

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Počáteční (Cauchyova) úloha pro jednu rovnici: $y' = f(x,y)$

Znázornění všech řešení rovnice

Příklad: chceme znázornit všechna řešení rovnice $y' = y / x^2$ na obdélníkové oblasti $[0.8, 2.5] \times [0.8, 3.8]$:

```
>> h = 0.1; % krok site
>> xh = 0.8 : h : 2.5 ; % xh je interval [ 0.8 , 2.5 ] rozdeleny s krokem h
>> yh = 0.8 : h : 3.8 ; % yh je interval [ 0.8 , 3.8 ] rozdeleny s krokem h
>> [xx,yy] = meshgrid(xh,yh); % vytvoreni site na obdelniku [ 0.8 , 2.5 ] x [ 0.8 , 3.8 ]
>> px = ones(length(yh),length(xh)); % px = 1 v kazdem bode [x,y] site
>> py = yy./xx.^2; % py = f(x,y) v kazdem bode [x,y] site
>> pp = sqrt(px.*px + py.*py); % (ppx, ppy) bude normovany vektor (px, py)
>> ppx = px./pp;
>> ppy = py./pp;
>> quiver(xh, yh, px, py) % v kazdem bode [x,y] se nakresli vektor (ppx, ppy) jako sipka
>> hold on % pokracovani ve stejnem obrazku
>> plot(xh, 2*exp(1-1./xh),'LineWidth',2,'Color','r') % presne reseni
>> axis([0.5, 2.6, 1.5, 3.6]) % nastaveni velikosti
```

Numerické řešení Cauchyovy úlohy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

Příklad: přidáme do předchozího obrázku řešení rovnice $y' = y / x^2$ s počáteční podmínkou $y(1) = 2$. Rovnici řešíme numericky s krokem $h = 0.2$ buď Eulerovou nebo Collatzovou metodou.

```
>> h = 0.2; % krok
>> x = 1; y = 2; % pocatecni podminka - vychazi bod
>> hold on % chceme kreslit do stejneho obrazku
>> plot(x, y, 'r*') % nakreslime vychazi bod jako červenou hvězdičku
```

Eulerova metoda

Opakujeme následující 4 kroky:

```
>> f = y / x^2; % f ... smernice tecny v bode [x, y]
>> x = x + h; % nova hodnota x
>> y = y + f * h; % nova hodnota y (na primce se smernici f)
>> plot(x, y, 'r*') % nakresleni noveho bodu
```

Collatzova metoda

Opakujeme následující kroky:

```
>> f = y / x^2; % f ... smernice tecny v bode [x, y]
>> xp = x + 0.5 * h; % pomocny bod [xp, yp]
>> yp = y + 0.5 * f * h; % (urceny Eulerovou metodou s polovicnim krokem)
>> fp = yp / xp^2; % fp ... smernice tecny v bode [xp, yp]
>> x = x + h; % nova hodnota x
>> y = y + fp * h; % nova hodnota y (na primce se smernici fp)
>> plot(x, y, 'r*') % nakresleni noveho bodu
```

Počáteční (Cauchyova) úloha pro soustavu 2 rovnic

Numerické řešení Cauchyovy úlohy $\mathbf{Y}' = \mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{Y})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{Y}_0$

Příklad: numerické řešení rovnice $\mathbf{Y}' = [2x - y_2 + \ln(x-1) + 1, x(4-y_1)^{1/2} - 1]^T$ s počáteční podmínkou $\mathbf{Y}(2) = [0, -1]^T$ s krokem $h = 0.1$.

```
>> h = 0.1; % krok
>> x = 2; Y = [ 0 ; -1 ]; % pocatecni podminky
```

Eulerova metoda

Opakujeme následující 3 kroky:

```
>> F = [ 2*x-Y(2)+log(x-1)+1 ; x*sqrt(4-Y(1))-1 ];
>> x = x + h; % nova hodnota x
>> Y = Y + h * F; % nova hodnota Y
```

