

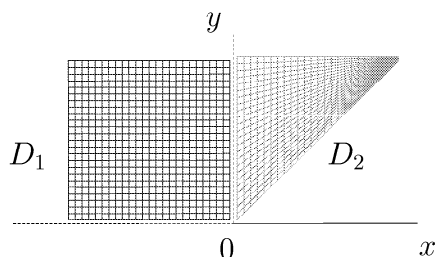
II. Diferenciální počet funkcí více proměnných

II.1. Definiční obor funkce $z = f(x, y)$

- Určete definiční obor funkcí a zakreslete jej :

Příklad 42. $z = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$

Řešení : Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :



$$x^2y > 0 \implies y > 0, \quad x \neq 0$$

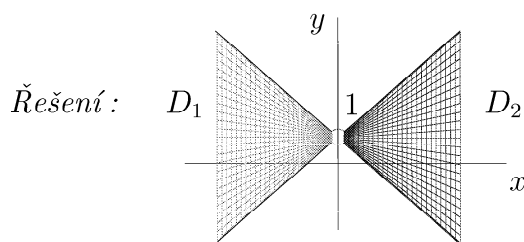
$$y - x > 0 \implies y > x$$

$$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y > 0\},$$

$$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y > x\}.$$

Pro definiční obor dané funkce dostaneme $D = D_1 \cup D_2$ ■

Příklad 43. $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$



Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

$$-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \quad \text{a} \quad x \neq 0.$$

Takže platí : $x > 0 : -x \leq y - 1 \leq x \implies -x + 1 \leq y \leq x + 1$

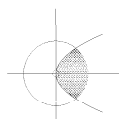
$x < 0 : -x \geq y - 1 \geq x \implies -x + 1 \geq y \geq x + 1$

$$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, \quad x + 1 \leq y \leq 1 - x\},$$

$$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, \quad 1 - x \leq y \leq x + 1\}.$$

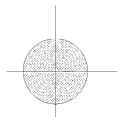
Pro definiční obor dané funkce dostaneme $D = D_1 \cup D_2$. ■

44. $z = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$



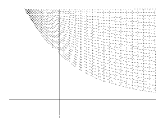
$$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : 0 \neq x^2 + y^2 < 1; x \geq y^2\}]$$

45. $z = \sqrt{\ln \frac{16}{x^2 + y^2}}$



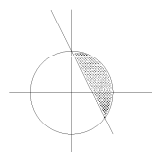
$$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 16, [x, y] \neq [0, 0]\}]$$

46. $z = 3 - 7 \ln(x + \ln y)$



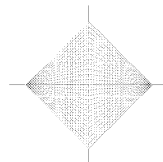
$$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : y > e^{-x}\}]$$

47. $z = \sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$



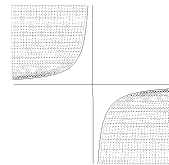
$$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \leq 16; y \geq 4 - 2x\}]$$

48. $z = \frac{3}{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$



$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : |x| + |y| < 1\}]$

49. $z = \sqrt{xy - 4}$



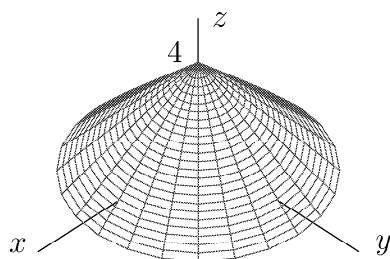
$[D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : xy \geq 4\}]$

• Určete a načrtněte definiční obor, zapište graf funkce a načrtněte v \mathbb{E}_3 plochu, která je grafem dané funkce :

Příklad 50. $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení :

$x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \geq 0\} \Rightarrow D(f) = \mathbb{E}_2$



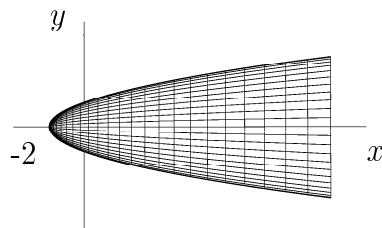
Grafem funkce je množina

$\text{gr}(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in D_f, z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}.$

