Funkce více proměnných. Spojitost a drivace

Spojitost funkce

je podstatná vlastnost, která se objevuje v předpokladech mnoha vět a výpočetních postupů (algoritmů).

Definice. Říkáme, že funkce $\boldsymbol{f}$ (n proměnných) je spojitá v bodě $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{f})$, jestliže existuje

$$\lim_{\boldsymbol{X} \to \boldsymbol{A}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}).$$

Poznámka. Spojitost funkce v bodě A vzhledem k množině M, kde $A \in D(f) \cap M$ znamená, že pro každou posloupnost bodů $\{X_k\}$ v M platí implikace: $X_k \to A \Rightarrow f(X_k) \to f(A)$.
Říkáme, že funkce f je spojitá na množině $M \subseteq D(f)$, jestliže v každém bodě $X \in M$ je spojitá vzhledem k množině M.

Základní věty o spojitosti

Věta 3.18 o spojitosti součtu, rozdílu, součinu, podílu dvou funkcí a spojitosti funkce absolutní hodnota v bodě resp. na množině.

Věta 3.19 o spojitosti složené funkce

Věta 4.22 z MAT I (spojitost tzv. základních funkcí jedné prom.)
Funkce mocninná, exponenciální, logaritmická, funkce goniometrické, cyklometrické a funkce abs. hodnota jsou spojité v každém bodě svého def. oboru. Tedy též v každém intervalu, který je částí $D(f)$.

Důsledek předchozích vět. Libovolná funkce více proměnných, která vznikla operacemi sčítání, odečítání, násobení, dělení a/nebo skládání funkcí jedné proměnné z Věty 4.22 je spojitá v každém bodě svého def. oboru. (Takto vzniklým funkcím budeme říkat elementární.)

Derivace

Derivace funkce jedné prom. $\boldsymbol{y = f(x)}$ v bodě $\boldsymbol{a}$:

$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}},$$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

Popisuje chování funkce v daném bodě, tj. růst nebo pokles,
ale navíc i rychlost (tempo, míru) růstu, resp. poklesu.

geometrický význam: směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$

Poznámka. Hodnoty funkce tangens

Funkce dvou proměnných $f(x, y)$:

Definice: Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h},$$

pak její hodnotu nazýváme parciální derivací funkce f

podle proměnné x v bodě $A = [a_1, a_2]$.

Značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$ nebo $f_x(A)$

Geometrický význam: směrnice tečny ke grafu f v bodě $[A, f(A)]$, t.j. tangens orientovaného úhlu, který tečna svírá s přímkou jdoucí bodem A rovnoběžně s osou x.

Analogicky: parciální derivace podle proměnné y

Značíme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$ nebo $f_y(A)$

Příklad 1. $\boldsymbol{f(x,y) = \dfrac{2}{x^2} - x^2\,\sqrt[3]{y}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\cdot(-2)\,x^{-3} - 2x\,\sqrt[3]{y} = -\frac{4}{x^3} - 2x\,\sqrt[3]{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - x^2\cdot\frac{1}{3}\,y^{-2/3} = -\,\frac{x^2}{3\,\sqrt[3]{y^2}}$$

Příklad 2. $\boldsymbol{f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x} - 2y^3\right)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x}-2y^3}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-6y^2}{\sqrt{x}-2y^3}$$

Parciální derivace funkce n-proměnných $f(X) = f(x_1, .., x_n)$ podle proměnné x_i v bodě A

Značíme ji $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(A)$ nebo $f_{x_i}(A)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\,\overrightarrow{e}_i) - f(A)}{h},$$

kde $\overrightarrow{e}_i = (0, .., 0, 1, 0, ..0)$, $i = 1, 2, ..., n$

pokud tato limita existuje a je vlastní.

$\overrightarrow{e}_i$ je jednotkový vektor v kladném směru osy x_i

Je-li v definici obecně jednotkový vektor $\overrightarrow{u}$, pak máme derivaci funkce f ve směru $\overrightarrow{u}$ v bodě A (podrobněji příště).