

Funkce více proměnných, parciální derivace 1. řádu

Nalezené nesrovnalosti ve výsledcích nebo připomínky k tomuto souboru sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz).

Vypočítejte parciální derivace dané funkce podle všech proměnných. Napište gradient dané funkce.

Poznámka. Příklady č. 1 až 11 poskytují částečné výsledky pro řešení úlohy č. 4 ze souboru Matematika II - vybrané úlohy ze zkoušek (tyto webové stránky).

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}}, \frac{-9y}{\sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}} \right)$
2. $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$
3. $f(x, y) = \sqrt{x - y^2 + 2}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x - y^2 + 2}}, \frac{-y}{\sqrt{x - y^2 + 2}} \right)$
4. $f(x, y) = \ln(3x - y + 2)$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{3}{3x - y + 2}, \frac{-1}{3x - y + 2} \right)$
5. $f(x, y) = \frac{3x - 2y}{y}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{3}{y}, -\frac{3x}{y^2} \right)$
6. $f(x, y) = \ln(xy^2)$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y} \right)$
7. $f(x, y) = \cos x + \frac{1}{2} \sin y - 3$ $\text{grad}f(x, y) = \left(-\sin x, \frac{1}{2} \cos y \right)$
8. $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} - x \sqrt{y}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{-y}{2 \cdot \sqrt{x^3}} - \sqrt{y}, \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y}} \right)$
9. $f(x, y) = (x^2 + y) e^{-2x}$ $\text{grad}f(x, y) = (2x e^{-2x} - 2(x^2 + y) e^{-2x}, e^{-2x})$
10. $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x^2 + y^2}, xy + \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$
11. $f(x, y) = \ln(xy) - \sqrt{x^2 + y^2 - 20}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 20}}, \frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 20}} \right)$
12. $f(x, y) = x^3 + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{6} x^2 y^4 - 15x$ $\text{grad}f(x, y) = \left(3x^2 - \frac{1}{3} x y^4 - 15, y^2 - \frac{2}{3} x^2 y^3 \right)$
13. $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \right)$

14. $f(\varphi, \psi) = \sin \varphi \cdot \cos \psi$ $\text{grad}f(\varphi, \psi) = (\cos \varphi \cos \psi, -\sin \varphi \sin \psi)$
15. $g(u, v) = v \cdot \text{tg}(u^2 v^3)$ $\text{grad}g(u, v) = \left(\frac{2u v^4}{\cos^2(u^2 v^3)}, \text{tg}(u^2 v^3) + \frac{3u^2 v^3}{\cos^2(u^2 v^3)} \right)$
16. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{-3x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}}, \frac{-3y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^5}} \right)$
17. $f(x, y) = \sin(x^2 y) + \frac{x^2}{3}$ $\text{grad}f(x, y) = \left(2xy \cos(x^2 y) + \frac{2x}{3}, x^2 \cos(x^2 y) \right)$
18. $f(x, y) = \text{arccotg}(x - 2y)$ $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{-1}{1 + (x - 2y)^2}, \frac{2}{1 + (x - 2y)^2} \right)$
19. $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
 $\text{grad}f(x, y) = \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$
20. $f(x, y, z) = x \sqrt{yz}$ $\text{grad}f(x, y, z) = \left(\sqrt{yz}, \frac{xz}{2 \cdot \sqrt{yz}}, \frac{xy}{2 \cdot \sqrt{yz}} \right)$
21. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{2y} - \frac{4}{x}$ $\text{grad}f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z} + \frac{4}{x^2}, -\frac{z^2}{2y^2}, \frac{z}{y} - \frac{x^2}{z^2} \right)$
22. $f(x, y, z) = x^2 yz + \ln y - 15$ $\text{grad}f(x, y, z) = \left(2xyz, x^2 z + \frac{1}{y}, x^2 y \right)$
23. $f(u, v, t) = t \sqrt{u^2 + v^2}$ $\text{grad}f(u, v, t) = \left(\frac{tu}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{tv}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \sqrt{u^2 + v^2} \right)$
24. $f(t, u, v) = \ln(tu) - e^{uv} + \cos(tv)$ $\text{grad}f(t, u, v) = \left(\frac{1}{t} - v \sin(tv), \frac{1}{u} - v e^{uv}, -u e^{uv} - t \sin(tv) \right)$

Literatura

- [1] J. Neustupa: **Matematika II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2015.
- [2] E. Brožíková, M. Kittlerová: **Sbírka příkladů z Matematiky II**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2003, dotisk 2007. (*Sbírka řešených i neřešených příkladů*)
- [3] J. Stewart: **Calculus**. Brooks/Cole Publishing Company, Belmont, California 1991.