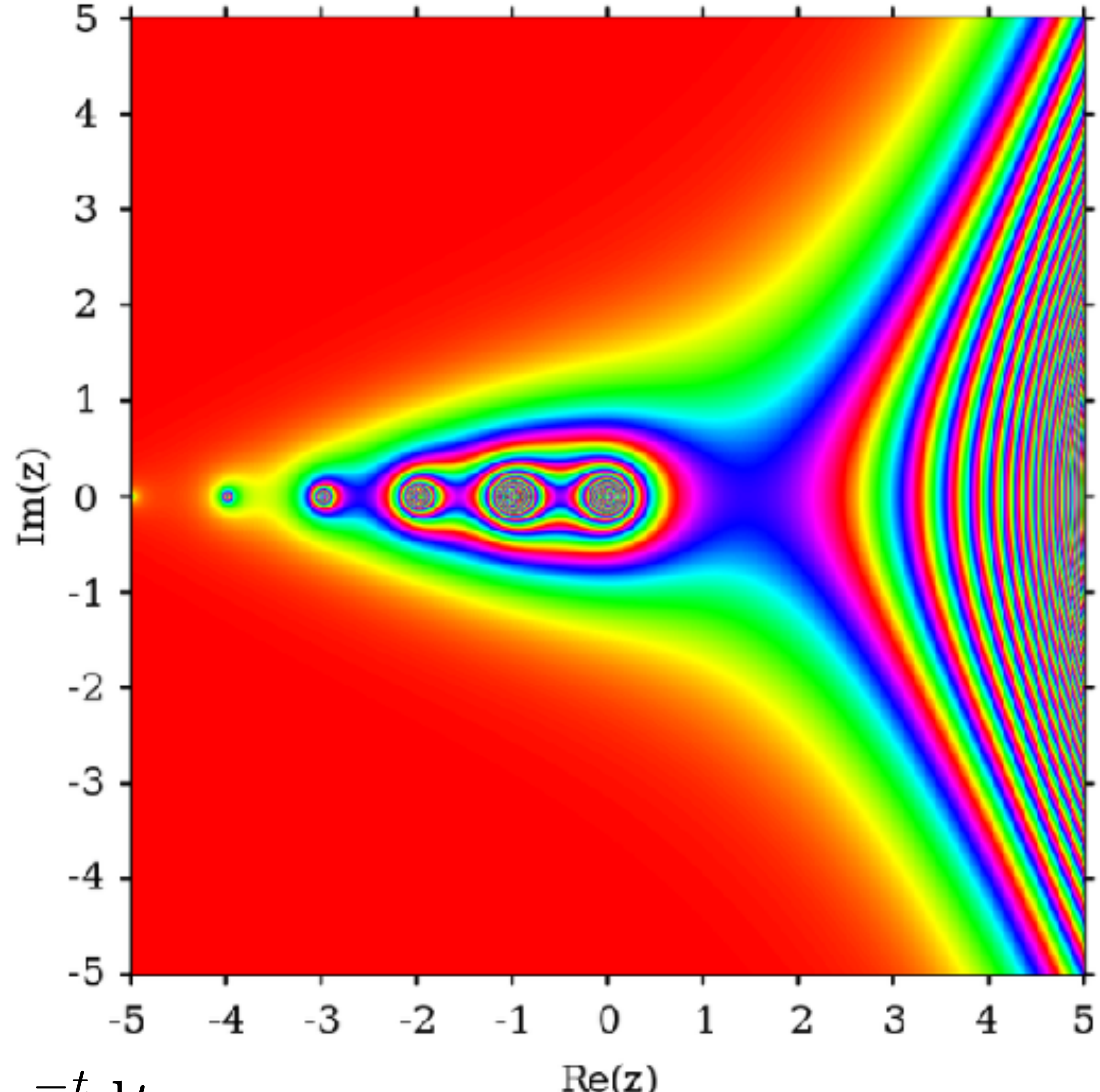
Příklady: $$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \qquad \int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx, \qquad \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}.$$

Přibližný výpočet lze provést:

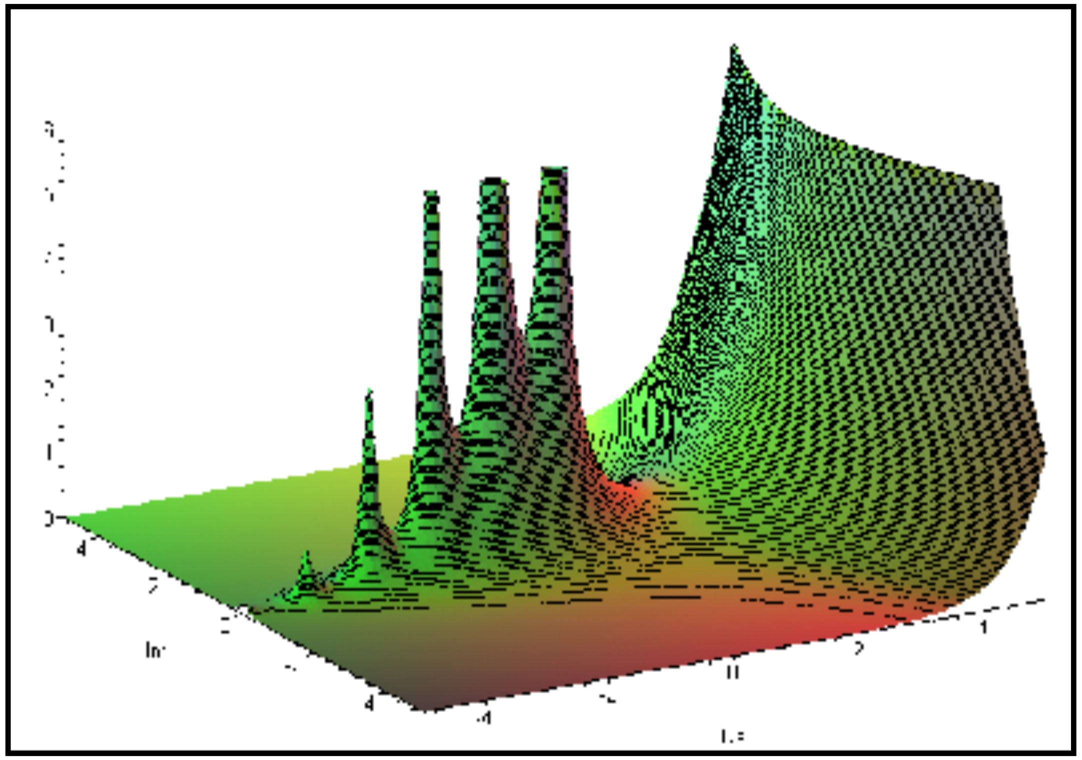
a) rozvojem v Taylorovu řadu a integrací člen po členu,

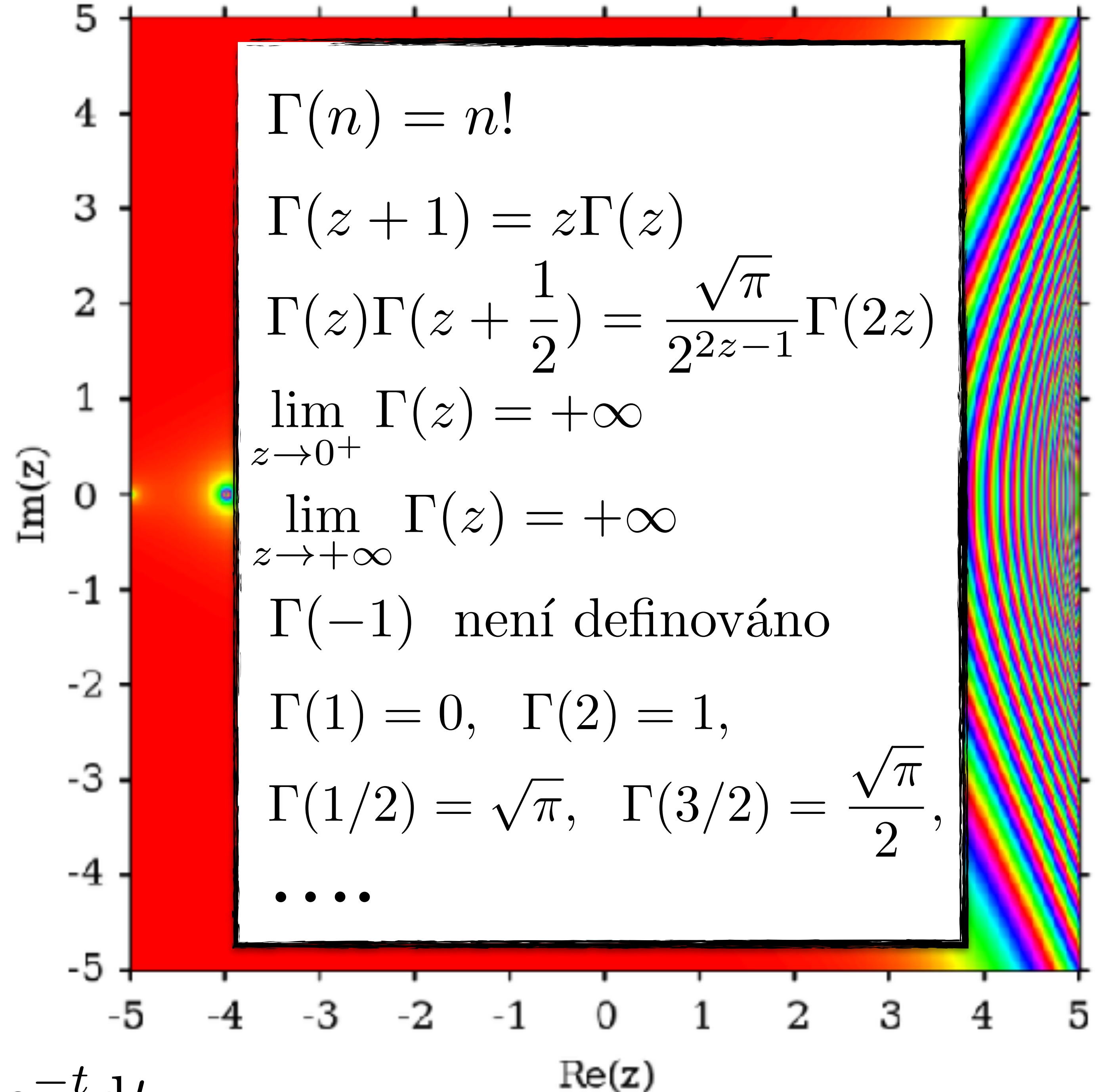
b) numerickou integrací pomocí Lagrangeových interpolačních polynomů.





Gama funkce: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$





$$\Gamma(n) = n!$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z)$$

$$\lim_{z\to 0^+} \Gamma(z) = +\infty$$

$$\lim_{z\to +\infty} \Gamma(z) = +\infty$$

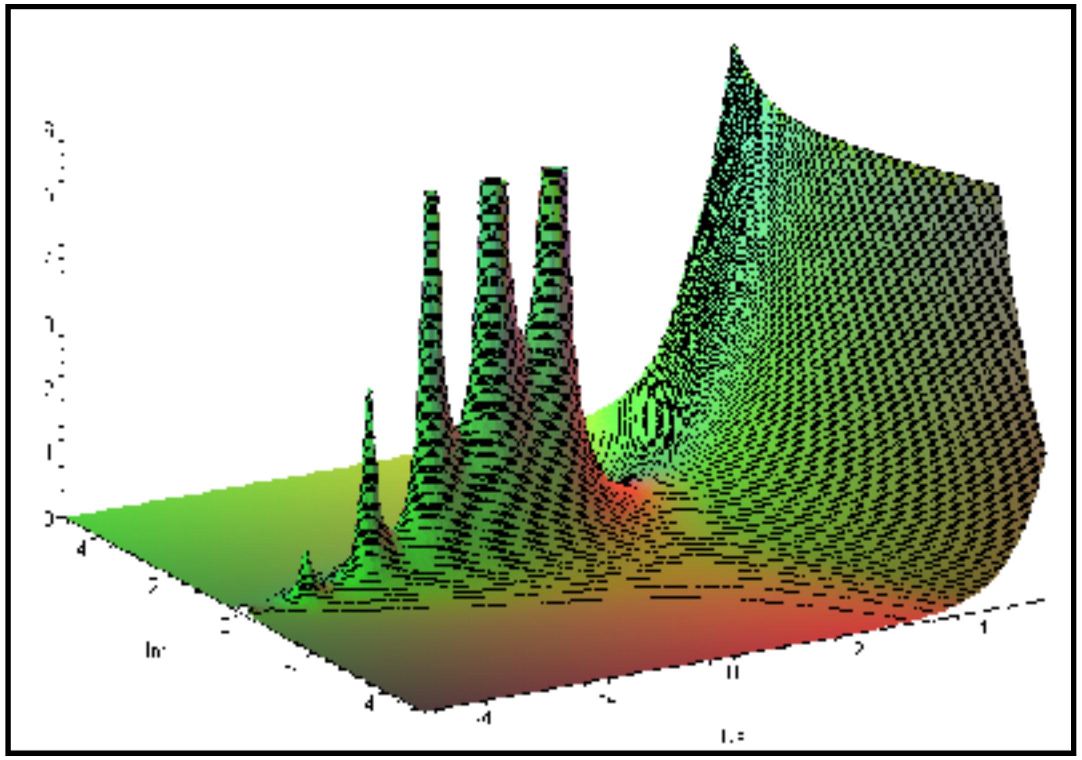
$\Gamma(-1)$ není definováno

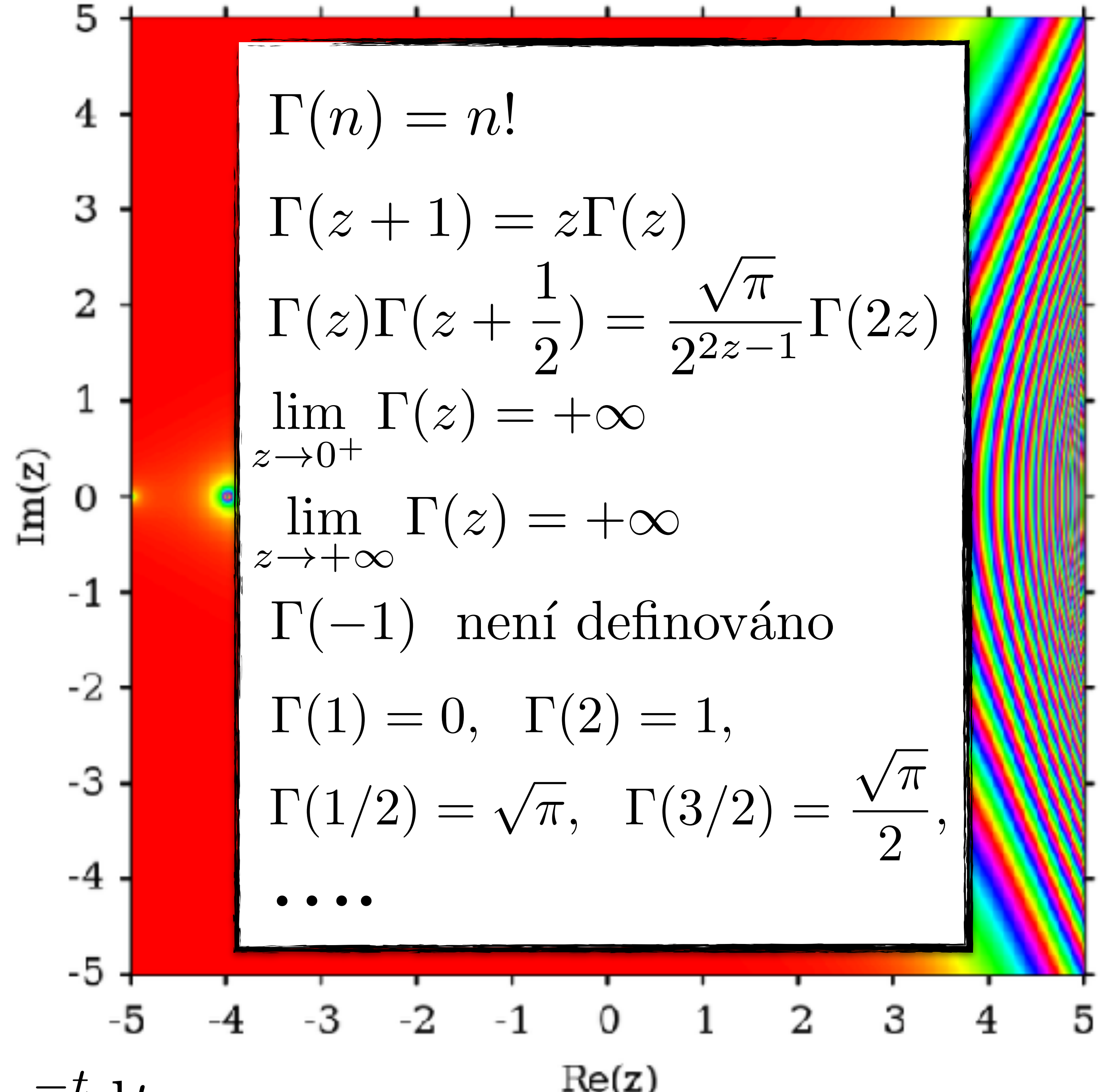
$$\Gamma(1) = 0, \quad \Gamma(2) = 1,$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

....

