Nevlastní integrál (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Definice Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ předpokládá, že interval $\langle a, b\rangle$ je omezený a funkce f je v něm omezená. Pokud tento předpoklad není splněn, pak Riemannův integrál neexistuje. Přesto mohou nastat situace, ve kterých je vhodné se takovým integrálem zabývat.

Předpokládejme, že Riemannův integrál daná funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ neexistuje, že však pro každé $t \in \langle a, b)$ je funkce f integrovatelná v intervalu $\langle a, t\rangle$.
Jestliže existuje limita

$$\lim_{\ t\to b_-} \left(\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

pak její hodnotu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem se singulární horní mezí.* Pokud je tato hodnota konečná, pak říkáme, že *integrál konverguje.* Pokud je tato hodnota $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že *integrál diverguje.*

Analogicky je definován *nevlastní Riemannův integrál se singulární dolní mezí.*

Je-li funkce f v intervalu (a, b) neomezená, mluvíme o *nevlastním integrálu vlivem funkce.* Je-li interval (a, b) neomezený, mluvíme o *nevlastním integrálu vlivem meze.*

Protože integrál v této definici $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, tj. integrál jako funkce horní meze je primitivní funkcí k funkci f v příslušném intervalu, lze při výpočtu nevlastního integrálu postupovat podle následující věty.

Věta IV.6.6. Nechť funkce f je spojitá v intervalu (a, b). Potom existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\ t\to b_-} F(t) - \lim_{\ t\to a_+} F(t),$$

pokud výraz na pravé straně má smysl.

Poznámka. Je-li funkce f spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, který je omezený, pak hodnoty limit jsou $F(b)$, resp. $F(a)$ a jedná se o Newtonovu-Leibnizovu formuli pro "běžný" Riemannův integrál.

Příklady

A1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi.$

Řešení: Integrovaná funkce je spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Neurčitý integrál je
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C$. Podle výše uvedené věty tedy počítáme nevlastní integrál takto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\ x\to+\infty} \operatorname{arctg} x - \lim_{\ x\to-\infty} \operatorname{arctg} x \ = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

A2. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 3.$ Příklad je vyřešen ve sbírce [2], a to včetně první části, tj. nalezení primitivní funkce pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků.

A3. $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \ln(4/3).$

Řešení: Definiční obor $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. V intervalu $(3, +\infty)$ je tedy integrovaná funkce spojitá. Jedná se o nevlastní integrál vlivem horní meze, můžeme postupovat podle uvedené věty. Primitivní funkci určíme pomocí rozkladu na součet parciálních zlomků. Ten má tvar

$\dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1}$. Po vynásobení společným jmenovatelem získáme rovnici, která vyjadřuje rovnost dvou polynomů.

$1 = A(x+1) + Bx.$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin nebo dosazením vhodných hodnot, např. $x := -1$, resp. $x := 0$ určíme, že $A = 1, B = -1$.

Je tedy $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \ln|x+1| + C.$

Po úpravě výrazů s logaritmy a využitím toho, že na daném intervalu je $x > 0$ lze primitivní funkci napsat ve tvaru $F(x) = \ln \dfrac{x}{x+1}$.

Výpočet dokončíme podle uvedené věty:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x}{x+1} - F(3) = \ln 1 - \ln(3/4) = \ln(4/3).$$

Při výpočtu limity jsme postupovali podle věty o limitě složené funkce.

Podobně v následujícím příkladu se stejnou funkcí, kde se však jedná o nevlastní integrál vlivem funkce. Ta není omezená v pravém okolí bodu $x = 0$.

A4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = +\infty$. Primitivní funkce je stejná jako v předchozím příkladu, takže v závěrečné části výpočtu dostáváme:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x = F(1) - \lim_{x\to 0_+} \ln\frac{x}{x+1} = \ln(1/2) - \lim_{y\to 0_+} \ln y = \ln(1/2) - (-\infty) = +\infty.$$

Upozornění: Následující úlohy předpokládají znalost integrace racinální funkce s polynomem stupně 3 ve jmenovateli, která je v požadavcích ke zkoušce Alfa. V požadavcích zkoušky Beta je v těchto úlohách zvládnutí funkce s polynomem stupně 2 ve jmenovateli. V níže uvedené Sbírce jsou v odstavci III.4 řešené příklady pro všechny možnosti této zmíněné typové úlohy integrace.

A5.* $\displaystyle\int_1^3 \frac{16x+20}{(x-4)(x+3)(x-1)}\,\mathrm{d}x = -\infty.$

V tomto příkladu se jedná o tři reálné různé kořeny a tedy následující rozklad na součet parciálních zlomků. Dále postupujeme podle věty o výpočtu nevlastního integrálu.

$$\frac{16x+20}{(x-4)(x+3)(x-1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{4}{x-4} + \frac{-1}{x+3} + \frac{-3}{x-1}.$$

A6*. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,\mathrm{d}x = -3 + \ln 9.$

V tomto příkladu se jedná o dva reálné kořeny, z nichž jeden je dvojnásobný. Rozklad na součet parciálních zlomků vede k následujícímu vyjádření dané funkce:

$$\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{-3}{(x-2)^2}.$$

Nevlastní (Riemannův) integrál je vysvětlen v kapitole V.6 skripta [1]. Obsahuje neřešené příklady s výsledky a dva příklady řešené. Další příklady, řešené i neřešené, jsou ve Sbírce [2].

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.