■

Příklad 51. $f(x, y) = \sqrt{x - y^2} + 2$

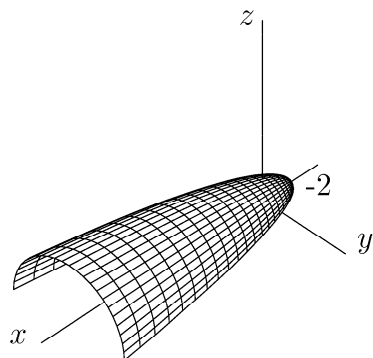
Řešení :



$x - y^2 + 2 \geq 0 \Rightarrow$

$D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x - y^2 + 2 \geq 0\}.$

Hranicí $D(f)$ je parabola o rovnici $x + 2 = y^2$ s osou v ose x a vrcholem $[-2, 0]$.



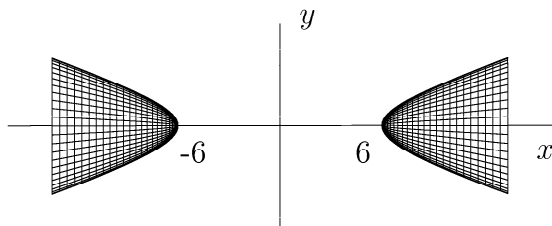
Grafem funkce je množina

$\text{gr}(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in D_f \subset \mathbb{E}_2, z = \sqrt{x - y^2} + 2\},$
 což je "horní" polovina rotačního paraboloidu o rovnici $x + 2 = y^2 + z^2$ s osou rotace v ose x a vrcholem $[-2, 0, 0]$.

■

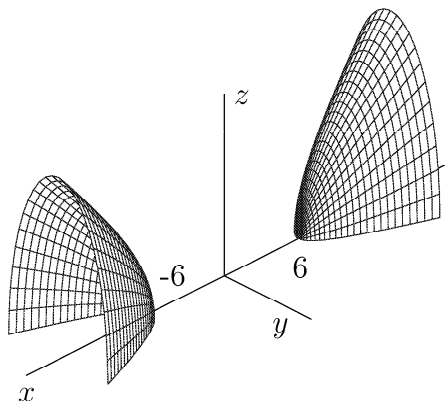
Příklad 52. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$

Řešení :



$$x^2 - 9y^2 - 36 \geq 0 \Rightarrow D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 - 9y^2 - 36 \geq 0\},$$

hranicí je hyperbola o rovnici $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ s vrcholy $[-6, 0]$ a $[6, 0]$



Grafem funkce je množina

$$\text{gr}(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; [x, y] \in D(f) \subset \mathbb{E}_2, z = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}\}$$

a to je "horní" polovina eliptického dvoudílného hyperboloidu s vrcholy $[-6, 0, 0]$ a $[6, 0, 0]$ ■

II.2. Limita a spojitost funkce

- Vyšetřete limity funkce v bodě :

Příklad 53. $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Řešení : Využijeme skutečnost, že $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (x^2 + y^2) = 0$ a provedeme substituci

$$t = x^2 + y^2. \text{ Potom } \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \blacksquare$$

Příklad 54.* $\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}, [x, y] \in M, \text{ kde } M = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x - y \neq 0\}$

Řešení : Jde o neučitý výraz " $\frac{0}{0}$ ", ale nabízí se elementární úprava, kterou provedeme

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)} = \\ &\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)(x^2 + y^2)} = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

55. $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{e^{2(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2}$

[2]

56. $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\text{tg}(x^2 + y^4)}{3(x^2 + y^4)}$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

Příklad 57. Vyšetřete spojitost funkce $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}, & [x, y] \neq [0, 0] \\ 2, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$
v bodě $[0, 0]$.

