

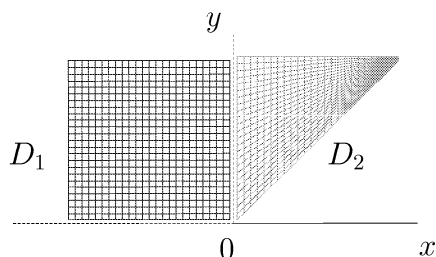
## II. Diferenciální počet funkcí více proměnných

### II.1. Definiční obor funkce $z = f(x, y)$

- Určete definiční obor funkcí a zakreslete jej :

**Příklad 42.**  $z = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$

*Řešení :* Proměnné  $x$  a  $y$  musí splňovat současně tyto podmínky :



$$x^2y > 0 \quad \longrightarrow \quad y > 0, \quad x \neq 0$$

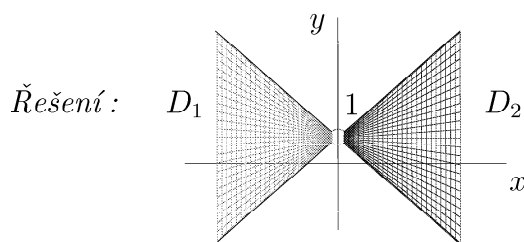
$$y - x > 0 \quad \longrightarrow \quad y > x$$

$$\mathcal{D}_1 = \{[x, y] \in E_2 : x < 0, y > 0\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{[x, y] \in E_2 : x > 0, y > x\}.$$

Pro definiční obor dané funkce dostaneme  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$  ■

**Příklad 43.**  $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$



Proměnné  $x$  a  $y$  musí splňovat současně tyto podmínky :

$$-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \quad \text{a} \quad x \neq 0.$$

Takže platí :  $x > 0 : -x \leq y-1 \leq x \quad \longrightarrow \quad -x+1 \leq y \leq x+1$

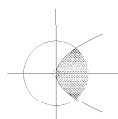
$x < 0 : -x \geq y-1 \geq x \quad \longrightarrow \quad -x+1 \geq y \geq x+1$

$$\mathcal{D}_1 = \{[x, y] \in E_2 : x < 0, \quad x+1 \leq y \leq 1-x\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{[x, y] \in E_2 : x > 0, \quad 1-x \leq y \leq x+1\}.$$

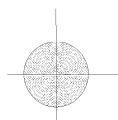
Pro definiční obor dané funkce dostaneme  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ . ■

44.  $z = \frac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$



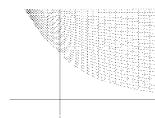
$$[0 \neq x^2 + y^2 < 1; x \geq y^2]$$

45.  $z = \sqrt{\ln \frac{16}{x^2 + y^2}}$



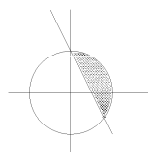
$$[x^2 + y^2 \leq 16, [x, y] \neq [0, 0]]$$

46.  $z = 3 - 7 \ln(x + \ln y)$



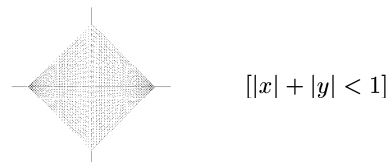
$$[y > e^{-x}]$$

47.  $z = \sqrt{2x + y - 4} + \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

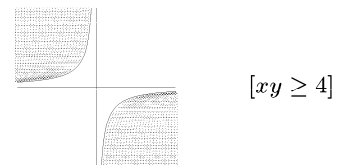


$$[x^2 + y^2 \leq 16; y \geq 4 - 2x]$$

48.  $z = \frac{3}{\sqrt{1 - |x| - |y|}}$



49.  $z = \sqrt{xy - 4}$

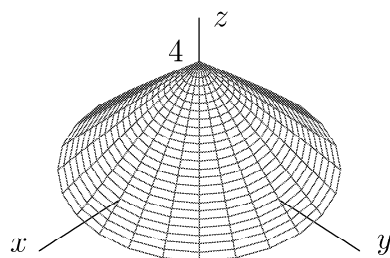


• Určete a načrtněte definiční obor, zapište graf funkce a načrtněte v  $E_3$  plochu, která je grafem dané funkce :

**Příklad 50.**  $f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$

Řešení :

$$x^2 + y^2 \geq 0 \rightarrow \mathcal{D} = \{[x, y] \in E_2; x^2 + y^2 \geq 0\} \rightarrow \mathcal{D} = E_2$$



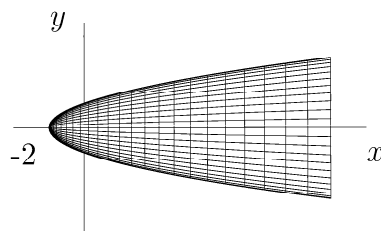
Grafem funkce je množina

$$\text{gr}(f) = \{[x, y, z] \in E_3; [x, y] \in \mathcal{D}, z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

