

Funkce více proměnných. Spojitost, parciální derivace

Spojitost funkce

je podstatná vlastnost, která se objevuje v předpokladech mnoha vět a výpočetních postupů (algoritmů).

Definice. Říkáme, že funkce f (n proměnných) je spojitá v bodě $A \in D(f)$, jestliže existuje

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A).$$

Poznámka. Spojitost funkce v bodě A vzhledem k množině M , kde $A \in D(f) \cap M$ znamená, že pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v M platí implikace: $X_k \rightarrow A \Rightarrow f(X_k) \rightarrow f(A)$.

Říkáme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq D(f)$, jestliže v každém bodě $X \in M$ je spojitá vzhledem k množině M .

Základní věty o spojitosti

Věta 3.18 o spojitosti součtu, rozdílu, součinu, podílu dvou funkcí a spojitosti funkce absolutní hodnota v bodě resp. na množině.

Věta 3.19 o spojitosti složené funkce

Věta 4.22 z MAT I (spojitost tzv. základních funkcí jedné prom.)

Funkce mocninná, exponenciální, logaritmická, funkce goniometrické, cyklometrické a funkce abs. hodnota jsou **spojité v každém bodě svého def. oboru**. Tedy též v každém intervalu, který je částí $D(f)$.

Důsledek předchozích vět. Libovolná funkce více proměnných, která vznikla operacemi sčítání, odečítání, násobení, dělení a/nebo skládání funkcí jedné proměnné z Věty 4.22 **je spojitá v každém bodě svého def. oboru**. (Takto vzniklým funkcím budeme říkat elementární.)

Derivace

Derivace **funkce jedné prom.** $y = f(x)$ v bodě a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Popisuje chování funkce v daném bodě, tj. růst nebo pokles, ale navíc i rychlost (tempo, míru) růstu, resp. poklesu.

geometrický význam: směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$

Poznámka. Hodnoty funkce tangens

Funkce dvou proměnných $f(x, y)$:

Definice: Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme **parciální derivací** funkce f

podle proměnné x v bodě $A = [a_1, a_2]$.

Značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ nebo $f_x(A)$

Geometrický význam: směrnice tečny ke grafu f v bodě $[A, f(A)]$,
t.j. tangens orientovaného úhlu, který tečna svírá s přímkou jdoucí bodem A rovnoběžně s osou x .

Analogicky: parciální derivace podle proměnné y

Značíme $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ nebo $f_y(A)$

Příklad 1. $f(x, y) = \frac{2}{x^2} - x^2 \sqrt[3]{y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cdot (-2) x^{-3} - 2x \sqrt[3]{y} = -\frac{4}{x^3} - 2x \sqrt[3]{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 - x^2 \cdot \frac{1}{3} y^{-2/3} = -\frac{x^2}{3 \sqrt[3]{y^2}}$$

Příklad 2. $f(x, y) = \ln(\sqrt{x} - 2y^3)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2y^3} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-6y^2}{\sqrt{x} - 2y^3}$$

Parciální derivace funkce n -proměnných $f(\mathbf{X}) = f(x_1, \dots, x_n)$ **podle** proměnné x_i **v bodě** A

Značíme ji $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ nebo $f_{x_i}(A)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h \vec{e}_i) - f(A)}{h},$$

kde $\vec{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, n$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

\vec{e}_i je jednotkový vektor v kladném směru osy x_i

Je-li v definici obecně jednotkový vektor \vec{u} , pak máme **derivaci** funkce f **ve směru** \vec{u} v bodě A (podrobněji příště).