Gama funkce: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$





$$\Gamma(n) = n!$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z)$$

$$\lim_{z\to 0^+}\Gamma(z) = +\infty$$

$$\lim_{z\to +\infty}\Gamma(z) = +\infty$$

$\Gamma(-1)$ není definováno

$$\Gamma(1) = 0, \quad \Gamma(2) = 1,$$

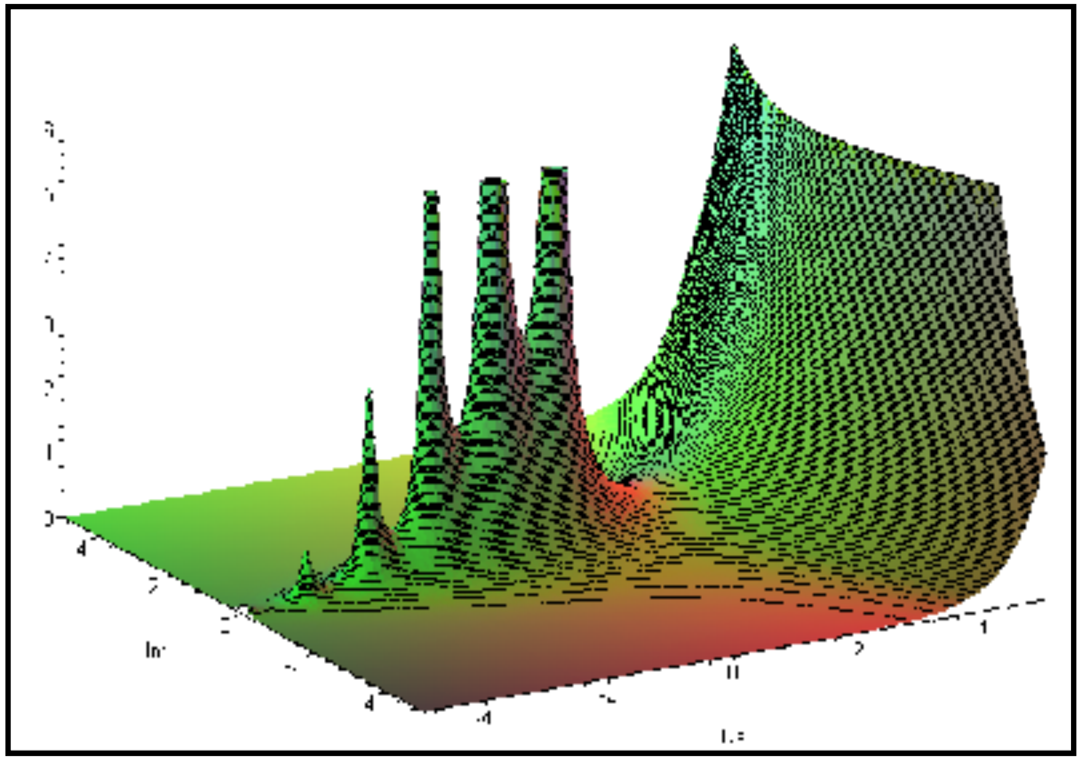
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

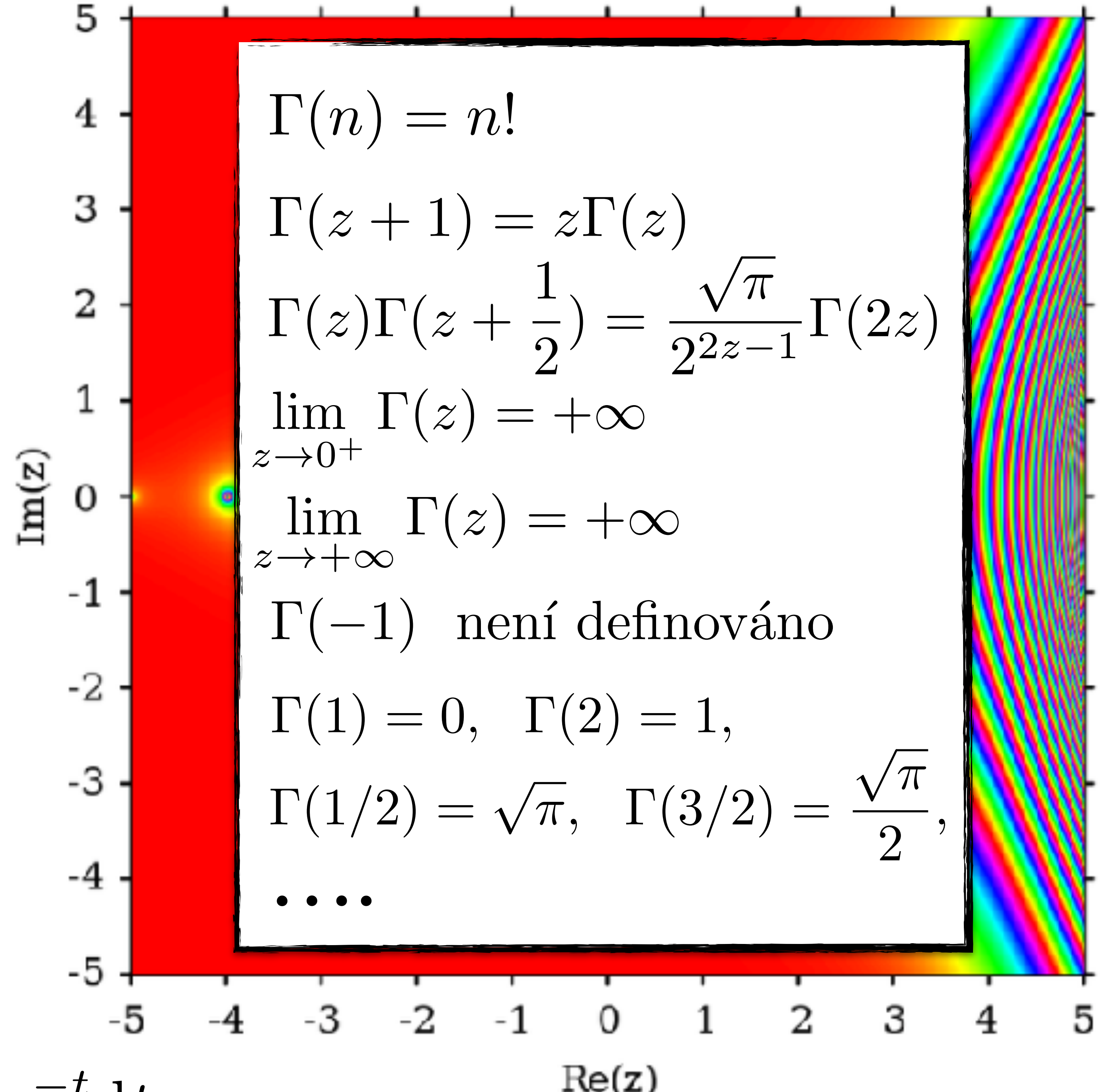
....

Gama funkce: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

Beta funkce:

$$\mathrm{B}(z,q) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t$$





$$\Gamma(n) = n!$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z)$$

$$\lim_{z\to 0^+} \Gamma(z) = +\infty$$

$$\lim_{z\to +\infty} \Gamma(z) = +\infty$$

$\Gamma(-1)$ není definováno

$$\Gamma(1) = 0, \quad \Gamma(2) = 1,$$

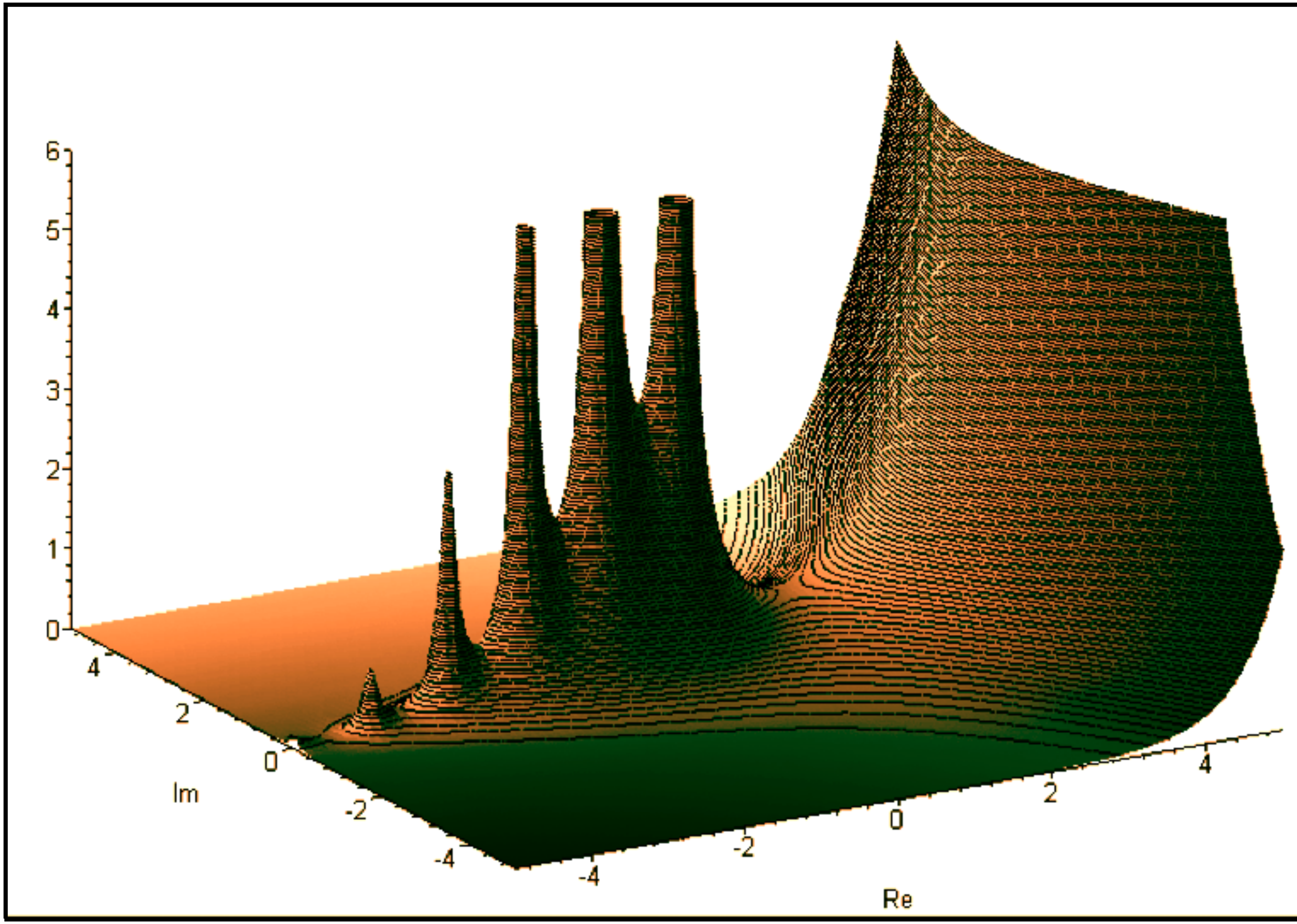
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

....

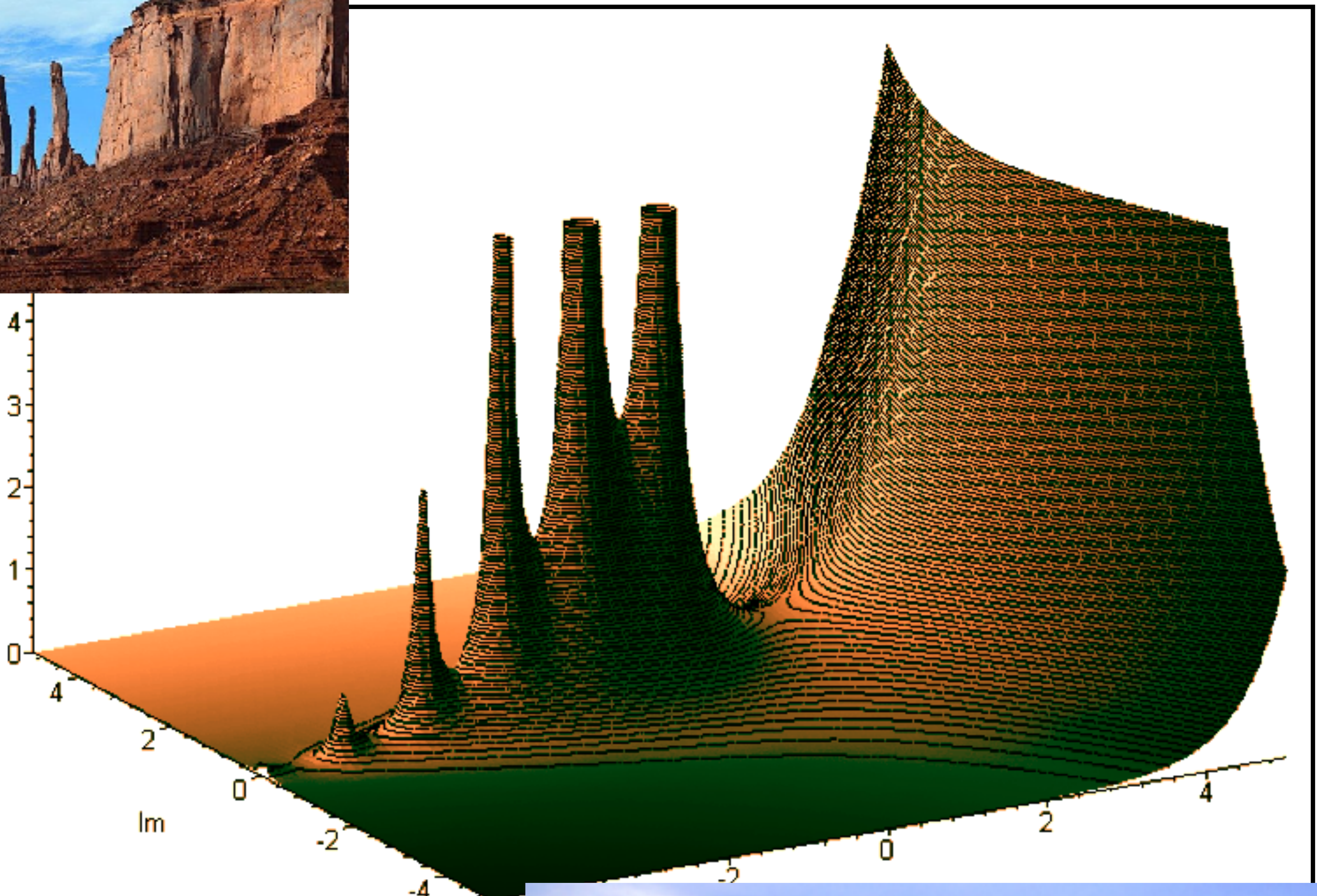
Gama funkce: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$