■

**Příklad 51.**  $f(x, y) = \sqrt{x - y^2 + 2}$

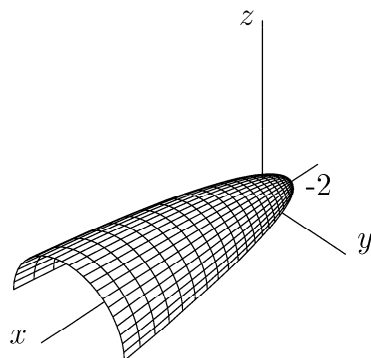
Řešení :



$$x - y^2 + 2 \geq 0 \rightarrow$$

$$\mathcal{D} = \{[x, y] \in E_2; x - y^2 + 2 \geq 0\}.$$

Hranicí  $\mathcal{D}$  je parabola o rovnici  $x + 2 = y^2$  s osou v ose  $x$  a vrcholem  $[-2, 0]$



Grafem funkce je množina

$$\text{gr}(f) =$$

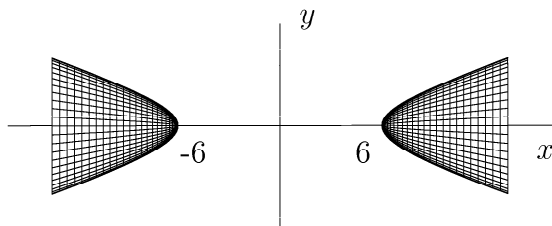
$$= \{[x, y, z] \in E_3; [x, y] \in \mathcal{D} \subset E_2, z = \sqrt{x - y^2 + 2}\},$$

což je horní polovina rotačního paraboloidu o rovnici  $x + 2 = y^2 + z^2$  s osou v ose  $x$  a vrcholem  $[-2, 0, 0]$

■

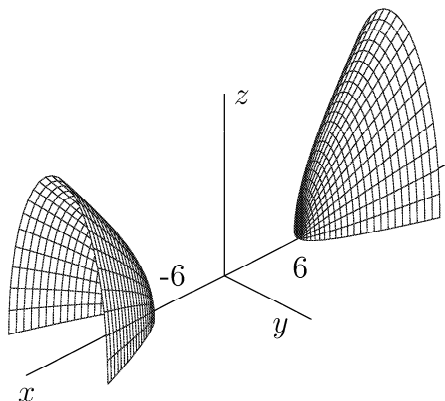
**Příklad 52.**  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}$

Řešení :



$$x^2 - 9y^2 - 36 \geq 0 \rightarrow \mathcal{D} = \{[x, y] \in E_2; x^2 - 9y^2 - 36 \geq 0\},$$

hranicí je hyperbola o rovnici  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$   
s vrcholy  $[-6, 0]$  a  $[6, 0]$



Grafem funkce je množina

$$\text{gr}(f) = \{[x, y, z] \in E_3; [x, y] \in \mathcal{D} \subset E_2, z = \sqrt{x^2 - 9y^2 - 36}\}$$

a to je horní polovina eliptického dvoudílného hyperboloidu s vrcholy  $[-6, 0, 0]$  a  $[6, 0, 0]$  ■

## II.2. Limita a spojitost funkce

- Vyšetřete limity funkce v bodě :

**Příklad 53.**  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Řešení : Využijeme skutečnost, že  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} (x^2 + y^2) = 0$  a provedeme substituci

$$t = x^2 + y^2. \text{ Potom } \lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad \blacksquare$$

**Příklad 54.\***  $\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4}, [x, y] \in M, \text{ kde } M = \{[x, y] \in E_2; x - y \neq 0\}$

Řešení : Jde o neučitý výraz " $\frac{0}{0}$ ", ale nabízí se elementární úprava, kterou provedeme

$$\begin{aligned} &= \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} = \lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x + y)(x^2 + y^2)} = \\ &\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [1,1] \\ [x,y] \in M}} \frac{x^2 + xy + y^2}{(x + y)(x^2 + y^2)} = \frac{3}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

55.  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{e^{2(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2}$

[2]

56.  $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\text{tg}(x^2 + y^4)}{3(x^2 + y^4)}$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

**Příklad 57.** Vyšetřete spojitost funkce  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}, & [x, y] \neq [0, 0] \\ 2, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$   
v bodě  $[0, 0]$ .

