

## IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

**Definice.** Je-li  $F'(x) = f(x)$  pro všechna  $x \in I$ , pak funkci  $F$  nazýváme **primitivní funkcí** k funkci  $f$  v intervalu  $I$ .

? existence

**Věta 1.3** (postačující podmínka pro existenci)

Je-li funkce  $f$  spojitá v  $I$ , pak k ní existuje v intervalu  $I$  primitivní funkce.

? jednoznačnost

**Věta 1.5** Je-li  $F$  primitivní funkce k funkci  $f$  v intervalu  $I$  a  $C$  je libovolná konstanta, pak funkce  $F + C$  je také primitivní funkcí k funkci  $f$  v intervalu  $I$ .

Jsou-li  $F$  a  $G$  primitivní funkce k funkci  $f$  v intervalu  $I$ , pak existuje konstanta  $C$  tak, že  $G = F + C$  v  $I$ .

**Neurčitý integrál**

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I.$$

# Tabulkové integrály

### Věta 3.2 (o integraci per-partes)

Nechť funkce  $u$ ,  $v$  má spojité derivace v intervalu  $I$ .

Pak v tomto intervalu platí:

$$\int u' v \, dx = u v - \int u v' \, dx \quad (*)$$

### Postup při integraci per-partes

Nalevo je integrál součinu dvou funkcí

1. Jednu z nich označíme jako  $u'$ , druhou označíme  $v$
2. Připravíme si funkce:  $u = \int u' \, dx$  a derivaci  $v'$
3. Dosadíme napravo ve vzorci (\*) a pokračujeme ve výpočtu.

### Doporučení

1. Jako  $u'$  volíme funkci, kterou snadno integrujeme, neboť musíme nejprve určit  $u = \int u' \, dx$ .
2. Integrál  $\int u v' \, dx$  napravo by měl být (výrazně) lehčí než integrál původní

## Příklady.

$$1. \int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$2. \int (x^2 - 2) \cdot e^x \, dx = \dots = (x^2 - 2x) \cdot e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3. \int (x^6 - 4x) \cdot \ln x \, dx = \dots$$

$$= \left(\frac{x^7}{7} - 2x^2\right) \ln x - \frac{x^7}{49} + x^2 + C, \quad x \in (0, \infty)$$

$$4. \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \quad x \in (0, \infty)$$

### Věta 3.2 (Integrace substitucí)

Nechť funkce  $t = g(x)$  má spojitou derivaci v intervalu  $J$ , který zobrazuje na  $I$ . Nechť funkce  $f(t)$  je spojitá v  $I$ .

Potom platí:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

kde  $t = g(x)$ ,  $x \in J$ ,  $t \in I$ .

??? Jakou metodu použít ?

V obou metodách integrujeme součin funkcí, ALE

pro substituční metodu je jedna z funkcí složená,

ta druhá je derivací její vnitřní fce (té složené), příp. až na násobící konst.

Příklady. Dvojice úloh (podobné funkce, různé metody)

$$1a. \int x^2 \cdot e^x dx, \quad 1b. \int x \cdot e^{x^2} dx$$

$$2a. \int \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad 2b. \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Příklady typu  $\int (2x - 1) \cdot e^{5x} dx$

lze začít substitucí  $5x = t$ ,

tedy  $x = \frac{1}{5} t$ ,  $dx = \frac{1}{5} dt$  a pak per-partes,

Při troše zkušeností lze však hned per-partes, neboť

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$