II.4. Totální diferenciál a tečná rovina

Značení pro funkci $z = f(x, y)$:
(totální) diferenciál funkce f v bodě $A = [a_1, a_2]$:

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot (x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot (y - a_2)$$

Označme $d\,x = x - a_1$, $d\,y = y - a_2$. Pak

$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A) \cdot d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(A) \cdot d\,y$$

***Příklad* 91**. Je dána funkce $f(x, y) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$.

a) Určete a načrtněte oblasti, ve kterých je funkce diferencovatelná.
b) Napište diferenciál funkce v bodě $A = [x_0,\, y_0]$.

Řešení : Postačující podmínkou pro diferencovatelnost je spojitost parciálních derivací

$\Rightarrow$ spojitost funkcí $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{y}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2}$ $\quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0.$

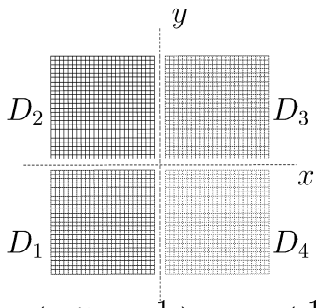
Dostaneme tyto množiny :

$D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y < 0\}$,

$D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x < 0, y > 0\}$,

$D_3 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y > 0\}$.

$D_4 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x > 0, y < 0\}$,



$$df(A) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\, dy \quad \text{tj.} \quad df(A) = \left(-\frac{y_0}{x_0^2} - \frac{1}{y_0}\right) dx + \left(\frac{1}{x_0} + \frac{x_0}{y_0^2}\right) dy$$

■

***Příklad* 92**. Určete totální diferenciál a přírůstek funkce $z = \dfrac{y}{x}$ v bodě $A = [2, 1]$ pro $\triangle x = 0.1$ a $\triangle y = 0.2$. Porovnejte je.

Řešení : Totální diferenciál v bodě A je $dz(A) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(A)\, dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\, dy$.

Přitom $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = -\dfrac{1}{4}$ $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = \dfrac{1}{2}$

$$dz(A) = -\frac{1}{4}\, dx + \frac{1}{2}\, dy.$$

Položíme-li $dx = \triangle x = 0.1$ a $dy = \triangle y = 0.2$, pak obdržíme hledaný diferenciál funkce f v bodě A při daných přírůstcích $\triangle x, \triangle y$:

$$dz(A) = -\frac{1}{4} \cdot 0.1 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.075,$$

přičemž přírůstek $\triangle z = z(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - z(x_0, y_0) = z(2.1, 1.2) - z(2, 1) = 0.071.$

■

***Příklad* 93**. Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližně přírůstek funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ při změně x od $x_1 = 1$ do $x_2 = 1.2$ a y od $y_1 = -3$ do $y_2 = -3.1$.

Řešení : Přírůstek přibližně nahradíme diferenciálem tj.

$$\triangle z \doteq dz(A) = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\cdot dy, \text{ kde } A=[1,-3],\ dx=0.2,\ dy=-0.1.$$

Spočítáme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(-\frac{y}{x^2})\right)\Big|_A = \frac{3}{10}\ ,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{1}{x}\right)\Big|_A = \frac{1}{10}.$$

Potom $\quad dz(A) = \frac{3}{10}\cdot 0.2 + \frac{1}{10}\cdot(-0.1) = 0.06 - 0.01 = 0.05.$ ■

***Příklad* 94**. Vypočítejte přibližně hodnotu výrazu $\ln(\sqrt{9.03}-\sqrt{0.99}-1)$ pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce.

Řešení : Položme $z(x,y)=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{y}-1)$, $x_0=9$, $y_0=1$, pak $dx=0.03$, $dy=-0.01$. Použijeme vztah

$$\triangle z = z(x+x_0,y+y_0)-z(x_0,y_0) \doteq \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot dy,$$

ze kterého dostaneme

$$z(x+x_0,y+y_0) \doteq z(x_0,y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot dy.$$

Připravme si :

$z(x_0,y_0)=\ln(\sqrt{9}-\sqrt{1}-1)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\Big|_{[9,1]} = \frac{1}{6},$

$\frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}-1}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right)\Big|_{[9,1]} = -\frac{1}{2}$. Nyní dosadíme a vypočteme hledanou hodnotu $\quad \ln(\sqrt{9.03}-\sqrt{0.99}-1) \doteq \frac{1}{6}\cdot 0.03 - \frac{1}{2}\cdot(-0.01) = 0.01\ .$ ■

***Příklad* 95**. Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $0,98^{3,04}$ pomocí totálního diferenciálu vhodně zvolené funkce.