Beta funkce:

$$\mathrm{B}(z,q) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+q}}\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(z)\Gamma(q)}{\Gamma(z+q)}$$



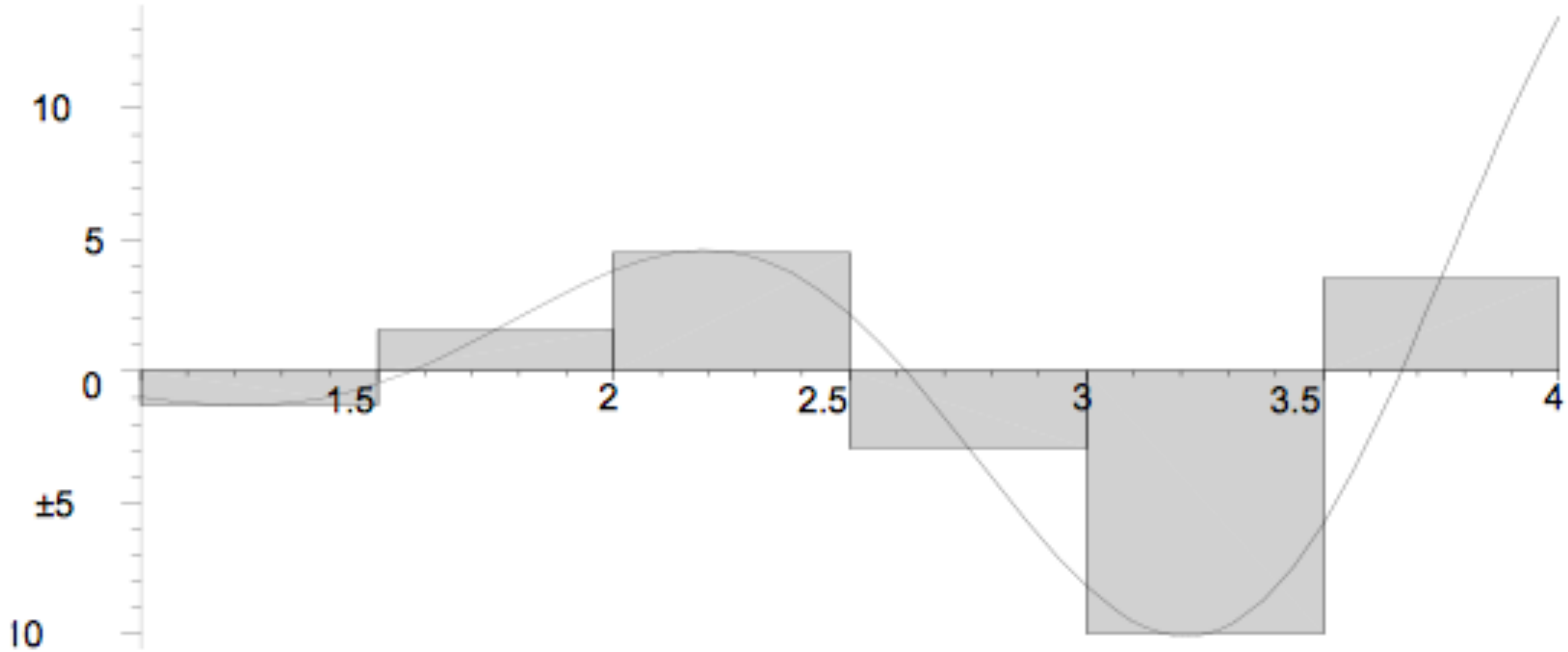
Monument Valley, Navajo, UT



Monument Valley, Navajo, UT

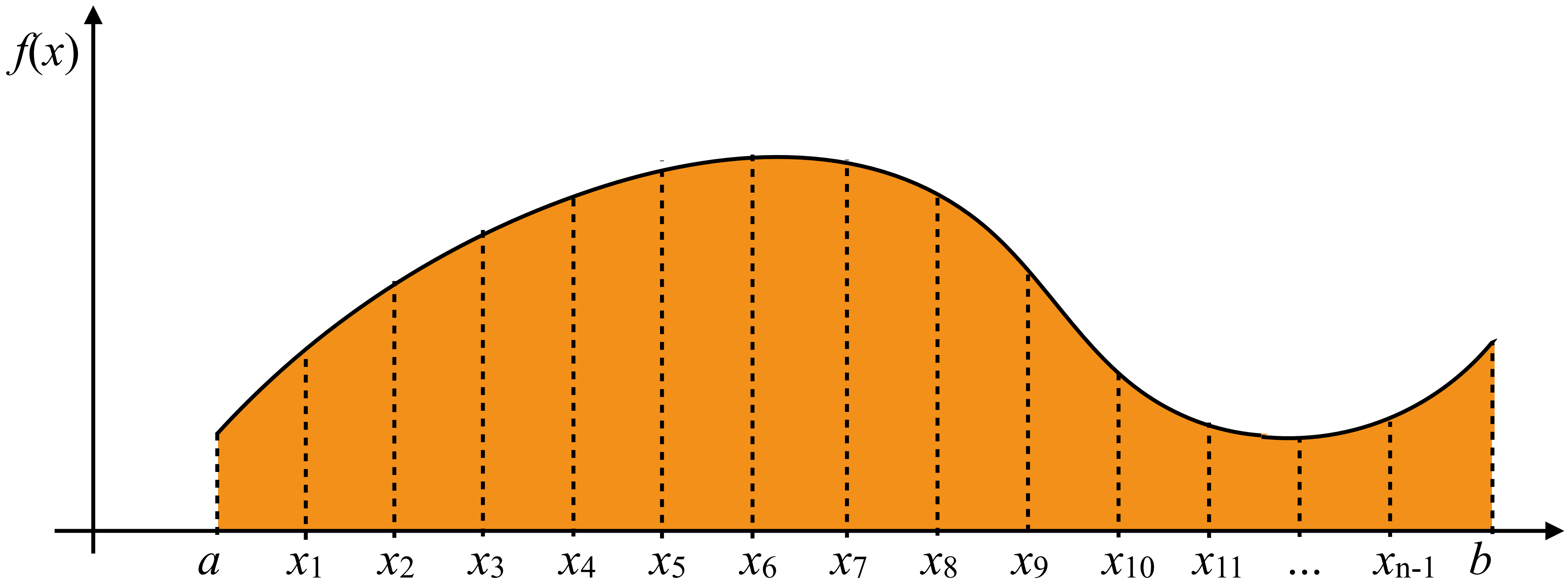
IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda:



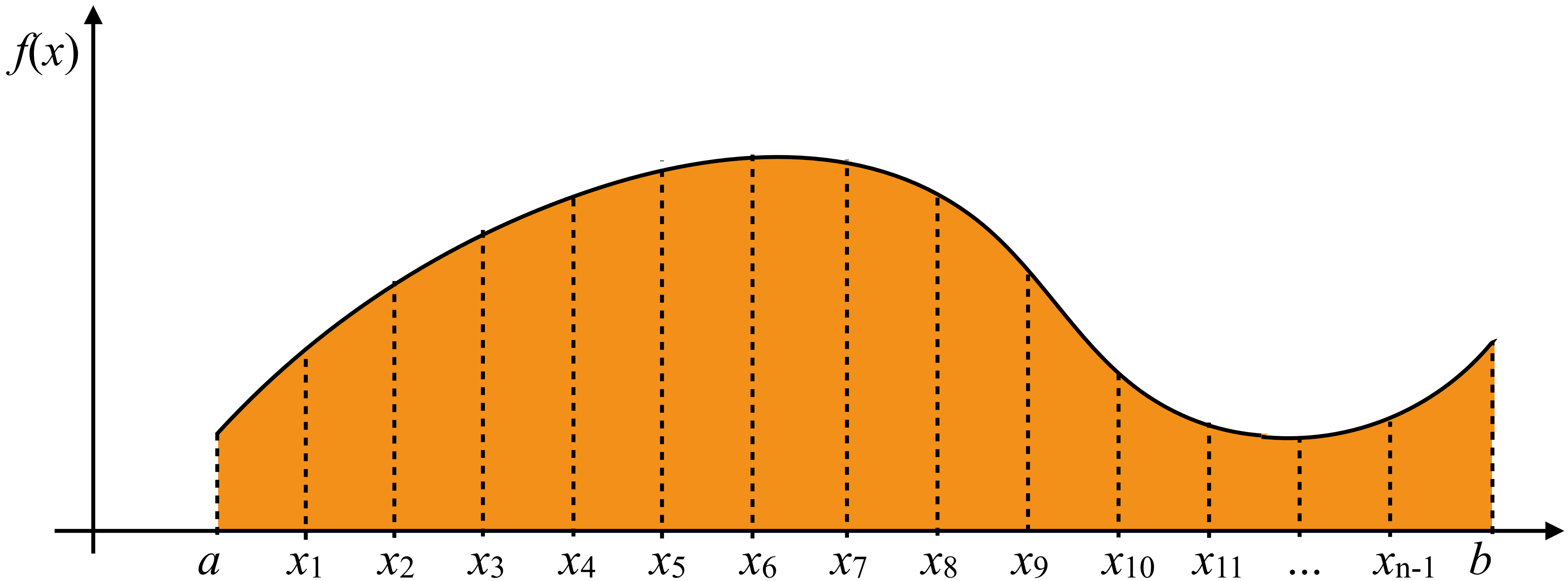
IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) **Obdélníková metoda**:



IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

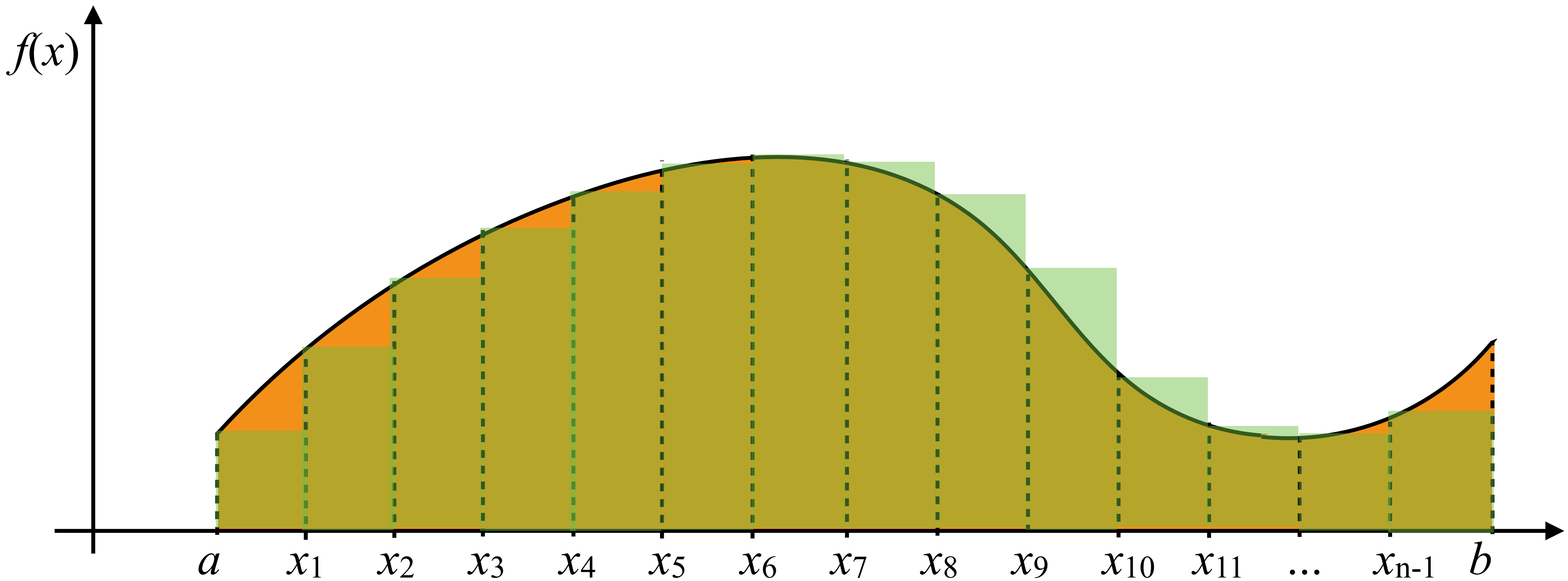
1) Obdélníková metoda:



označme $f(x_i) = y_i$, $h = (x_{i+1} - x_i)$:

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

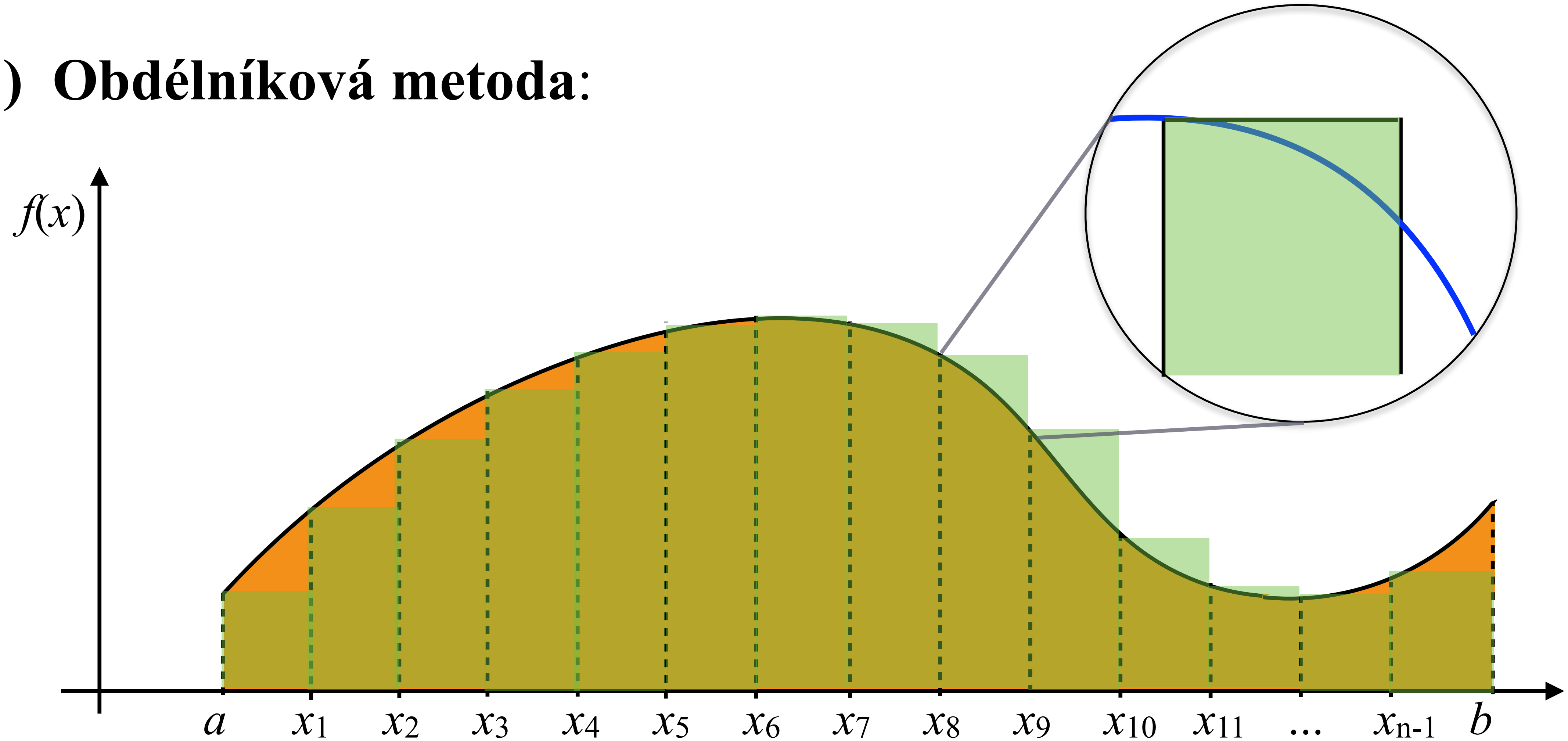
1) **Obdélníková metoda**:



označme $f(x_i) = y_i$, $h = (x_{i+1} - x_i)$:

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

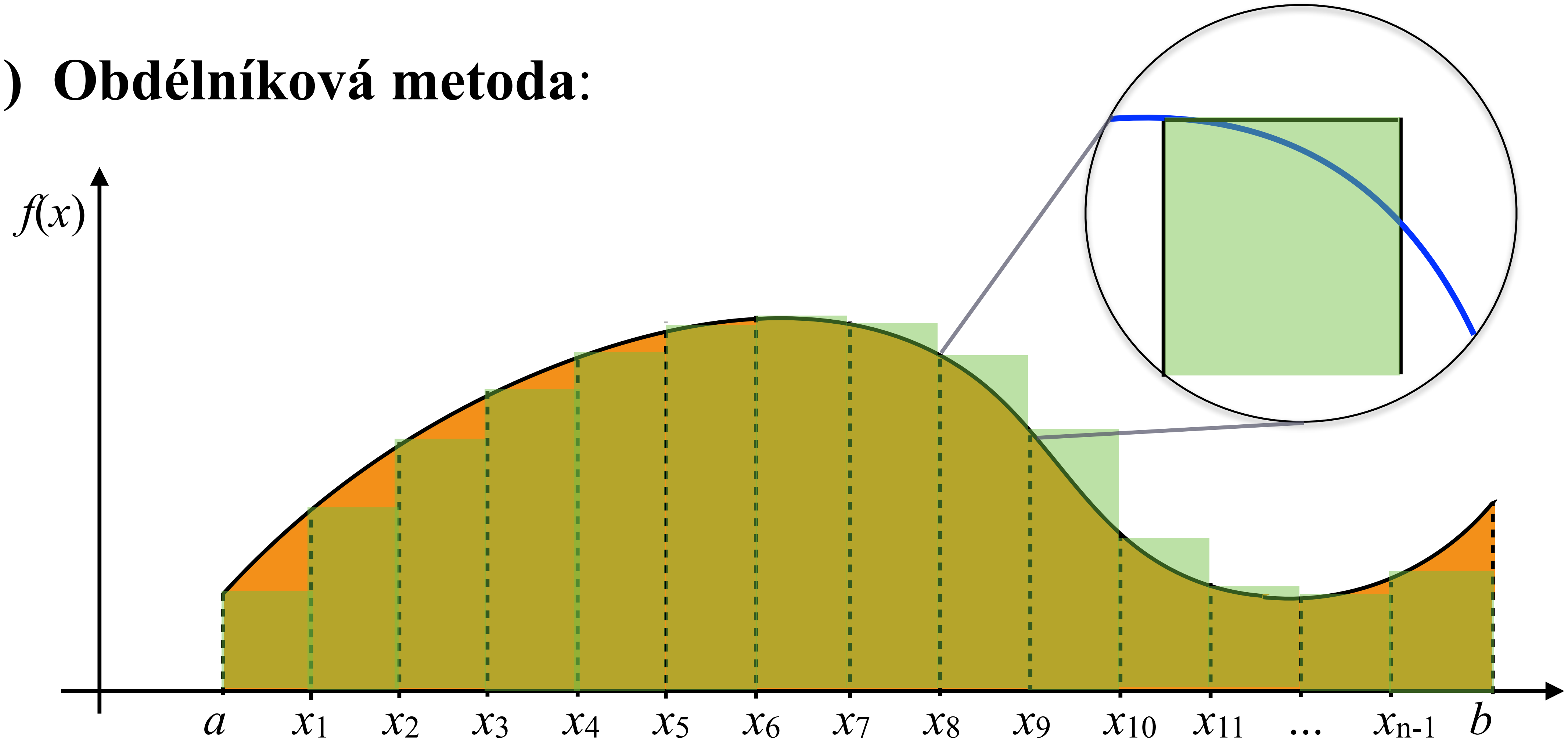
1) Obdélníková metoda:



označme $f(x_i) = y_i$, $h = (x_{i+1} - x_i)$:

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda:

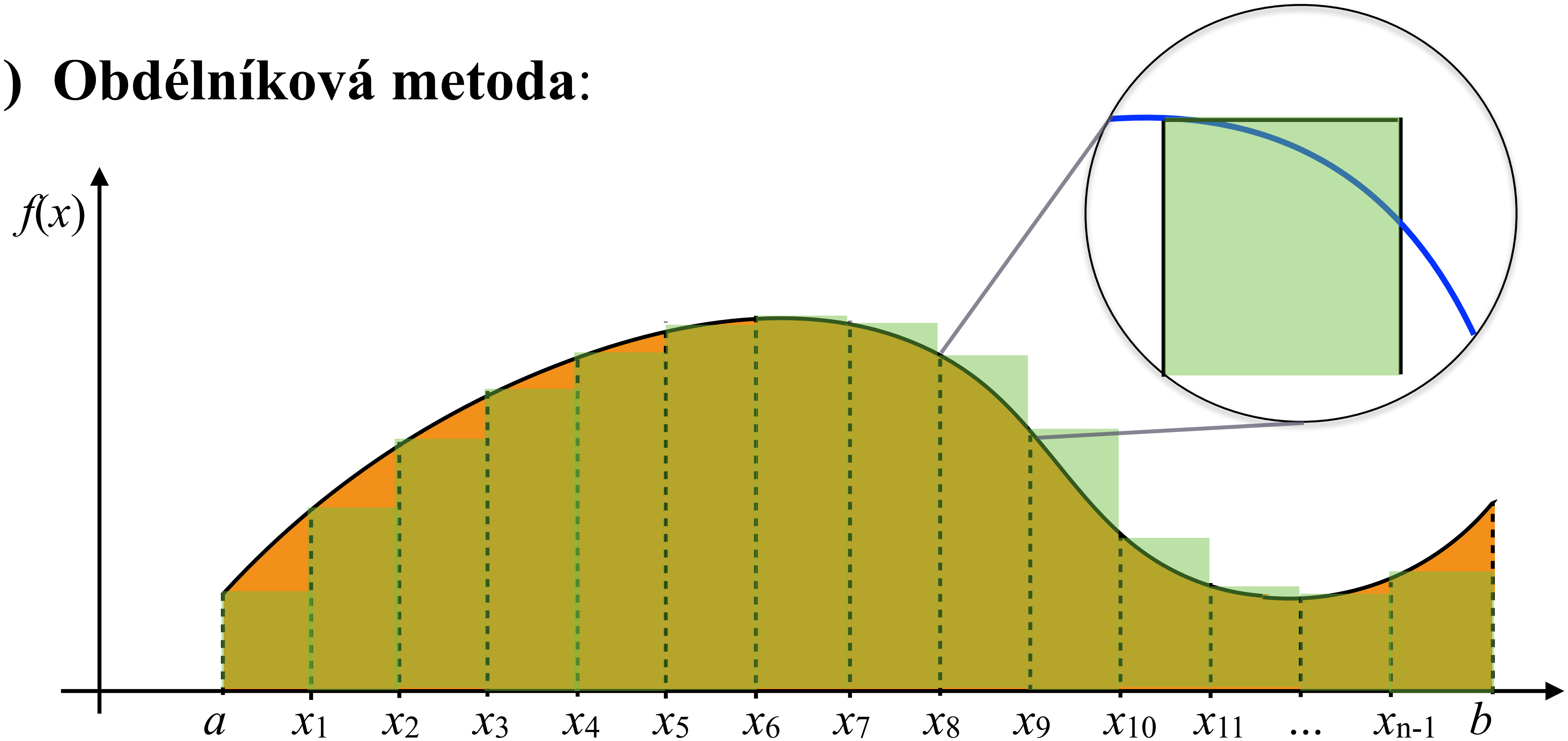


označme $f(x_i) = y_i$, $h = (x_{i+1} - x_i)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} h.y_i = h[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) **Obdélníková metoda**:



označme $f(x_i) = y_i$, $h = (x_{i+1} - x_i)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} h.y_i = h[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$$

Jak je velká chyba této aproximace?

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda: **Jak je velká chyba této aproximace?**

Předpokládejme spojitou derivaci $f(x)$ na = $\langle a,b \rangle$. Potom pro každé x z intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ existuje ξ v (x_i, x) tak, že $f(x) = f(x_i) + f'(\xi).(x_{i+1} - x_i)$.

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda: **Jak je velká chyba této aproximace?**

Předpokládejme spojitou derivaci $f(x)$ na $= \langle a,b \rangle$. Potom pro každé x z intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ existuje ξ v (x_i, x) tak, že $f(x) = f(x_i) + f'(\xi).(x_{i+1} - x_i)$.

Přesná hodnota integrálu funkce f na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ tedy je:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [y_i + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda: **Jak je velká chyba této aproximace?**

Předpokládejme spojitou derivaci $f(x)$ na = $\langle a,b \rangle$. Potom pro každé x z intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ existuje ξ v (x_i, x) tak, že $f(x) = f(x_i) + f'(\xi).(x_{i+1} - x_i)$.

Přesná hodnota integrálu funkce f na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ tedy je:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [y_i + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x$$

$$= y_i(x_{i+1} - x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x = y_i h + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda: **Jak je velká chyba této aproximace?**

Předpokládejme spojitou derivaci $f(x)$ na = $\langle a,b\rangle$. Potom pro každé x z intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ existuje ξ v (x_i, x) tak, že $f(x) = f(x_i) + f'(\xi).(x_{i+1} - x_i)$.

Přesná hodnota integrálu funkce f na intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ tedy je:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [y_i + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x$$

$$= y_i(x_{i+1} - x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x = y_i h + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x$$

Poslední integrál napravo tedy vyjadřuje rozdíl (chybu) mezi obsahem obdélníka $y_i.h$ a hledaného integrálu na intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Dále je

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x\right| \leq M_1 \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{2} M_1 h^2,$$

kde $M_1 = \max_{\langle xi,\, xi+1\rangle} |f'|$.

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda: **Jak je velká chyba této aproximace?**

Předpokládejme spojitou derivaci $f(x)$ na $= \langle a,b \rangle$. Potom pro každé x z intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ existuje ξ v (x_i, x) tak, že $f(x) = f(x_i) + f'(\xi).(x_{i+1} - x_i)$.

Přesná hodnota integrálu funkce f na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ tedy je:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [y_i + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x$$

$$= y_i(x_{i+1} - x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x = y_i h + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x$$

Poslední integrál napravo tedy vyjadřuje rozdíl (chybu) mezi obsahem obdélníka $y_i.h$ a hledaného integrálu na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Dále je

$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x \right| \le M_1 \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\,\mathrm{d}x \right| = \frac{1}{2} M_1 h^2,$$

kde $M_1 = \max_{\langle x_i, x_{i+1} \rangle} |f'|$. Pro celý integrál pak dostáváme

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} y_i h \right| \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_1 h^2 = \frac{b-a}{2} M_1 h$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Obdélníková metoda: **Jak je velká chyba této aproximace?**

Předpokládejme spojitou derivaci $f(x)$ na $= \langle a,b \rangle$. Potom pro každé x z intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ existuje ξ v (x_i, x) tak, že $f(x) = f(x_i) + f'(\xi).(x_{i+1} - x_i)$.

Přesná hodnota integrálu funkce f na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ tedy je:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [y_i + f'(\xi).(x - x_i)]\,\mathrm{d}x$$

$$= y_i(x_{i+1} - x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x = y_i h + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x$$

Poslední integrál napravo tedy vyjadřuje rozdíl (chybu) mezi obsahem obdélníka $y_i.h$ a hledaného integrálu na intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$. Dále je

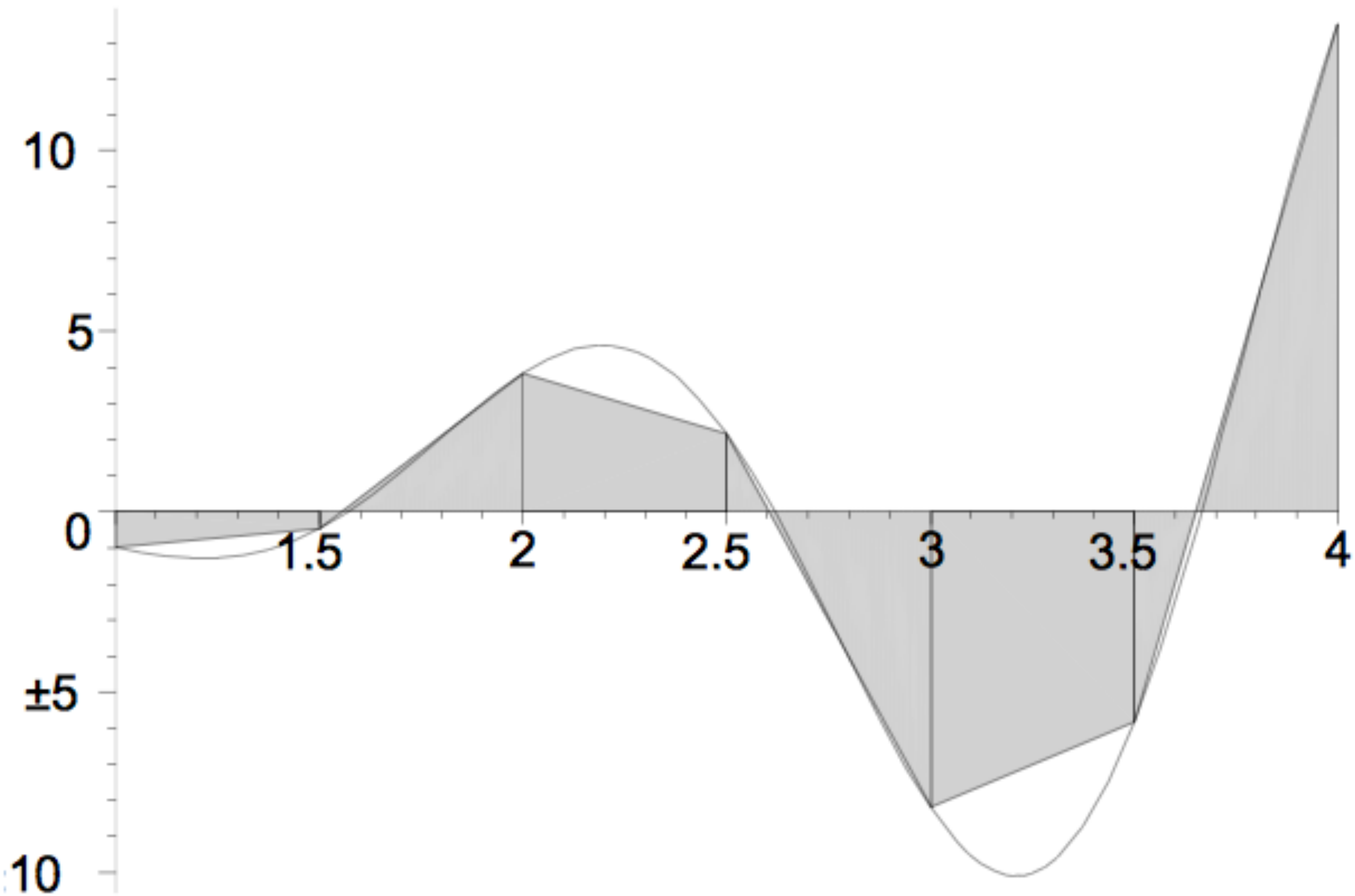
$$\left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(\xi).(x - x_i)\,\mathrm{d}x \right| \leq M_1 \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i)\,\mathrm{d}x \right| = \frac{1}{2} M_1 h^2,$$

kde $M_1 = \max_{\langle x_i, x_{i+1} \rangle} |f'|$. Pro celý integrál pak dostáváme

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{n} y_i h \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} M_1 h^2 = \frac{b-a}{2} M_1 h$$ **= odhad chyby**