Řešení: Funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě $[x_0, y_0]$, právě když $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

$$\begin{aligned} \text{V našem případě } \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1} &= \text{„0/0“} = \left| \begin{array}{l} \text{substituce} \\ x^2 y^2 = t \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t + 1} - 1} \stackrel{\text{e'H}}{=} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = 2 = f(0, 0) \implies \text{ daná funkce } f(x, y) \text{ je spojitá v bodě } [0, 0]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

• Určete množiny, na nichž jsou dané funkce definované :

58. $f(x, y) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + y^4 + 1}$ [\mathbb{E}_2]

59. $f(x, y, z) = e^{z^2+x} \cdot \sin(x + y)$ [\mathbb{E}_3]

60. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 2y}$ [$D(f) = \mathbb{E}_2 \setminus \{y = \frac{x^2}{2}\}$]

61. $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ [$D(f) = \mathbb{E}_2 \setminus [0, 0]$, lze spojitě dodefinovat $f(0, 0) = \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$]

62. $f(x, y, z) = \frac{1}{\ln \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}}$ [$D(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 + z^2 \neq 1\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$]

63. $f(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ [$D(f) = \mathbb{E}_3 \setminus [0, 0, 0]$, lze spojitě dodefinovat $f(0, 0, 0) = 0$]

64. $f(x, y, z) = \frac{1}{|xy| + |z|}$ [$D(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : xy \neq 0 \wedge z \neq 0\}$]

65. $f(x, y, z) = \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x}$ [$D(f) = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x \neq 0, x \neq 1, y \neq -4\}$]

II.3. Parciální derivace funkce

Značení pro funkci $z = f(x, y)$:

$$\begin{aligned} 1. \text{ parciální derivace : } \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

1. parciální derivace v bodě $[a, b]$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{[a, b]} = f_x(a, b); \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{[a, b]} = f_y(a, b)$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ parciální derivace : } \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_y)_x \end{aligned}$$

- Najděte parciální derivace prvního řádu daných funkcí podle jejich proměnných .

Příklad 66. $f(x, y) = (2x - 3y)^4$

Řešení : $f_x = 4(2x - 3y)^3 \cdot 2$, $f_y = 4(2x - 3y)^3 \cdot (-3)$ ■

Příklad 67. $f(x, y) = 5x^4y^2 + \frac{x}{y} + 2x^2 - 3y$

Řešení : $f_x = 20x^3y^2 + \frac{1}{y} + 4x$, $f_y = 10x^4y - \frac{x}{y^2} - 3$ ■

Příklad 68. $f(x, y) = y^{x^2+3}$, $y > 0$

Řešení : $f_x = y^{x^2+3} \cdot \ln y \cdot 2x$, $f_y = (x^2 + 3) \cdot y^{x^2+2}$ ■

Příklad 69. $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, pro $|x| > |y|$

Řešení : $f_x = y \cdot \frac{-2x}{2(x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{-xy}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}$

$$f_y = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - y \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - y^2 + y^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}. \quad \blacksquare$$

Příklad 70. $f(x, y, z) = (x^y)^z$

Řešení : $f(x, y, z) = x^{yz}$, $f_x = yzx^{yz-1}$, $f_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z$, $f_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y$. ■

- Vypočítejte parciální derivace dané funkce podle všech proměnných:

71. $f(x, y) = \ln(3x - y + 2)$ $[f_x = \frac{3}{3x - y + 2}, f_y = \frac{-1}{3x - y + 2}]$

72. $f(x, y) = \frac{3x - 2y}{y}$ $[f_x = \frac{3}{y}, f_y = -\frac{3x}{y^2}]$

73. $f(x, y) = \ln(xy^2)$ $[f_x = \frac{1}{x}, f_y = \frac{2}{y}]$

74. $f(x, y) = \cos x + \frac{1}{2} \sin y - 3$ $[f_x = -\sin x, f_y = \frac{1}{2} \cos y]$

75. $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} - x\sqrt{y}$ $[f_x = \frac{-y}{2 \cdot \sqrt{x^3}} - \sqrt{y}, f_y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y}}]$

76. $f(x, y) = (x^2 + y) e^{-2x}$ $[f_x = 2x e^{-2x} - 2(x^2 + y) e^{-2x}, f_y = e^{-2x}]$

77. $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ $[f_x = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x^2 + y^2}, f_y = xy + \frac{x}{x^2 + y^2}]$

78. $f(x, y) = \ln(xy) - \sqrt{x^2 + y^2} - 20$ $[f_x = \frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - 20}, f_y = \frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - 20}]$

79. $f(x, y) = x^3 + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{6} x^2 y^4 - 15x$ $[f_x = 3x^2 - \frac{1}{3} x y^4 - 15, f_y = y^2 - \frac{2}{3} x^2 y^3]$