Řešení : $z(x,y)=x^y$, $x_0=1$, $y_0=3$, tj. $A=[1,3]$, $dx=-0.02$, $dy=0.04$,

$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cdot x^{y-1},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y\ln x,\quad$ takže

$$z(0.98,3.04) \doteq z(A)+dz(A) = z(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A)\cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\cdot dy =$$

$$= 1+3\cdot(-0.02)+0 = 0.94.$$ ■

***Příklad* 96**. Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n grafu funkce $z=2x^2-4y^2$ v bodě $T=[2,1,?]$. Vypočítejte přibližně hodnotu funkce v bodě $[2.2,1.3]$.

Řešení : Tečná rovina τ má rovnici

$$\tau:\quad z-z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(A)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\cdot(y-y_0),$$

kde $A=[x_0,y_0]=[2,1]$, a $z_0=z(x_0,y_0)$. V daném případě $z_0=2\cdot 4-4\cdot 1=4 \implies$

$T=[2,1,4],\quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = (4x)\Big|_A = 8,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = (-8y)\Big|_A = -8 \implies$

$$\tau:\quad z-4 = 8(x-2)-8(y-1) \implies 8x-8y-z-4=0.$$

Normála n je přímka procházející bodem T, jejímž směrovým vektorem je normálový

vektor roviny τ. Tedy $n: \quad [x,y,z] = [2,1,4] + t(8,-8,-1),\ t \in \mathbb{R}$.

Funkční hodnotu v bodě $[2.2, 1.3]$ vypočteme dosazením souřadnic bodu do rovnice tečné roviny $z = 4+8(x-2)-8(y-1) \quad \Rightarrow \quad z(2.2,1.3) = 4+8(2.2-2)-$ $-8(1.3-1) = 4+1.6-2.4 = 3.2$ ■

***Příklad* 97**. Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\varrho: 5x - 3y - z = 0$.

Řešení : Musíme najít bod A , v němž $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3$. Z toho dostaneme soustavu rovnic $\begin{cases} 2x + y + 1 = 5, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$ Odtud $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = z(x_0, y_0) = 3$, takže $T = [1,2,3]$. Rovnice tečné roviny $\tau: \quad 5x - 3y - z + d = 0, \quad T \in \tau$ $\Longrightarrow \quad \tau: 5x - 3y - z + 4 = 0.$ ■

• Vypočítejte přibližně hodnoty daných výrazů pomocí totálního diferenciálu :

98. $\sqrt[3]{7.95} \cdot \sqrt{8.96}$ [5.9742]

99. $\dfrac{\sqrt[4]{0.97}}{1.02^3 \cdot \sqrt[3]{0.99}}$ [0.936]

100. $\sqrt{4.04} \cdot \ln 1.02 \cdot \operatorname{arctg} 0.9$ [0.0314]

• Najděte rovnici tečné roviny τ a rovnici normály n plochy $z = f(x,y)$ v bodě A :

101. $z = 4\sqrt{x^2+y^2}, \quad T = [3,4,?]$ $[12x + 16y - 5z = 0;\ [x,y,z] = [3,4,20] + t(12,16,-5),\ t \in \mathbb{R}]$

102. $z = xy, \quad T = [0,0,?]$ $[z = 0;\ [x,y,z] = t(0,0,1),\ t \in \mathbb{R}]$

103. $z = x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{y}, \quad T = [1, \dfrac{2}{\pi}, ?]$ $\left[z = \dfrac{\pi^2}{4}\left(y - \dfrac{2}{\pi}\right);\ [x,y,z] = \left[1, \dfrac{2}{\pi}, 0\right] + t\left(0, \dfrac{\pi^2}{4}, -1\right),\ t \in \mathbb{R}\right]$

104. $z = \dfrac{1}{x} \arcsin y, \quad T = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, ?\right]$ $\left[\begin{array}{r} \pi x - 2\sqrt{2}\, y + z - \pi + 2 = 0; \\ [x,y,z] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + t(\pi, -2\sqrt{2}, 1),\ t \in \mathbb{R} \end{array}\right]$

• Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = z(x,y)$ rovnoběžné s rovinou ϱ :

105. $z = 2x^2 - y^2, \quad \varrho: 8x - 6y - z - 15 = 0$ $[\tau: 8x - 6y - z + 1 = 0]$

106. $z = \ln(x^2 + 2y^2), \quad \varrho: 2x - z + 5 = 0$ $[\tau: 2x - z - 2 = 0]$

107. $z = x^2 - y^2 + 6xy + 2x, \quad \varrho: 4x + 6y - z = 0$ $[\tau: 4x + 6y - z - 1 = 0]$

II.5. Derivace a diferenciály vyšších řádů

***Příklad* 108**. Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = xy^3 - y \cdot \mathrm{e}^{x+y^2}$.

Řešení : $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - y \cdot \mathrm{e}^{x+y^2}, \quad f_y = 3xy^2 - \mathrm{e}^{x+y^2} - y \cdot \mathrm{e}^{x+y^2} \cdot 2y = 3xy^2 - \mathrm{e}^{x+y^2}(1+2y^2),$

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = -y \cdot \mathrm{e}^{x+y^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = 6xy - 2y\mathrm{e}^{x+y^2}(1+2y^2) - e^{x+y^2}4y = 6xy - e^{x+y^2}(6y+4y^3),$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = 3y^2 - e^{x+y^2} - ye^{x+y^2} \cdot 2y = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2).$$

Vidíme, že pro danou funkci f platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ve všech bodech $[x,y] \in \mathbb{E}_2$.

■

***Příklad* 109**. Ukažte, že funkce $u = u(x,t) = \operatorname{arctg}(2x-t)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} = 0 \quad \text{v} \quad \mathbb{E}_2.$$

Řešení :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2}{1+(2x-t)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2\cdot 2(2x-t)\cdot 2}{\big(1+(2x-t)^2\big)^2} = \frac{-8(2x-t)}{\big(1+(2x-t)^2\big)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial t} = \frac{-2}{\big(1+(2x-t)^2\big)^2}\cdot 2(2x-t)\cdot(-1) = \frac{4(2x-t)}{\big(1+(2x-t)^2\big)^2}.$$

Po dosazení je zřejmé, že rovnice platí ve všech bodech $[x,t] \in \mathbb{E}_2$.

■

***Příklad* 110**.* Je dána funkce $f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Dokažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$.

Řešení : Snadno se přesvědčíme, že funkce f je v bodě $[0,0]$ spojitá : $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Derivace $f_x(0,y)$, $f_y(x,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ vypočítáme pomocí příslušných definic :

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy\frac{h^2-2y^2}{h^2+y^2}-0}{h} = -2y,$$

$$f_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{xk\frac{x^2-2k^2}{x^2+k^2}-0}{k} = x,$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-2k}{k} = -2,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1,$$

$$f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0).$$

■

Jsou dána skalární pole $\varphi(x,y,z)$ a vektorové pole $\vec{f} = (U,V,W)$, která mají spojité parciální derivace 2. řádu v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.

Označme:

$$\nabla = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big), \quad \operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big),$$

$$\operatorname{div} = \nabla\cdot\vec{f} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \Big(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\Big)$$

***Příklad* 111.** Je dáno skalární pole $\varphi(x,y,z) = xy^2 + z^3 - xyz + 3$. Vypočítejte $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$.

Řešení : Funkce $\varphi(x,y,z) = xy^2 + z^3 - xyz + 3$ je diferencovatelná v oblasti $\mathbb{E}_3$. Pak

$$\operatorname{grad}\varphi = \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big) = (y^2 - yz,\ 2xy - xz,\ 3z^2 - xy)$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi =$$

$$= \Big(\frac{\partial(3z^2 - xy)}{\partial y} - \frac{\partial(2xy - xz)}{\partial z}, \frac{\partial(y^2 - yz)}{\partial z} - \frac{\partial(3z^2 - xy)}{\partial x}, \frac{\partial(2xy - xz)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2 - yz)}{\partial y}\Big) =$$

$$= \big(-x - (-x),\ -y + y,\ 2y - z - (2y - z)\big) = \vec{0}$$

POZNÁMKA: Parciální derivace 2. řádu funkce φ jsou spojité v $\mathbb{E}_3$. ■

***Příklad* 112.** Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U,V,W) = (xy, x^2 - z^2, \frac{y}{x+z})$. Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}$, $\operatorname{rot}\vec{f}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f}$.