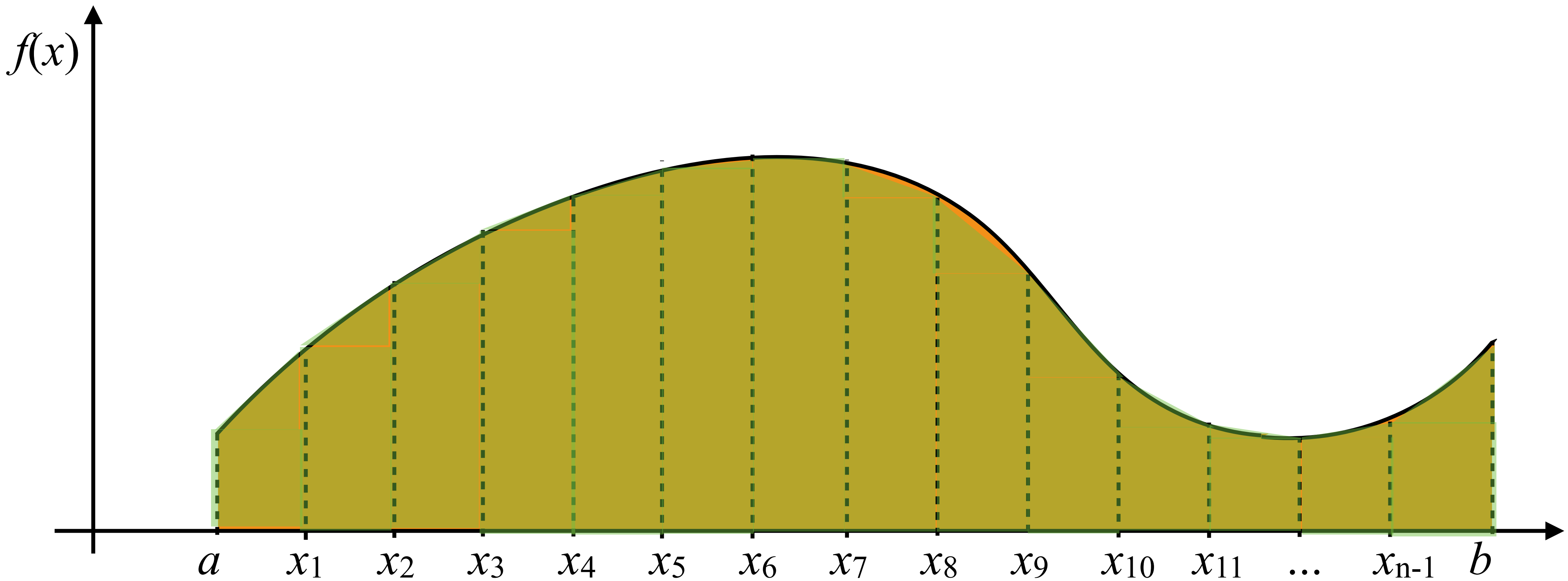
IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) Lichoběžníková metoda:



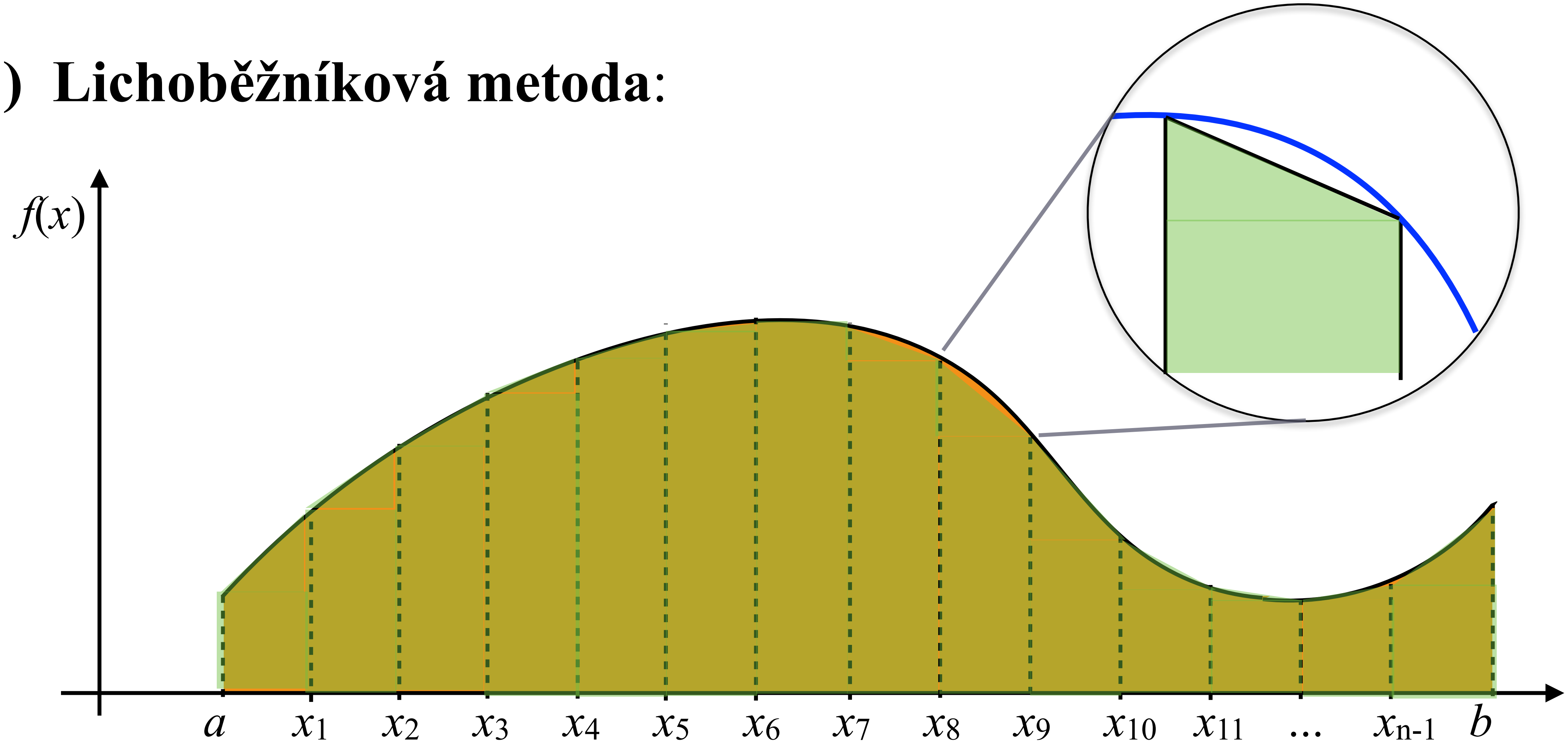
IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) **Lichoběžníková metoda**:



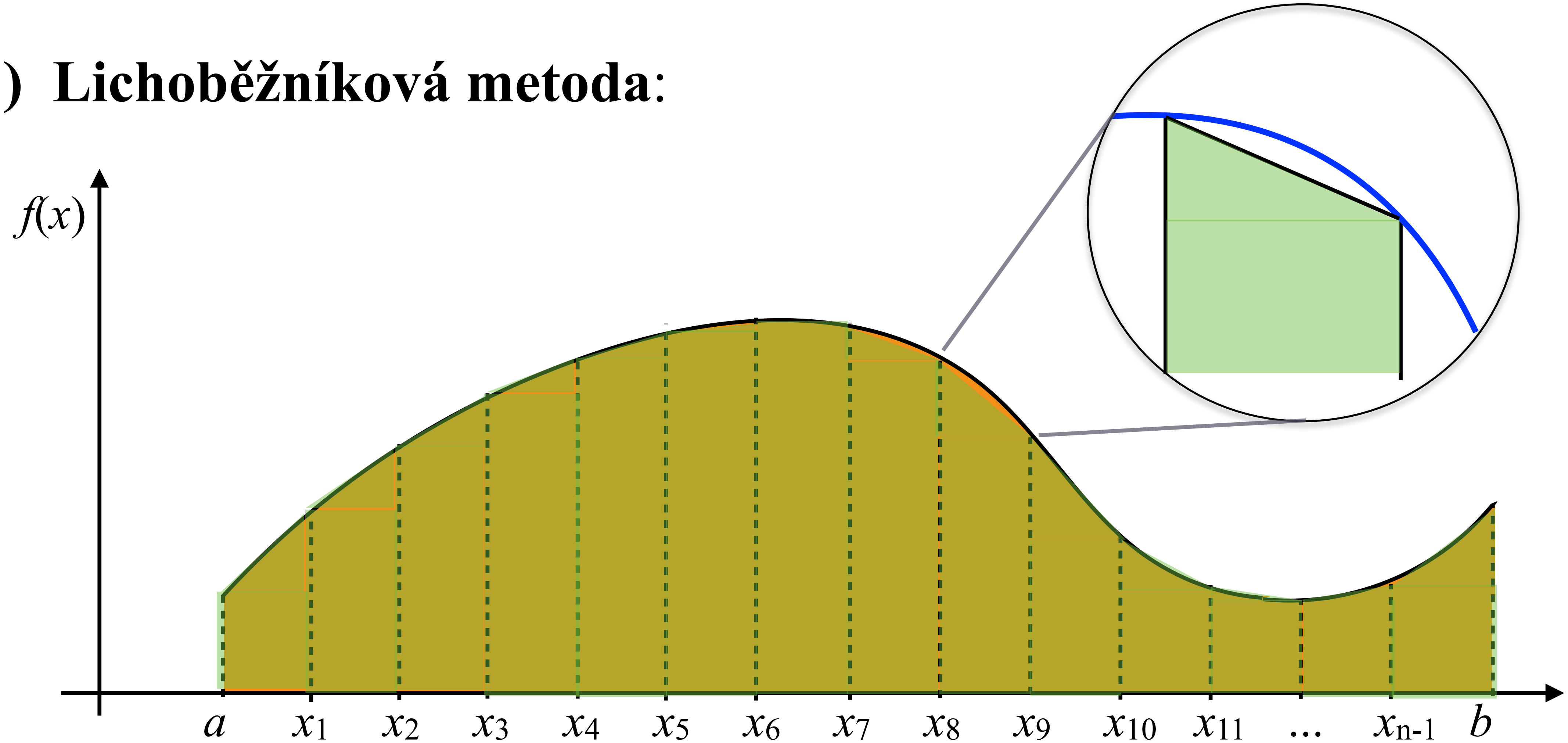
IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

1) **Lichoběžníková metoda**:



IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

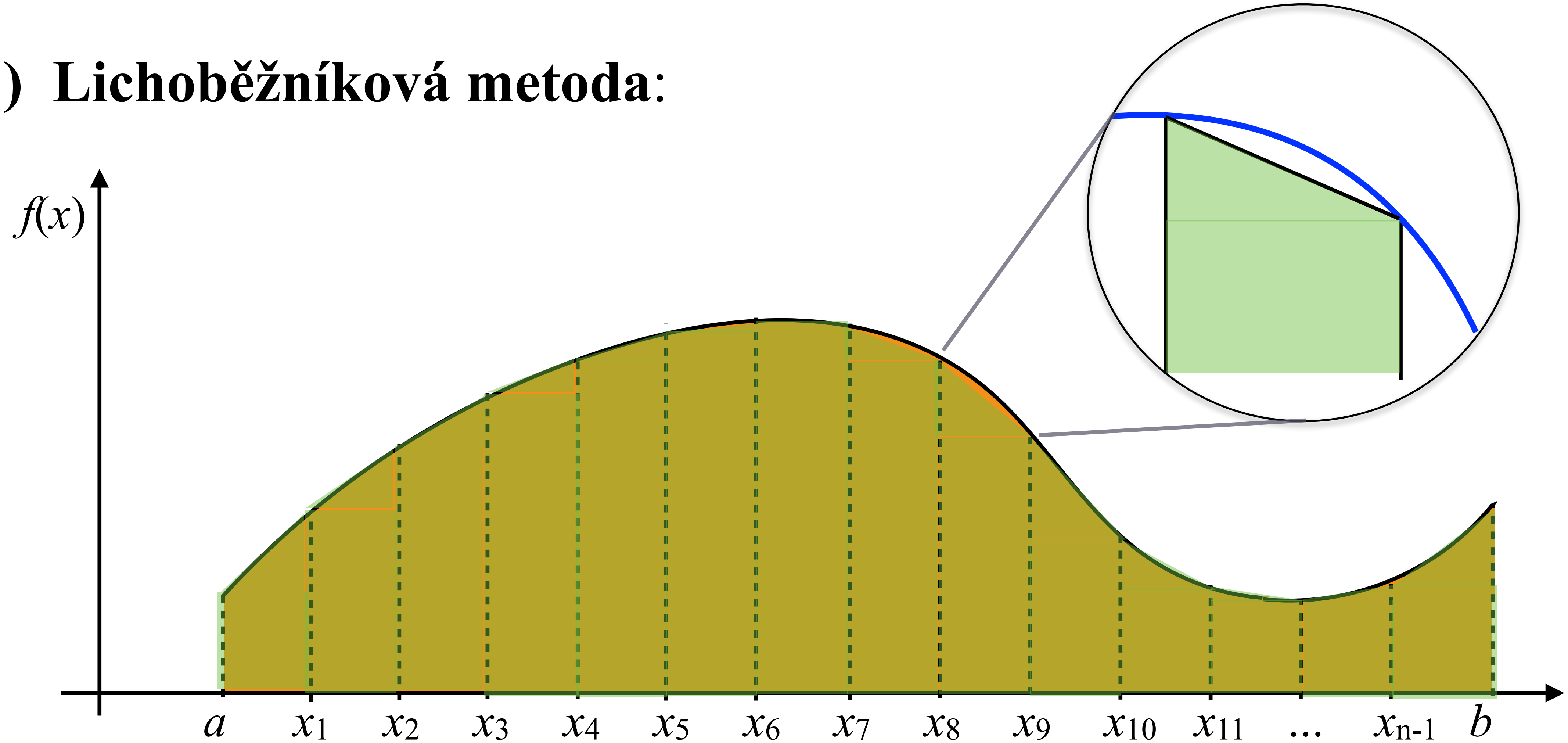
1) Lichoběžníková metoda:



$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} h\frac{(y_{i-1}+y_i)}{2} = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

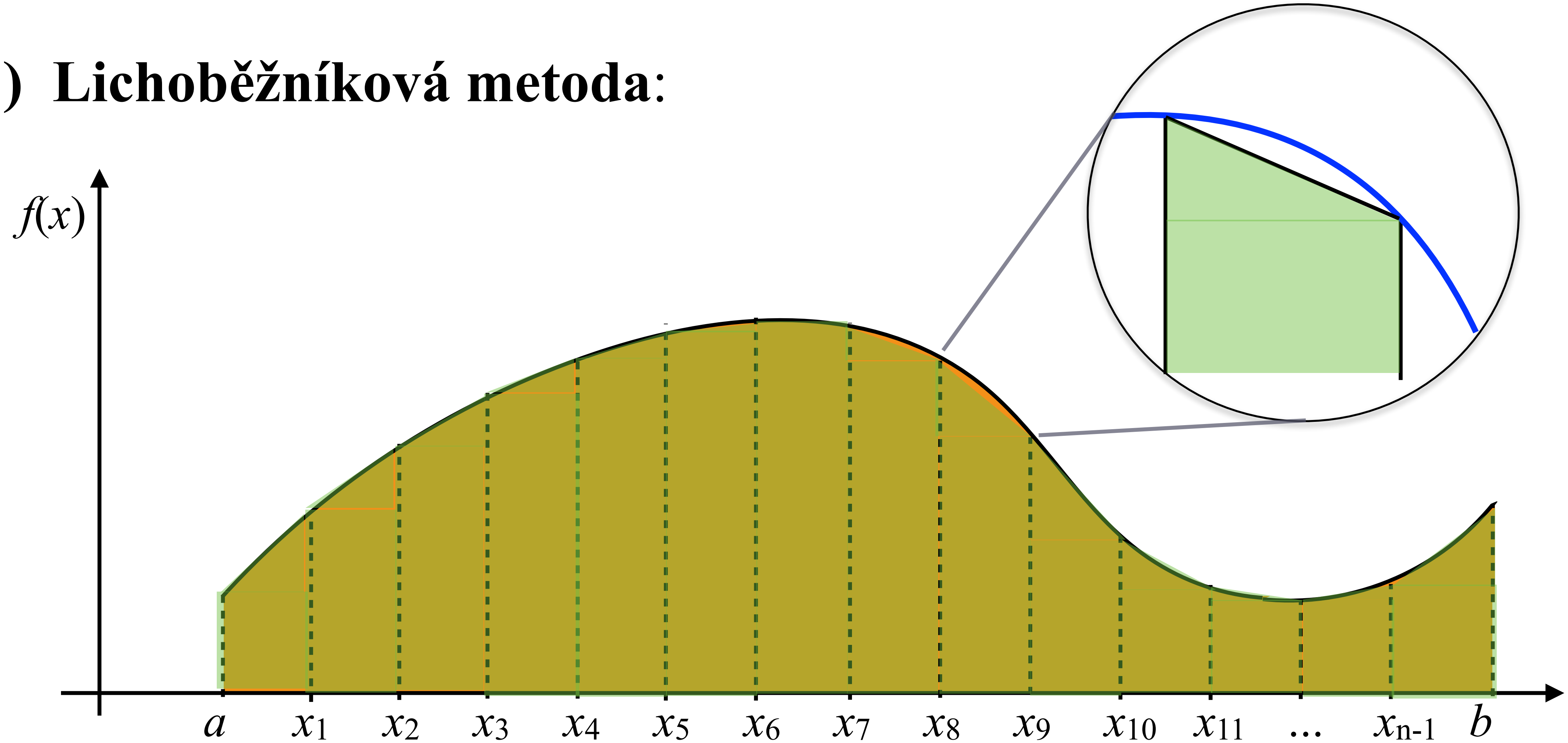
1) **Lichoběžníková metoda**:



$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} h\frac{(y_{i-1}+y_i)}{2} = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

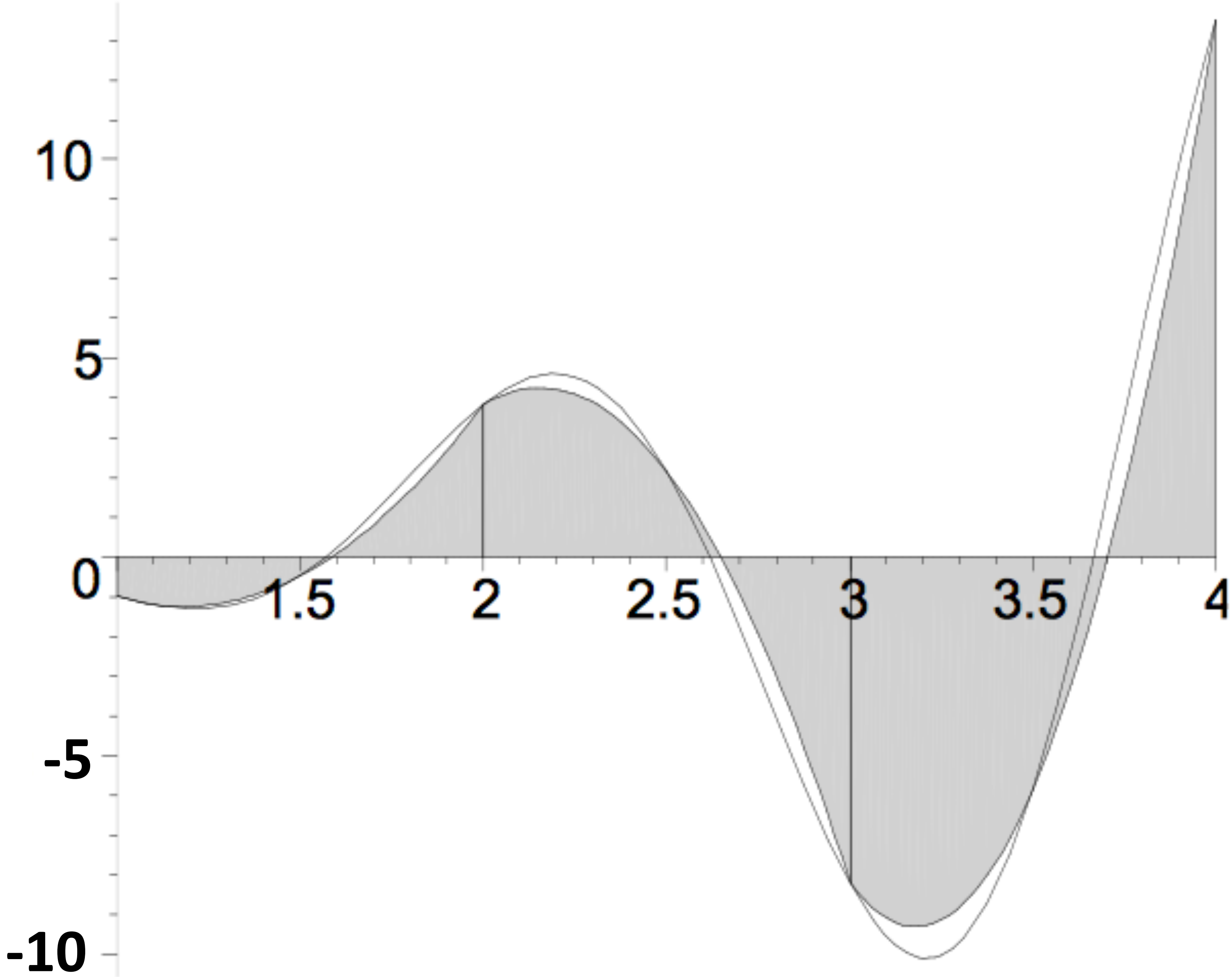
1) Lichoběžníková metoda:



$$\int_a^b f(x)dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} h\frac{(y_{i-1}+y_i)}{2} = \frac{h}{2}[y_0 + 2y_1 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n]$$

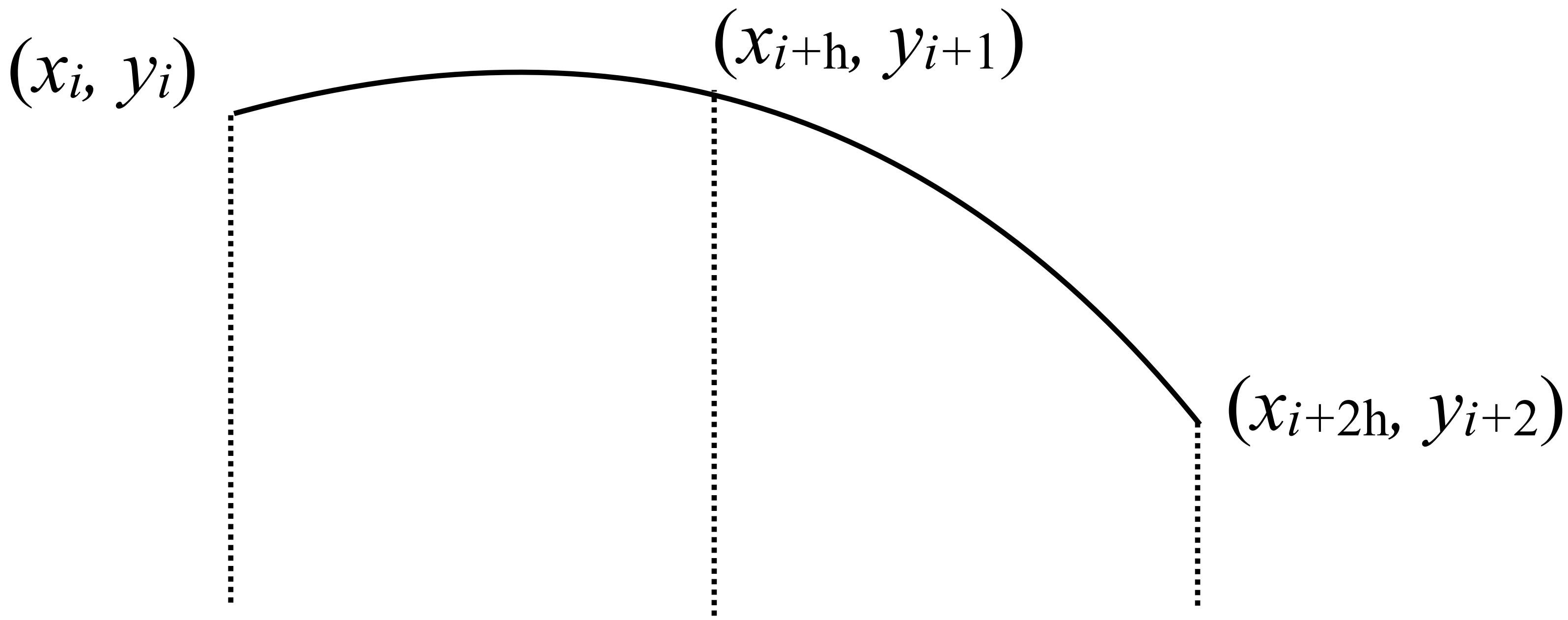
$$\left|\int_a^b f(x)dx - L_n\right| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M_2,$$ kde M_2 je max $|f''(x)|$ na $\langle a,b \rangle$

2) Simpsonova metoda:



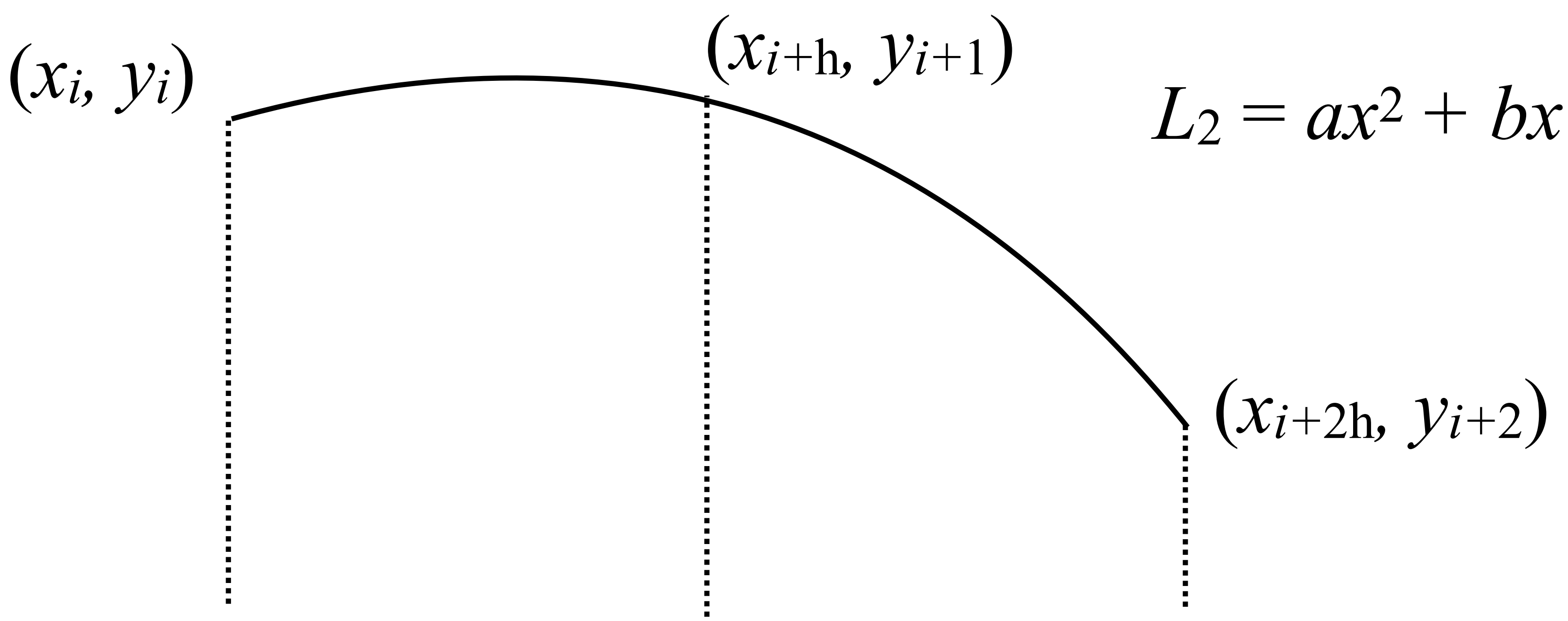
2) **Simpsonova metoda**:

2) Simpsonova metoda:



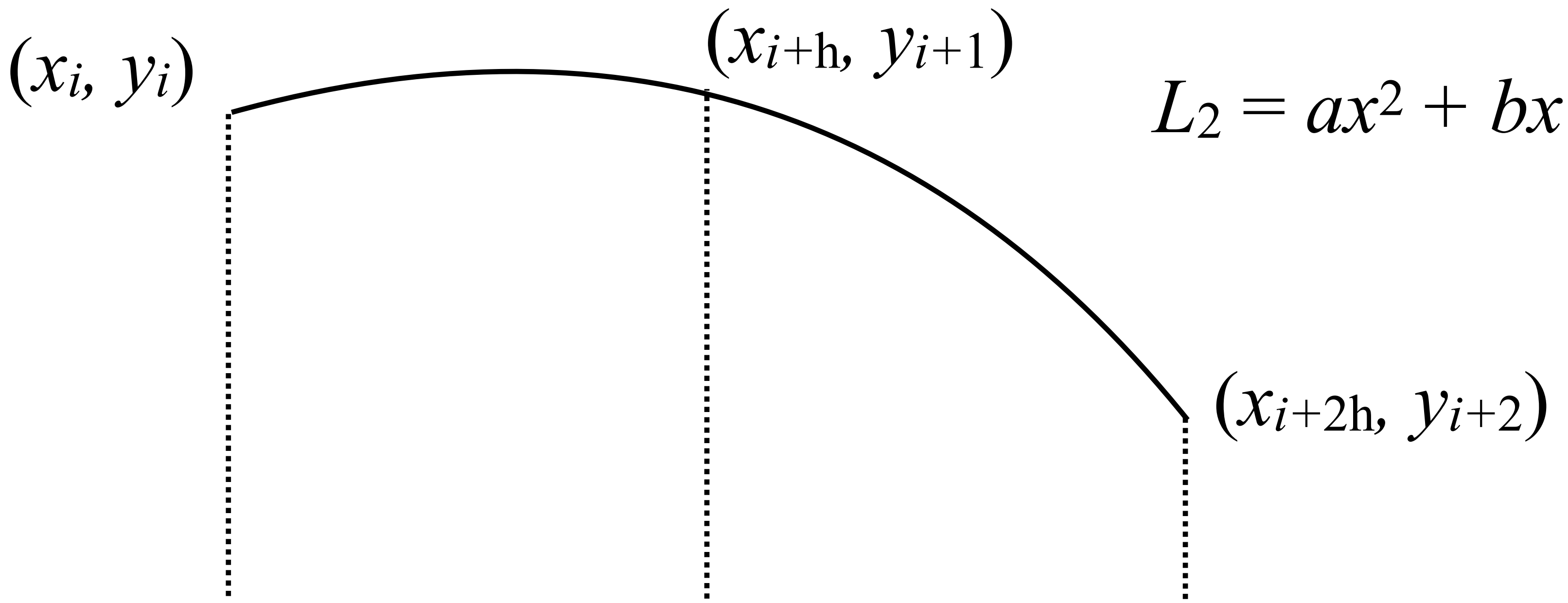
IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

2) Simpsonova metoda:



$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$$

2) **Simpsonova metoda**:



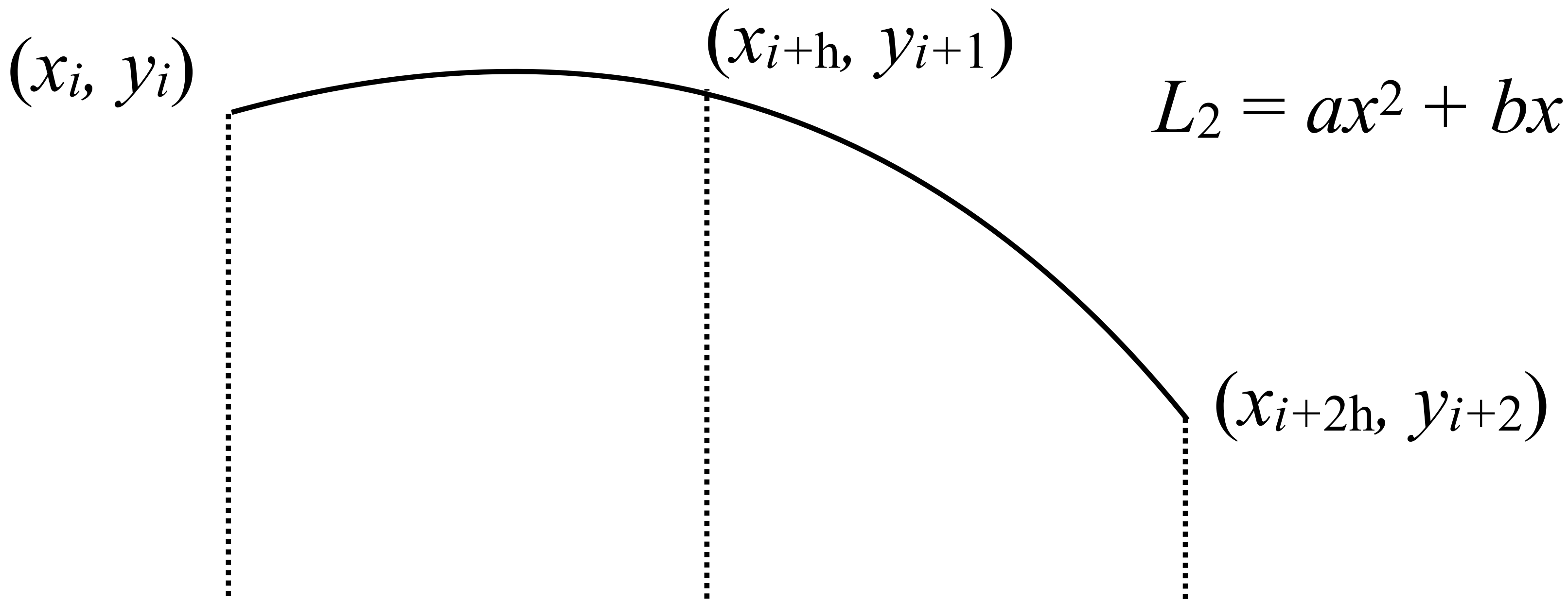
$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$

$$
\begin{aligned}
L_2(x_i) &= ax_i^2 && + bx_i && + c = y_i \\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 && + b(x_i+h) && + c = y_{i+1} \\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 && + b(x_i+2h) && + c = y_{i+2}
\end{aligned}
$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

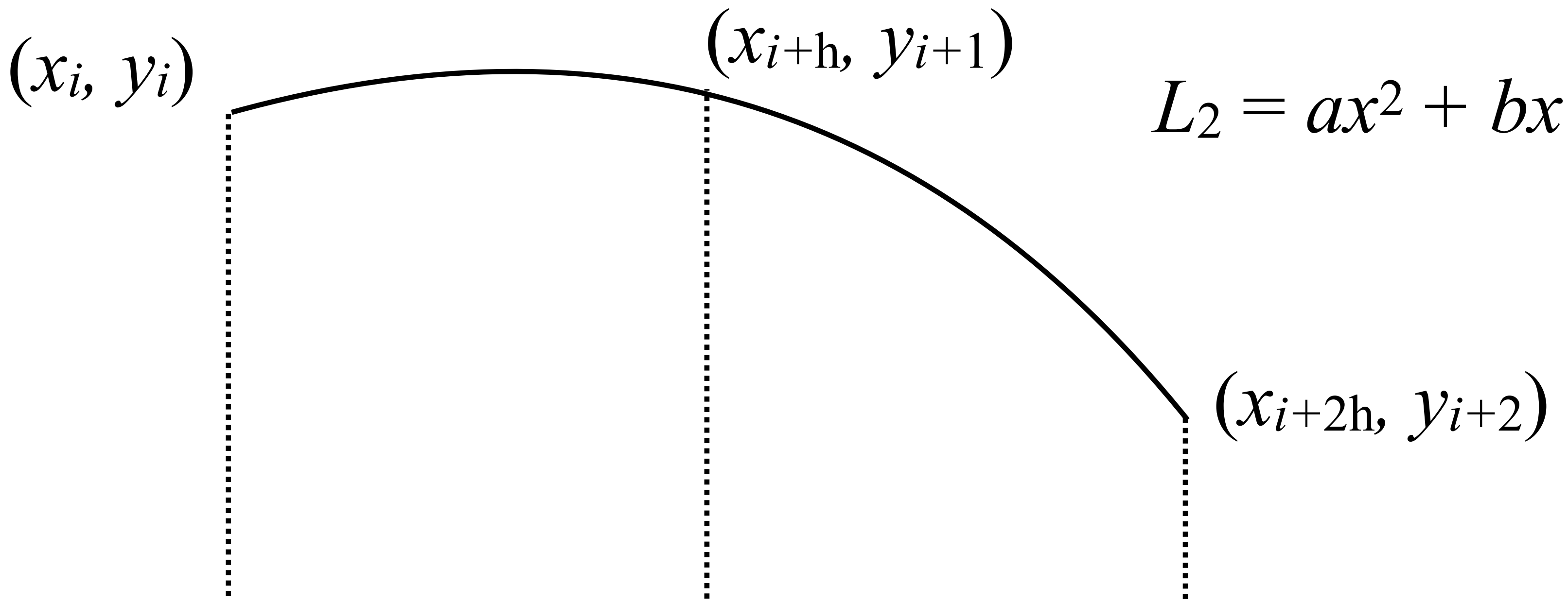
2) Simpsonova metoda:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$$



$$\begin{aligned}
L_2(x_i) &= ax_i^2 + bx_i + c = y_i \qquad \Rightarrow \quad c = y_i - ax_i^2 - bx_i \\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1} \\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}
\end{aligned}$$

2) **Simpsonova metoda**:

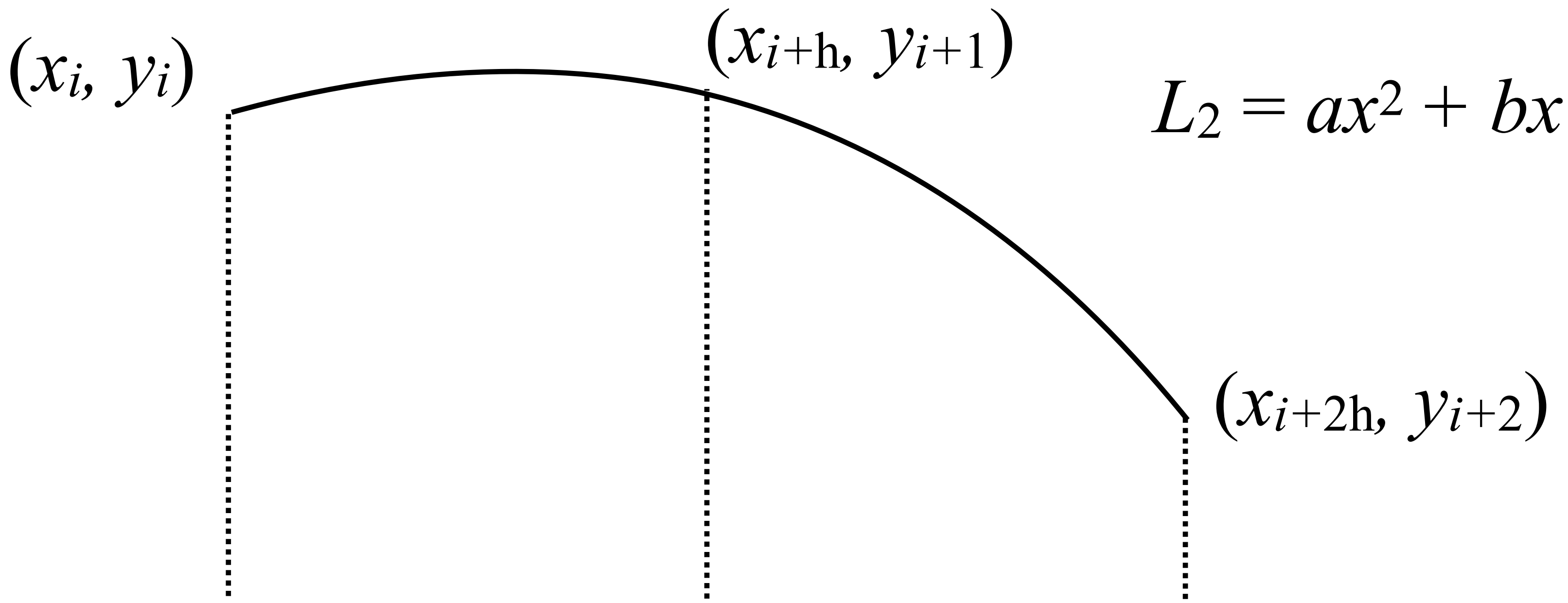


$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$$

$$\begin{aligned}
L_2(x_i) &= ax_i^2 + bx_i + c = y_i \quad \Rightarrow \quad c = y_i - ax_i^2 - bx_i \\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1} \\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(2hx_i + h^2) + bh &= y_{i+1} - y_i \\
a(2hx_i + 3h^2) + bh &= y_{i+2} - y_{i+1}
\end{aligned}$$

2) Simpsonova metoda:



$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$

$$L_2(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c = y_i \quad \Rightarrow \quad c = y_i - ax_i^2 - bx_i$$

$$L_2(x_i+h) = a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1}$$

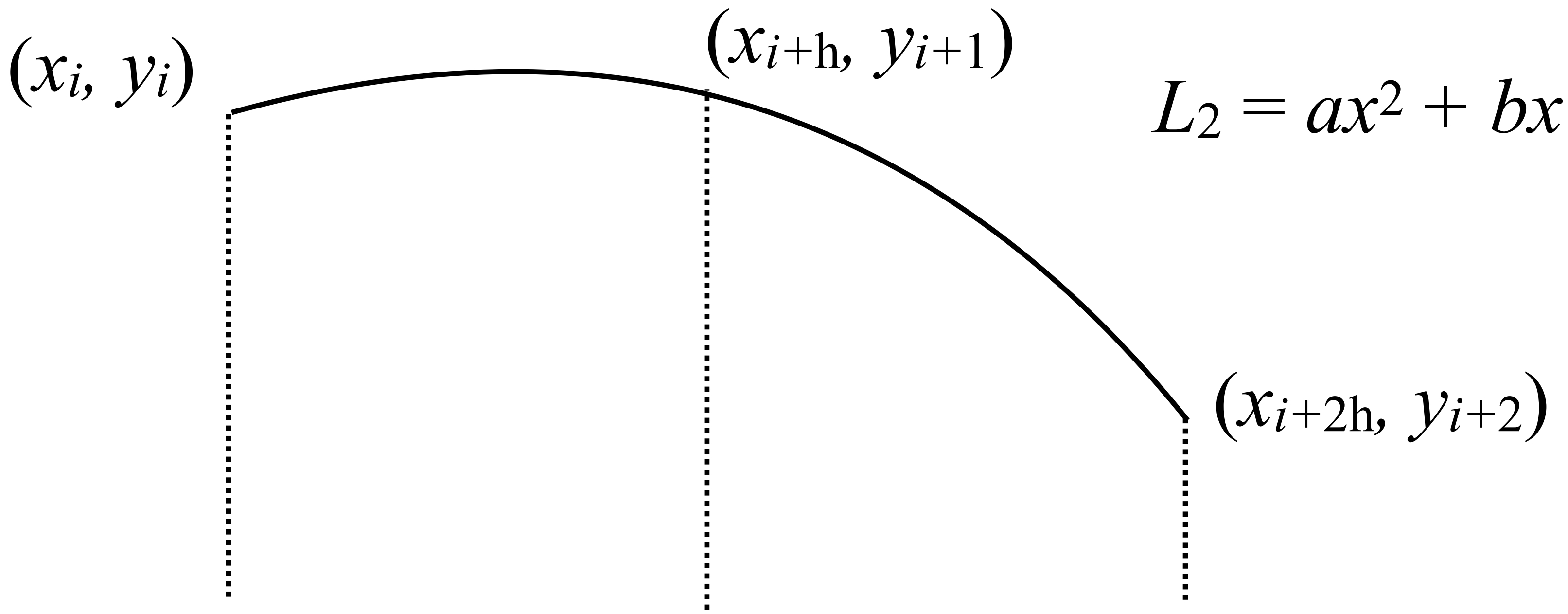
$$L_2(x_i+2h) = a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}$$

$$a(2hx_i + h^2) + bh = y_{i+1} - y_i$$

$$a(2hx_i + 3h^2) + bh = y_{i+2} - y_{i+1}$$

$$2ah^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

2) Simpsonova metoda:



$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

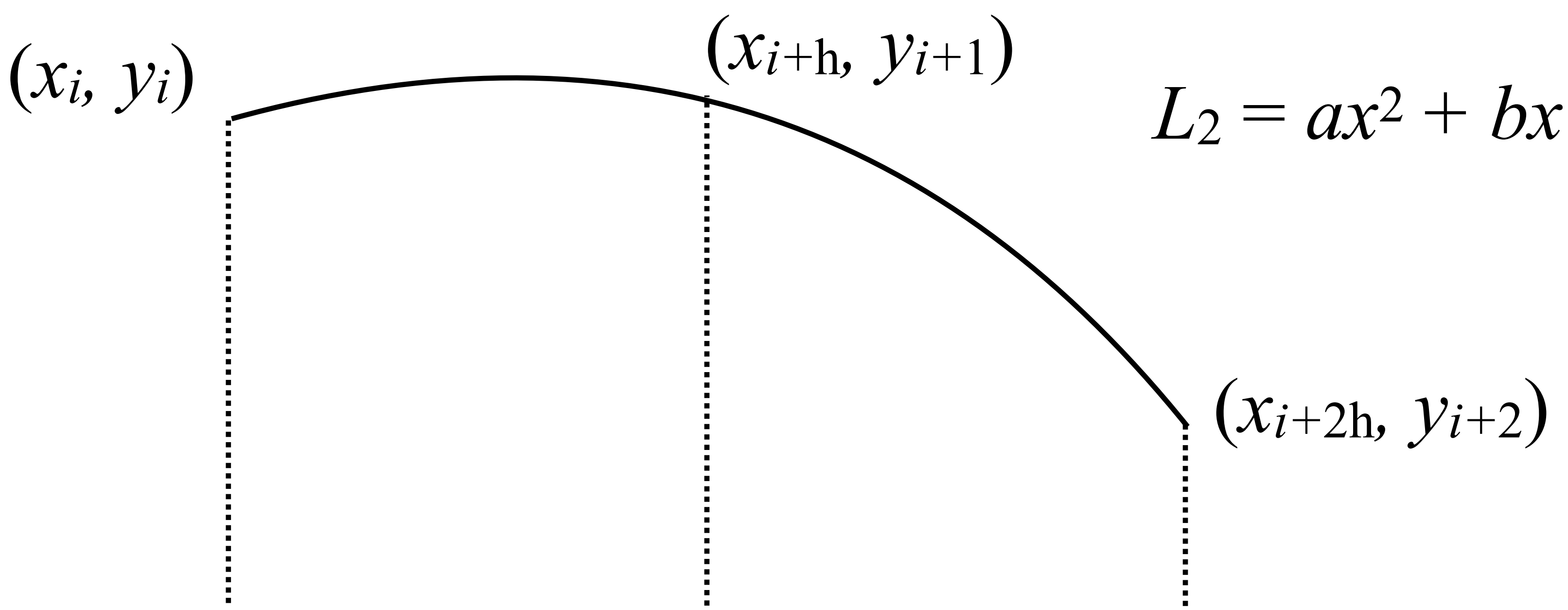
$$
\begin{aligned}
L_2(x_i) &= a x_i^2 + b x_i + c = y_i \quad \Rightarrow \quad c = y_i - a x_i^2 - b x_i \\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1} \\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(2hx_i + h^2) + bh &= y_{i+1} - y_i \\
a(2hx_i + 3h^2) + bh &= y_{i+2} - y_{i+1}
\end{aligned}
$$

$$2ah^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$a = \frac{1}{2h^2}\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right)$$