Collatzova metoda

Opakujeme následující kroky:

```
>> F = [ 2*x-Y(2)+log(x-1)+1 ; x*sqrt(4-Y(1))-1 ];
>> xp = x + 0.5 * h; % pomocny bod [xp, Yp]
>> Yp = Y + 0.5 * h * F;
>> Fp = [ 2*xp-Yp(2)+log(xp-1)+1 ; xp*sqrt(4-Yp(1))-1 ];
>> x = x + h; % nova hodnota x
>> Y = Y + h * Fp; % nova hodnota Y
```

Převedení rovnice 2. řádu na soustavu 2 rovnic prvního řádu

Příklad - tlumený oscilátor: $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$.

Označíme $y_1 = y$, $y_2 = y'$ (tj. máme teď dvě nezávislé funkce: y_1 představuje výchylku a y_2 rychlost).

Platí $y_1' = y_2$, $y_2' = e^{-x} - y_1 - 2y_2$, máme tedy soustavu diferenciálních rovnic

$\mathbf{Y}' = [y_2, e^{-x} - y_1 - 2y_2]^T$ s počáteční podmínkou $\mathbf{Y}(0) = [2, -4]^T$

Soustavu můžeme řešit jako výše, např. Eulerovou metodou s krokem $h = 0.1$ (v praxi spíš 0.01):

```
>> h = 0.1; % krok
>> x = 0; Y = [ 2 ; -4 ]; % pocatecni podminky
```

Opakujeme následující 3 kroky:

```
>> F = [ Y(2) ; exp(-x)-Y(1)-2*Y(2) ];
>> x = x + h; % nova hodnota x
>> Y = Y + h * F; % nova hodnota Y
```

Autonomní systém

Příklad - rovnice "dravec-koříst": $\mathbf{Y}' = [a y_1 - b y_1 y_2, -c y_2 + d y_1 y_2]$

znázornění stavové (fázové) roviny na čtverci $[0, 40] \times [0, 40]$:

```
>> a = 1.5; b = 0.2; c = 1; d = 0.1; % volba parametru
>> h = 2; % krok site
>> y1h = 0 : h : 30; % y1h je interval [ 0 , 40 ] rozdeleny s krokem h
>> y2h = 0 : h : 40; % y2h je interval [ 0 , 40 ] rozdeleny s krokem h
>> [y1,y2] = meshgrid(y1h,y2h); % vytvoreni site na obdelniku [ 0 , 40 ] x [ 0 , 40 ]
>> py1 = a*y1 - b*y1.*y2;
>> py2 = -c*y2 + d*y1.*y2;
>> quiver(y1h, y2h, py1, py2, 2)
```

Eulerova metoda

```
>> h=0.1;
>> Y = [15; 15]; % vychazi hodnota Y
>> hold on
>> plot(Y(1), Y(2), 'r*')
```

Opakujeme následující 3 kroky:

```
>> F = [ a*Y(1) - b*Y(1)*Y(2) ; -c*Y(2) + d*Y(1)*Y(2) ];
>> Y = Y + h * F; % nova hodnota Y
>> plot(Y(1), Y(2), 'r*')
```

Collatzova metoda

```
>> h=0.1;
>> Y = [15; 15]; % vychazi hodnota Y
>> hold on
>> plot(Y(1), Y(2), 'r*')
```

Opakujeme následující kroky:

```
>> F = [ a*Y(1) - b*Y(1)*Y(2) ; -c*Y(2) + d*Y(1)*Y(2) ];
>> Yp = Y + 0.5* h * F; % pomocny bod Yp
>> Fp = [ a*Yp(1) - b*Yp(1)*Yp(2) ; -c*Yp(2) + d*Yp(1)*Yp(2) ];
>> Y = Y + h * Fp; % nova hodnota Y
>> plot(Y(1), Y(2), 'r*')
```