*Řešení:* Funkce  $f(x, y)$  je spojitá v bodě  $[x_0, y_0]$ , právě když  $\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ .

$$\begin{aligned} \text{V našem případě } \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \left[ \begin{array}{l} \text{substituce} \\ x^2 y^2 = t \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{t + 1} - 1} \stackrel{\text{e'H}}{=} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = 2 = f(0, 0) \rightarrow \text{ daná funkce } f(x, y) \text{ je spojitá v bodě } [0, 0]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

• Určete množiny, na nichž jsou dané funkce definované a spojité :

$$58. f(x, y) = \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + y^4 + 1} \quad [E_2]$$

$$59. f(x, y, z) = e^{z^2+x} \cdot \sin(x + y) \quad [E_3]$$

$$60. f(x, y) = \frac{1}{x^2 - 2y} \quad [E_2 - \{y = \frac{x^2}{2}\}]$$

$$61. f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad [E_2, \text{lze dodefinovat } f(0, 0) = \lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0]$$

$$62. f(x, y, z) = \frac{1}{\ln \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}} \quad [E_3 - [0, 0, 0] \cup \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}]$$

$$63. f(x, y, z) = \frac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad [E_3, \text{lze dodefinovat } f(0, 0, 0) = 0]$$

$$64. f(x, y, z) = \frac{1}{|xy| + |z|} \quad [E_3 - (\{z = 0\} \cap \{xy = 0\})]$$

$$65. f(x, y, z) = \frac{y + 4}{x^2 y - xy + 4x^2 - 4x} \quad [E_3 - (\{x = 0\} \cup \{x = 1\} \cup \{y = -4\})]$$

### II.3. Parciální derivace funkce

Značení pro funkci  $z = f(x, y)$ :

$$\begin{aligned} 1. \text{ parciální derivace : } \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

1. parciální derivace v bodě  $[a, b]$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{[a, b]} = f_x(a, b); \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{[a, b]} = f_y(a, b)$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ parciální derivace : } \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \end{aligned}$$

- Najděte parciální derivace prvního řádu daných funkcí podle jejich proměnných .

**Příklad 66.**  $f(x, y) = (2x - 3y)^4$

Řešení :  $f_x = 4(2x - 3y)^3 \cdot 2$  ,  $f_y = 4(2x - 3y)^3 \cdot (-3)$  ■

**Příklad 67.**  $f(x, y) = 5x^4y^2 + \frac{x}{y} + 2x^2 - 3y$

Řešení :  $f_x = 20x^3y^2 + \frac{1}{y} + 4x$  ,  $f_y = 10x^4y - \frac{x}{y^2} - 3$  ■

**Příklad 68.**  $f(x, y) = y^{x^2+3}$ ,  $y > 0$

Řešení :  $f_x = y^{x^2+3} \cdot \ln y \cdot 2x$  ,  $f_y = (x^2 + 3) \cdot y^{x^2+2}$  ■

**Příklad 69.**  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ , pro  $|x| > |y|$

Řešení :  $f_x = y \cdot \frac{-2x}{2(x^2 - y^2)^{3/2}} = \frac{-xy}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}$

$$f_y = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - y \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - y^2 + y^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{x^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}.$$
 ■

**Příklad 70.**  $f(x, y, z) = (x^y)^z$

Řešení :  $f(x, y, z) = x^{yz}$ ,  $f_x = yzx^{yz-1}$ ,  $f_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z$ ,  $f_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y$ . ■

- Vypočítejte parciální derivace dané funkce podle všech proměnných:

71.  $f(x, y) = \ln(3x - y + 2)$   $[f_x = \frac{3}{3x - y + 2}, f_y = \frac{-1}{3x - y + 2}]$

72.  $f(x, y) = \frac{3x - 2y}{y}$   $[f_x = \frac{3}{y}, f_y = -\frac{3x}{y^2}]$

73.  $f(x, y) = \ln(xy^2)$   $[f_x = \frac{1}{x}, f_y = \frac{2}{y}]$

74.  $f(x, y) = \cos x + \frac{1}{2} \sin y - 3$   $[f_x = -\sin x, f_y = \frac{1}{2} \cos y]$

75.  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}} - x\sqrt{y}$   $[f_x = \frac{-y}{2 \cdot \sqrt{x^3}} - \sqrt{y}, f_y = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y}}]$

76.  $f(x, y) = (x^2 + y) e^{-2x}$   $[f_x = 2x e^{-2x} - 2(x^2 + y) e^{-2x}, f_y = e^{-2x}]$

77.  $f(x, y) = \frac{xy^2}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$   $[f_x = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x^2 + y^2}, f_y = xy + \frac{x}{x^2 + y^2}]$

78.  $f(x, y) = \ln(xy) - \sqrt{x^2 + y^2} - 20$   $[f_x = \frac{1}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - 20}, f_y = \frac{1}{y} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - 20}]$