2) **Simpsonova metoda**:



$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$$

$$\begin{aligned}
L_2(x_i) &= ax_i^2 + bx_i + c = y_i \quad \Rightarrow \quad c = y_i - ax_i^2 - bx_i \\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1} \\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(2hx_i + h^2) + bh &= y_{i+1} - y_i \\
a(2hx_i + 3h^2) + bh &= y_{i+2} - y_{i+1}
\end{aligned}$$

$$2ah^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a\big(2x_i + 3h\big) \qquad a = \frac{1}{2h^2}\big(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\big)$$

2) **Simpsonova metoda**:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\begin{aligned}
L_2(x_i) &= ax_i^2 + bx_i + c = y_i \quad \Rightarrow \quad c = y_i - ax_i^2 - bx_i \\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1} \\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(2hx_i + h^2) + bh &= y_{i+1} - y_i \\
a(2hx_i + 3h^2) + bh &= y_{i+2} - y_{i+1}
\end{aligned}$$

$$2ah^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a\big(2x_i + 3h\big) \qquad a = \frac{1}{2h^2}\big(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\big)$$

2) Simpsonova metoda:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$= 2ax_i^2 h + 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_i h + 2bh^2 + 2ch$$

$$L_2(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c = y_i \quad \Rightarrow \quad c = y_i - ax_i^2 - bx_i$$

$$L_2(x_i+h) = a(x_i+h)^2 + b(x_i+h) + c = y_{i+1}$$

$$L_2(x_i+2h) = a(x_i+2h)^2 + b(x_i+2h) + c = y_{i+2}$$

$$a(2hx_i + h^2) + bh = y_{i+1} - y_i$$

$$a(2hx_i + 3h^2) + bh = y_{i+2} - y_{i+1}$$

$$2ah^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a\big(2x_i + 3h\big) \qquad a = \frac{1}{2h^2}\big(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\big)$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

2) **Simpsonova metoda**:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2h + 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_ih + 2bh^2 + 2ch}$$

$$\begin{aligned}
L_2(x_i) &= ax_i^2 &&+ bx_i &&+ c = y_i \qquad \Rightarrow \quad \boxed{c = y_i - ax_i^2 - bx_i}\\
L_2(x_i+h) &= a(x_i+h)^2 &&+ b(x_i+h) &&+ c = y_{i+1}\\
L_2(x_i+2h) &= a(x_i+2h)^2 &&+ b(x_i+2h) &&+ c = y_{i+2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(2hx_i + h^2) + bh &= y_{i+1} - y_i\\
a(2hx_i + 3h^2) + bh &= y_{i+2} - y_{i+1}
\end{aligned}$$

$$2ah^2 = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$\boxed{b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a\big(2x_i + 3h\big) \qquad a = \frac{1}{2h^2}\big(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\big)}$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

2) Simpsonova metoda:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2 h + 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_i h + 2bh^2 + 2ch}$$

$$= 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bh^2 + 2y_i h$$

$$\boxed{c = y_i - ax_i^2 - bx_i}$$

$$\boxed{b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a\big(2x_i + 3h\big)}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2h^2}\big(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\big)}$$

2) **Simpsonova metoda**:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2 h + 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_i h + 2bh^2 + 2ch}$$

$$= 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bh^2 + 2y_i h$$

$$\boxed{b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a\big(2x_i + 3h\big)}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2h^2}\big(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\big)}$$

2) Simpsonova metoda:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2h + 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_ih + 2bh^2 + 2ch}$$

$$= 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bh^2 + 2y_ih$$

$$= \frac{8}{3}ah^3 + 2h(y_{i+2} - y_{i+1}) - 6ah^3 + 2y_ih = -\frac{10}{3}ah^3 + 2h(y_i - y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$\boxed{b = \frac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - a(2x_i + 3h)}$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2h^2}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)}$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

2) Simpsonova metoda:

$$L_2 = ax^2 + bx + c,\ \ x \in \langle x_i, x_{i+2\mathrm{h}} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2h + 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_ih + 2bh^2 + 2ch}$$

$$= 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bh^2 + 2y_ih$$

$$= \frac{8}{3}ah^3 + 2h(y_{i+2} - y_{i+1}) - 6ah^3 + 2y_ih = -\frac{10}{3}ah^3 + 2h(y_i - y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2h^2}\left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\right)}$$

2) **Simpsonova metoda**:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2 h + 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_i h + 2bh^2 + 2ch}$$

$$= 4ax_i h^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bh^2 + 2y_i h$$

$$= \frac{8}{3}ah^3 + 2h(y_{i+2} - y_{i+1}) - 6ah^3 + 2y_i h = -\frac{10}{3}ah^3 + 2h(y_i - y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$= \frac{1}{3}h(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2h^2}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i)}$$

2) Simpsonova metoda:

$$L_2 = ax^2 + bx + c, \quad x \in \langle x_i, x_{i+2h} \rangle$$

$$P_i = \int_{x_i}^{x_i+2h} L_2(x)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{x_i}^{x_i+2h}$$

$$\boxed{= 2ax_i^2h + 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bx_ih + 2bh^2 + 2ch}$$

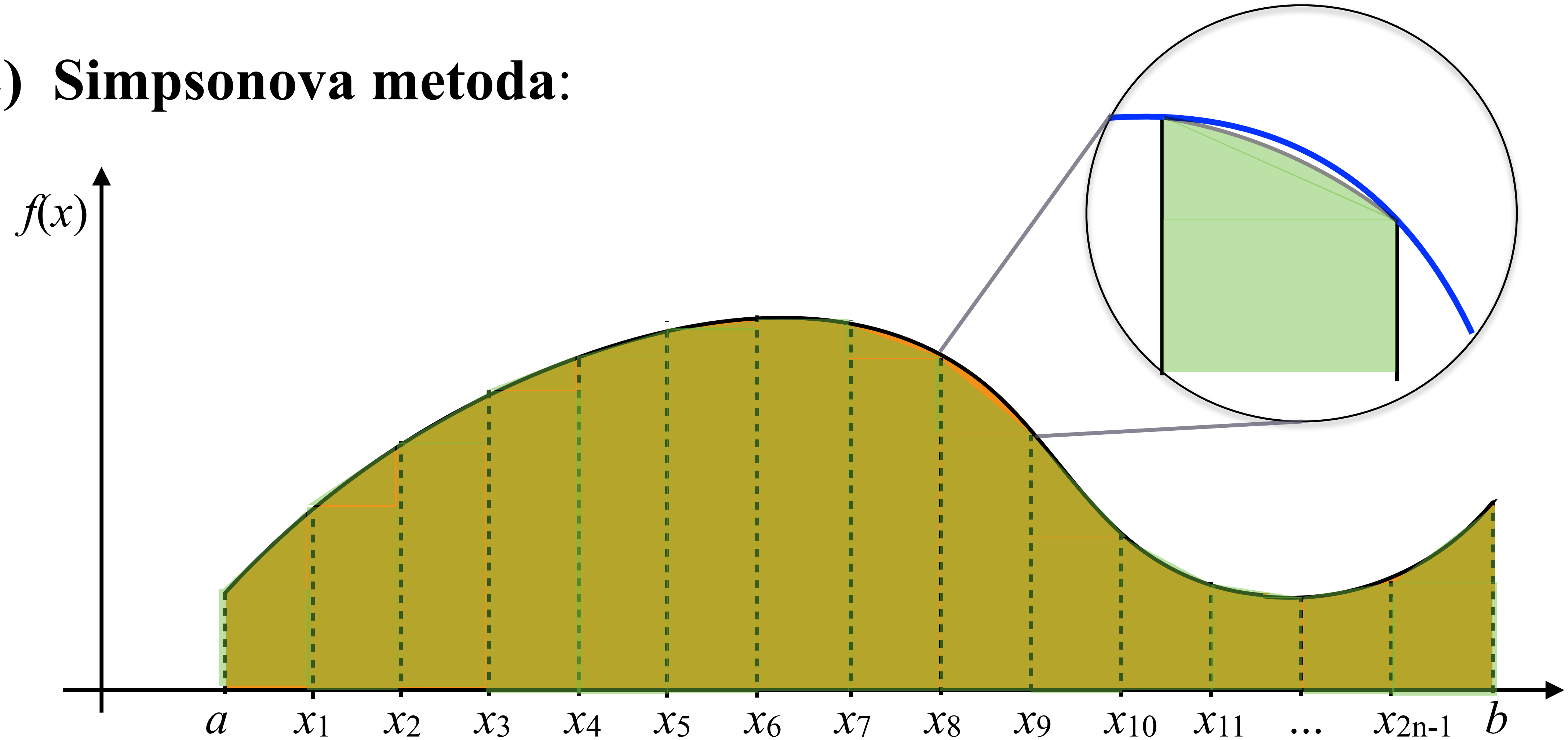
$$= 4ax_ih^2 + \frac{8}{3}ah^3 + 2bh^2 + 2y_ih$$

$$= \frac{8}{3}ah^3 + 2h(y_{i+2} - y_{i+1}) - 6ah^3 + 2y_ih = -\frac{10}{3}ah^3 + 2h(y_i - y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$= \frac{1}{3}h(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

2) Simpsonova metoda:

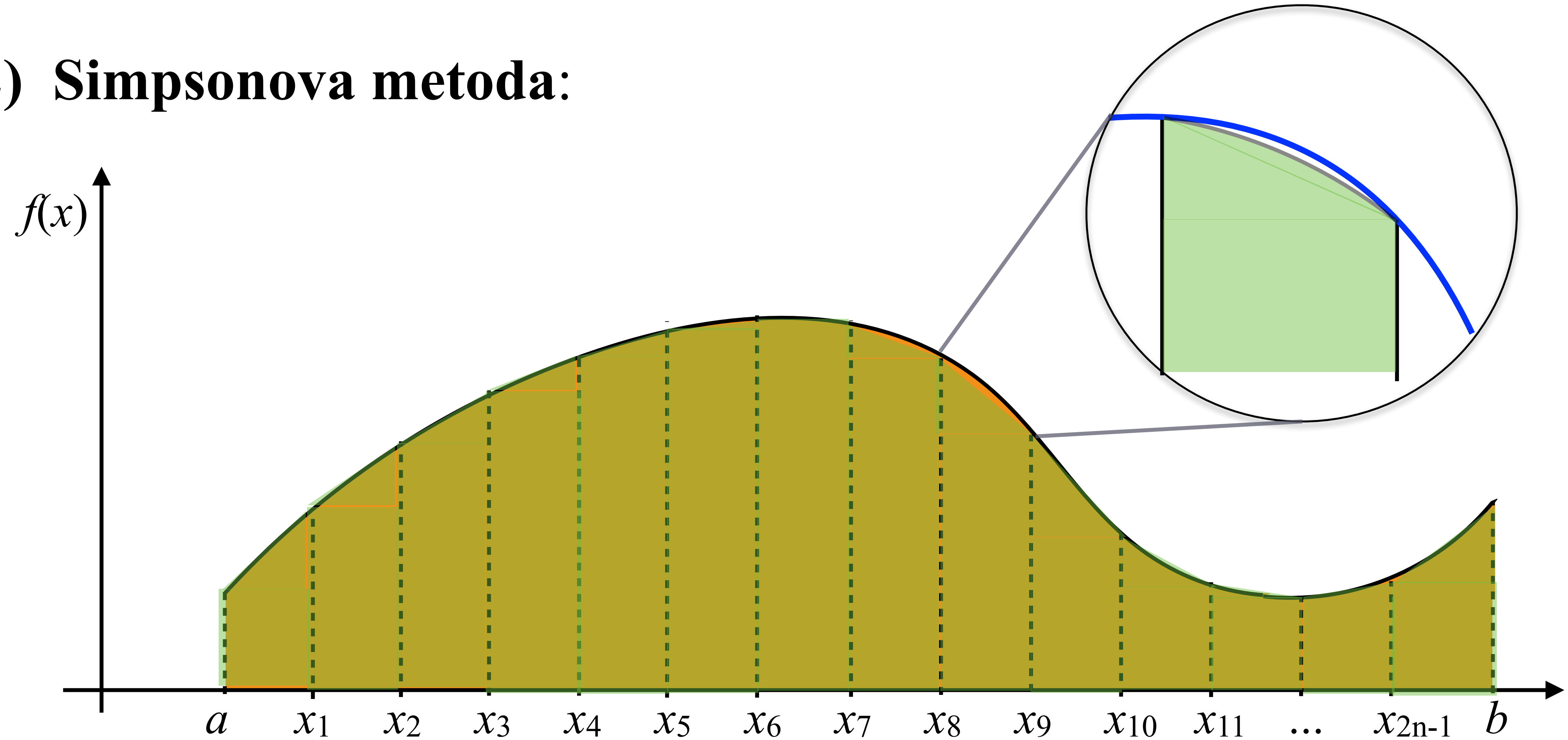


$$\int_a^b f(x)dx \approx L_{2n} = \sum_{i=1}^{n} h\frac{(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})}{3}$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$

IV.10. Numerický výpočet Riemanova integrálu

2) Simpsonova metoda:



$$\int_a^b f(x)dx \approx L_{2n} = \sum_{i=1}^{n} h\frac{(y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})}{3}$$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - L_{2n}\right| \leq \frac{b-a}{180}h^4 M_4,$$ kde M_4 je max $|f^{(4)}(x)|$ na $\langle a,b \rangle$

IV.11. …. a to je vše :)

5. Vypočítejte následující integrály. Nezapomeňte na intervaly jejich existence.

a) $\displaystyle\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (\cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) \, \mathrm{d}\varphi$

a) $\displaystyle\int r \sqrt{1 - r^2} \, \mathrm{d}r$ b) $\displaystyle\int \frac{5x - 4}{x^2 - 8x + 12} \, \mathrm{d}x$

a) $\displaystyle\int (x^2 + 2) \sin x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^4}} \, \mathrm{d}x$

a) $\displaystyle\int x^6 \ln x \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sin(2 - 3\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$

a) $\displaystyle\int (\ln x + \sqrt{\ln x}) \, \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (2 - 3x) \cos 5x \, \mathrm{d}x$

a) $\displaystyle\int_0^1 (4 - 3x) \, \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3 + 8} \, \mathrm{d}x$

IV.11. …. a to je vše :)

6. a) Vypočítejte integrály $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

b) Načrtněte obrazec, který je omezen osou x a grafy funkcí $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x$. Vypočítejte obsah tohoto obrazce.

c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem osy x.

---

6. a) Určete definiční obor a načrtněte graf funkce $y = \sqrt{x-1}$.

b) Načrtněte obrazec ohraničený křivkami $y = \sqrt{x-1}$, $x = 0$, $y = 0$ a $y = 1$ a vypočítejte jeho plošný obsah.

c) Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto obrazce kolem **osy** y.

---

6. Je dána funkce $f(x) = \sin^3 x \cos x$.

a) Najděte neurčitý integrál funkce f (včetně intervalu existence).

b) Vypočítejte určitý integrál $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Určete střední hodnotu funkce f na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$,

tj. hodnotu $\mu = \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

IV.11. …. a to je vše :)

6. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{6x+2}{(x^2-1)(x+3)}$.

a) Vypočítejte integrál $\int f(x)\,dx$. Určete intervaly existence.

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 2, 4 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = f(x)$. Výsledek upravte.

c) Rozhodněte výpočtem, zda konverguje nevlastní integrál $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

---

6. a) Vypočítejte integrál (uveďte též interval existence): $\int (3x+2) \cos x \, dx$

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je pro $x \in \langle 0, \pi/2 \rangle$ ohraničen osou x a křivkou $y = (3x+2)\cos x$.

---

6. a) Najděte primitivní funkci (též interval existence) k funkci $f(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$.

b) Vypočítejte obsah obrazce, který je ohraničen osou x a křivkami $y = \dfrac{1}{4+x^2}$, $x = 0$, $x = 2$.

c) Vypočítejte nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

IV.11. …. a to je vše :)

Děkuji za pozornost a přeji úspěšnou zkoušku.

… a také hezké Vánoce a šťastný Nový rok!