Řešení : Vektorové pole $\vec{f} = (U,V,W) = (xy, x^2 - z^2, \frac{y}{x+z})$ je definováno v množině $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x + z \neq 0\}$.

Parciální derivace:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{y}{(x+z)^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{1}{x+z}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -2z, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{y}{(x+z)^2}$$

$$\operatorname{div}\vec{f} = y + 0 - \frac{y}{(x+z)^2}, \quad \operatorname{rot}\vec{f} = \Big(\frac{1}{x+z} + 2z;\ \frac{y}{(x+z)^2} - 0;\ 2x - x\Big),$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f} = \operatorname{div}\Big(\frac{1}{x+z} + 2z;\ \frac{y}{(x+z)^2};\ x\Big) = -\frac{1}{(x+z)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} + 0 = 0$$

POZNÁMKA: Souřadnicové funkce U, V, W mají spojité parciální derivace 2. řádu v D. ■

113.* Nechť v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ má skalární pole $\varphi(x,y,z)$ spojité parciální derivace 2. řádu. Dokažte, že $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \vec{0}$ v D.

114.* Nechť v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$ má vektorové pole $\vec{f}(U,V,W)$ spojité parciální derivace 2. řádu. Dokažte, že $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f} = 0$ v D.

• Najděte diferenciály uvedeného řádu :

Příklad* 115. $z = \sin(2x+y), \quad d^2z = ?$

Řešení : Diferenciál n-tého řádu $d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n f$, potom

$$d^2z = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,(dy)^2 =$$
$$= -4\sin(2x+y)\,(dx)^2 - 4\sin(2x+y)\,dx\,dy - \sin(2x+y)\,(dy)^2 =$$
$$= -\sin(2x+y)\,(2dx+dy)^2. \qquad \blacksquare$$

Příklad* 116. $z = x^3 - y^3 - xy + y^2, \quad d^3z = ?$

Řešení : $$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}\,dx\,(dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,(dy)^3$$

$$z_x = 3x^2 - y, \qquad z_y = -3y^2 - x + 2y,$$
$$z_{xx} = 6x, \qquad z_{yy} = -6y + 2, \qquad z_{xy} = -1,$$
$$z_{xxx} = 6, \qquad z_{yyy} = -6, \qquad z_{xxy} = z_{xyy} = 0,$$
$$d^3z = 6(dx)^3 - 6(dy)^3. \qquad \blacksquare$$

Příklad* 117. $u = \mathrm{e}^{2x-3y}, \quad d^2u(A) = ?,\ d^3u(A) = ?,\ d^nu(A) = ?,\ A = [0,0]$

Řešení : $$d^2u(A) = \left(\mathrm{e}^{2x-3y}(2dx-3dy)^2\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^2,$$
$$d^3u(A) = \left(\mathrm{e}^{2x-3y}(2dx-3dy)^3\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^3,$$
$$d^nu(A) = \left(\mathrm{e}^{2x-3y}(2dx-3dy)^n\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^n. \qquad \blacksquare$$

Diferenciály lze použít v důležité **Taylorově větě** : *Nechť $f(x,y)$ je funkce $(n+1)$-krát diferencovatelná v každém vnitřním bodě obdélníka* M *se středem v bodě $A = [x_0, y_0]$. Potom ke každému bodu $[x,y] \in$ M existuje bod $[\xi,\eta] \in$ M takový, že*

$$f(x,y) = f(A) + df(A) + \frac{d^2f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^nf(A)}{n!} + R_{n+1},$$

kde $$df(A) = df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot(y-y_0),$$

$$d^2f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(A)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\cdot(y-y_0)^2,$$

$$\vdots$$

$$d^nf(A) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\,\partial y^{n-k}}(A)\cdot(x-x_0)^k\cdot(y-y_0)^{n-k},$$

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\,d^{n+1}f(\xi,\eta).$$

Příklad* 118. Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 4x - 5y$ v okolí bodu $A = [2,-1]$ a výsledek využijte k výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $[2.1, -1.1]$.