79.  $f(x, y) = x^3 + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{6} x^2 y^4 - 15x$   $[f_x = 3x^2 - \frac{1}{3} x y^4 - 15, f_y = y^2 - \frac{2}{3} x^2 y^3]$

80.  $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$   $[f_x = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, f_y = \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}]$

81.  $f(\varphi, \psi) = \sin \varphi \cdot \cos \psi$   $[f_\varphi = \cos \varphi \cos \psi, f_\psi = -\sin \varphi \sin \psi]$

82.  $g(u, v) = v \cdot \operatorname{tg}(u^2 v^3)$   $[g_u = \frac{2uv^4}{\cos^2(u^2 v^3)}, g_v = \operatorname{tg}(u^2 v^3) + \frac{3u^2 v^3}{\cos^2(u^2 v^3)}]$

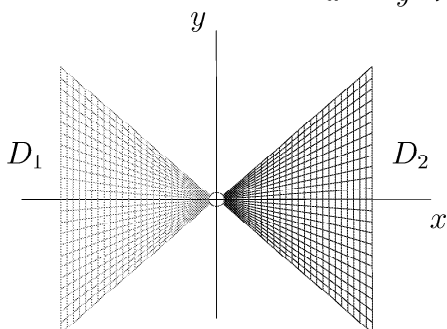
83.  $f(t, u, v) = \ln(tu) - e^{uv} + \cos(tv)$   $[f_t = \frac{1}{t} - v \sin(tv), f_u = \frac{1}{u} - v e^{uv}, f_v = -u e^{uv} - t \sin(tv)]$

**Příklad 84.** Určete obor diferencovatelnosti funkce  $f(x, y) = x\sqrt{x^2 - y^2}$ .

*Řešení :*  $f_x = \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{-xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

Z teorie víme, že spojitost parciálních derivací je postačující pro diferencovatelnost funkcí. V tomto příkladě je to podmínka:

$$x^2 - y^2 > 0 \rightarrow |y| < |x|.$$



$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \{[x, y] \in E_2 : x < 0, y \in (x, -x)\}, \\ \mathcal{D}_2 &= \{[x, y] \in E_2 : x > 0, y \in (-x, x)\}. \end{aligned}$$

■

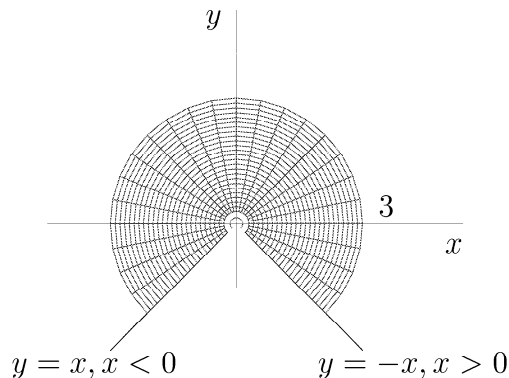
**Příklad 85.** Je dána funkce  $f(x, y) = \ln(|x| + y) + \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}$ . Určete

- podmínky pro definiční obor a definiční obor graficky znázorněte,
- hodnotu  $f(A)$ , kde  $A = [-1, 2]$ ,
- $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$ .

*Řešení :*

- podmínky pro definiční obor:

$$\begin{aligned} |x| + y > 0 &\rightarrow y > -|x| \\ 9 - x^2 - y^2 > 0 &\rightarrow x^2 + y^2 < 9 \end{aligned}$$



- $f(-1, 2) = \ln(|-1| + 2) + \frac{1}{\sqrt{9 - 1 - 4}} = \ln 3 + \frac{1}{2}$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \left( \frac{(-x)'}{|x| + y} - \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{(9 - x^2 - y^2)^3}} \right) \Big|_A = -\frac{11}{24}.$

■

86. Dokažte, že funkce  $z = f(x, y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$  vyhovuje diferenciální rovnici  $y^2 z_x + xy z_y = 2xz$  pro všechna  $[x, y] \in E_2$ .

[Návod : Stačí spočítat  $z_x, z_y$  a do rovnice dosadit]

- Vypočtete parciální derivace dané funkce v bodě  $A$  :

87.  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $A = [2, 0]$   $[z_x(A) = 1, z_y(A) = 0]$

88.  $z = \frac{y}{x}$ ,  $A = [3, 2]$   $[z_x(A) = -2/9, z_y(A) = 1/3]$

89.  $f = x^2 e^y \sin z$ ,  $A = [1, 0, \pi/6]$   $[f_x(A) = 1, f_y(A) = 1/2, f_z(A) = \sqrt{3}/2]$

90.  $f = \ln(x^2 - y + 3z)$ ,  $A = [2, 1, 1]$   $[f_x(A) = 2/3, f_y(A) = -1/6, f_z(A) = 1/2]$