

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

Definice. Je-li $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in I$, pak funkci F nazýváme **primitivní funkcí** k funkci f v intervalu I .

? existence

Věta 1.3 (postačující podmínka pro existenci)

Je-li funkce f spojitá v I , pak k ní existuje v intervalu I primitivní funkce.

? jednoznačnost

Věta 1.5 Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I a C je libovolná konstanta, pak funkce $F + C$ je také primitivní funkcí k funkci f v intervalu I .

Jsou-li F a G primitivní funkce k funkci f v intervalu I , pak existuje konstanta C tak, že $G = F + C$ v I .

Neurčitý integrál: $\int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in I.$

Věta 1.8

Nechť funkce f , g mají neurčité integrály v intervalu I .

Pak platí:

$$\int konst \cdot f(x) dx = konst \cdot \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Věta 3.2 (o integraci per-partes)

Nechť funkce u , v mají spojité derivace v intervalu I .

Pak v tomto intervalu platí:

$$\int u' v \, dx = u v - \int u v' \, dx \quad (*)$$

Postup při integraci per-partes

Nalevo je integrál součinu dvou funkcí

1. Jednu z nich označíme jako u' , druhou označíme v
2. Připravíme si funkce: $u = \int u' \, dx$ a derivaci v'
3. Dosadíme napravo ve vzorci (*) a pokračujeme ve výpočtu.

Doporučení

1. Jako u' volíme funkci, kterou snadno integrujeme, neboť musíme nejprve určit $u = \int u' \, dx$.
2. Integrál $\int u v' \, dx$ napravo by měl být (výrazně) lehčí než integrál původní

Příklady.

$$1. \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C, \quad x \in (0, \infty)$$

$$2. \int (x^2 - 2) \cdot e^x \, dx = \text{dvakrát per-partes ...}$$
$$= (x^2 - 2x) \cdot e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$3. \int (x^6 - 4x) \cdot \ln x \, dx = \dots$$
$$= \left(\frac{x^7}{7} - 2x^2\right) \ln x - \frac{x^7}{49} + x^2 + C, \quad x \in (0, \infty)$$

$$4. \int x \cdot \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

Věta 3.2 (Integrace substitucí)

Nechť funkce $t = g(x)$ má spojitou derivaci v intervalu J , který zobrazuje na I . Nechť funkce $f(t)$ je spojitá v I .

Potom platí:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(t) dt,$$

kde $t = g(x)$, $x \in J$, $t \in I$.

??? Jakou metodu použít ?

V obou metodách integrujeme součin funkcí, ALE

pro substituční metodu je jedna z funkcí složená,

ta druhá je derivací její vnitřní fce (té složené), příp. až na násobící konst.

Speciální případ

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, \quad \text{po substituci } f(x) = t.$$

Příklady. Dvojice úloh (podobné funkce, různé metody)

$$1a. \int x^2 \cdot e^x dx, \quad 1b. \int x \cdot e^{x^2} dx$$

$$2a. \int \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad 2b. \int \frac{\ln x}{x} dx$$

Příklady typu $\int (2x - 1) \cdot e^{5x} dx$

Řešení lze začít substitucí $5x = t$,

tedy $x = \frac{1}{5}t$, $dx = \frac{1}{5}dt$ a pak per-partes,

Při troše zkušeností lze však hned per-partes, neboť

$$\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$