80. $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$ $[f_x = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, f_y = \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}]$

81. $f(\varphi, \psi) = \sin \varphi \cdot \cos \psi$ $[f_\varphi = \cos \varphi \cos \psi, f_\psi = -\sin \varphi \sin \psi]$

82. $g(u, v) = v \cdot \operatorname{tg}(u^2 v^3)$ $[g_u = \frac{2uv^4}{\cos^2(u^2 v^3)}, g_v = \operatorname{tg}(u^2 v^3) + \frac{3u^2 v^3}{\cos^2(u^2 v^3)}]$

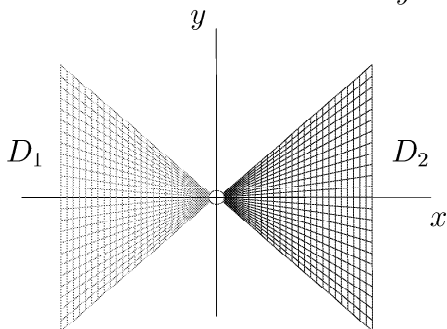
83. $f(t, u, v) = \ln(tu) - e^{uv} + \cos(tv)$ $[f_t = \frac{1}{t} - v \sin(tv), f_u = \frac{1}{u} - v e^{uv}, f_v = -u e^{uv} - t \sin(tv)]$

Příklad 84. Určete obor diferencovatelnosti funkce $f(x, y) = x\sqrt{x^2 - y^2}$.

Řešení : $f_x = \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

Z teorie víme, že spojitost parciálních derivací je postačující pro diferencovatelnost funkcí. V tomto příkladě je to podmínka:

$$x^2 - y^2 > 0 \implies |y| < |x|.$$



$$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y \in (x, -x)\},$$

$$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y \in (-x, x)\}.$$

■

Příklad 85. Je dána funkce $f(x, y) = \ln(|x| + y) + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$. Určete

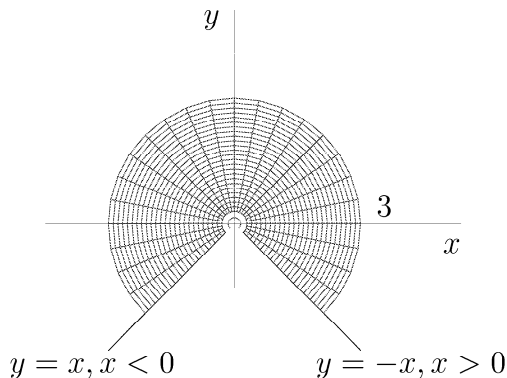
- podmínky pro definiční obor a definiční obor graficky znázorněte,
- hodnotu $f(A)$, kde $A = [-1, 2]$,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$.

Řešení :

- podmínky pro definiční obor:

$$|x| + y > 0 \implies y > -|x|$$

$$9 - x^2 - y^2 > 0 \implies x^2 + y^2 < 9$$



- $f(-1, 2) = \ln(|-1| + 2) + \frac{1}{\sqrt{9 - 1 - 4}} = \ln 3 + \frac{1}{2}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \left(\frac{(-x)'}{|x| + y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{(9 - x^2 - y^2)^3}} \right) \Big|_A = -\frac{11}{24}.$

■

86. Dokažte, že funkce $z = f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ vyhovuje diferenciální rovnici $y^2 z_x + xy z_y = 2xz$ pro všechna $[x, y] \in \mathbb{E}_2$.

[Návod : Stačí spočítat z_x, z_y a do rovnice dosadit]

- Vypočtete parciální derivace dané funkce v bodě A :

87. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $A = [2, 0]$ $[z_x(A) = 1, z_y(A) = 0]$

88. $z = \frac{y}{x}$, $A = [3, 2]$ $[z_x(A) = -2/9, z_y(A) = 1/3]$

89. $f = x^2 e^y \sin z$, $A = [1, 0, \pi/6]$ $[f_x(A) = 1, f_y(A) = 1/2, f_z(A) = \sqrt{3}/2]$

90. $f = \ln(x^2 - y + 3z)$, $A = [2, 1, 1]$ $[f_x(A) = 2/3, f_y(A) = -1/6, f_z(A) = 1/2]$