Řešení :

$$f(A) = 16, \quad dx = x - x_0 = x - 2, \quad dy = y - y_0 = y + 1,$$

$$\left.\begin{aligned} f_x(A) &= (3x^2 - 3y^2 + 4)\Big|_A = 13 \\ f_y(A) &= (-6xy + 2y - 5)\Big|_A = 5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow dz(A) = 13\,dx + 5\,dy = 13(x-2) + 5(y+1),$$

$$\left.\begin{aligned} f_{xx}(A) &= (6x)\Big|_A = 12 \\ f_{yy}(A) &= (-6x+2)\Big|_A = -10 \\ f_{xy}(A) &= (-6y)\Big|_A = 6 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &d^2z(A) = 12\,(dx)^2 + 12\,dx\,dy - 10\,(dy)^2 = \\ &= 12(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - 10(y+1)^2\ , \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_{xxx}(A) = 6 \\ &f_{yyx}(A) = -6 \\ &f_{yxx}(A) = f_{yyy}(A) = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow d^3z(A) = 6\,(dx)^3 - 18\,dx\,(dy)^2 = 6(x-2)^3 - 18(x-2)(y+1)^2,$$

$$f(x,y) = 16 + 13(x-2) + 5(y+1) + 6(x-2)^2 + 6(x-2)(y+1) - 5(y+1)^2 + (x-2)^3 - 3(x-2)(y+1)^2,$$

$R_4 = 0$, protože derivace 4. a vyššího řádu jsou nulové

$$f(2.1; -1.1) = 16 + 13\cdot 0.1 + 5\,(-0.1) + 6\cdot 0.1^2 - 6\cdot 0.1^2 - 5\cdot 0.1^2 + 0.1^3 - 3\cdot 0.1^3 = \\ = 17.3 - 0.552 = 16.748. \qquad \blacksquare$$

Příklad* 119. Napište Taylorův rozvoj čtvrtého stupně funkce $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ v okolí bodu $[0,0]$.

Řešení : Použijeme Taylorův vzorec pro $\cos z \doteq 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!}$, do kterého dosadíme

$$z = x^2 + y^2: \qquad \cos(x^2+y^2) \doteq 1 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2!} + \frac{(x^2+y^2)^4}{4!};$$

$$T_4(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4). \qquad \blacksquare$$

• Najděte parciální derivace druhého řádu dané funkce :

120. $\phi(s,t) = \ln(s^3+t)$ $\qquad \left[\phi_{ss} = \dfrac{3s(2t-s^3)}{(s^3+t)^2},\ \phi_{tt} = \dfrac{-1}{(s^3+t)^2},\ \phi_{st} = \phi_{ts} = \dfrac{-3s^2}{(s^3+t)^2}\right]$

121. $\phi(x,t) = \dfrac{\cos x^2}{t}$ $\qquad \left[\phi_{xx} = \dfrac{-1}{t}(4x^2\cos x^2 + 2\sin x^2),\ \phi_{tt} = \dfrac{2}{t^3}\cos x^2,\ \phi_{xt} = \phi_{tx} = \dfrac{2x}{t^2}\sin x^2\right]$

122. $f(x,y) = \mathrm{e}^{ax+by}$ $\qquad \left[f_{xx} = a^2\mathrm{e}^{ax+by},\ f_{yy} = b^2\mathrm{e}^{ax+by},\ f_{xy} = f_{yx} = ab\,\mathrm{e}^{ax+by}\right]$

123. Ověřte, že funkce $u(x,t) = \sin(x-ct)$ a funkce $u(x,t) = \sin(\omega ct)\cdot\sin(\omega x)$ vyhovují diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (tzv. vlnová rovnice).

124. Ověřte, že funkce $u(x,y) = \mathrm{e}^x\sin y$ vyhovuje diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Laplaceova rovnice).

• Rozložte funkci $f(x,y)$ podle Taylorovy věty v okolí bodu A pro $n = 4$:

125.* $f(x,y) = x^3 + 5x^2 - 6xy + 2y^2,\ A = [1,-2]$

$$\left[\begin{aligned} f(x,y) &= 26 + 25(x-1) - 14(y+2) + 8(x-1)^2 \\ &+2(y+2)^2 - 6(x-1)(y+2) + (x-1)^3 \end{aligned}\right]$$

126.* $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1,\ A = [2,-1]$ $\qquad \left[\begin{aligned} f(x,y) &= (x-2) + 3(y+1) + (x-2)^2 + \\ &+3(y+1)^2 + 3(x-2)(y+1) - (y+1)^3 \end{aligned}\right]$