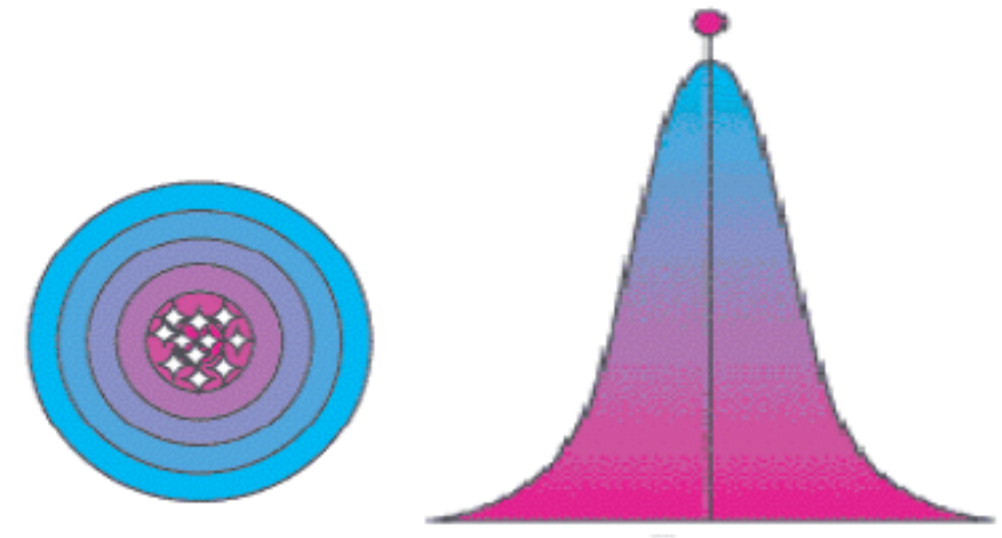
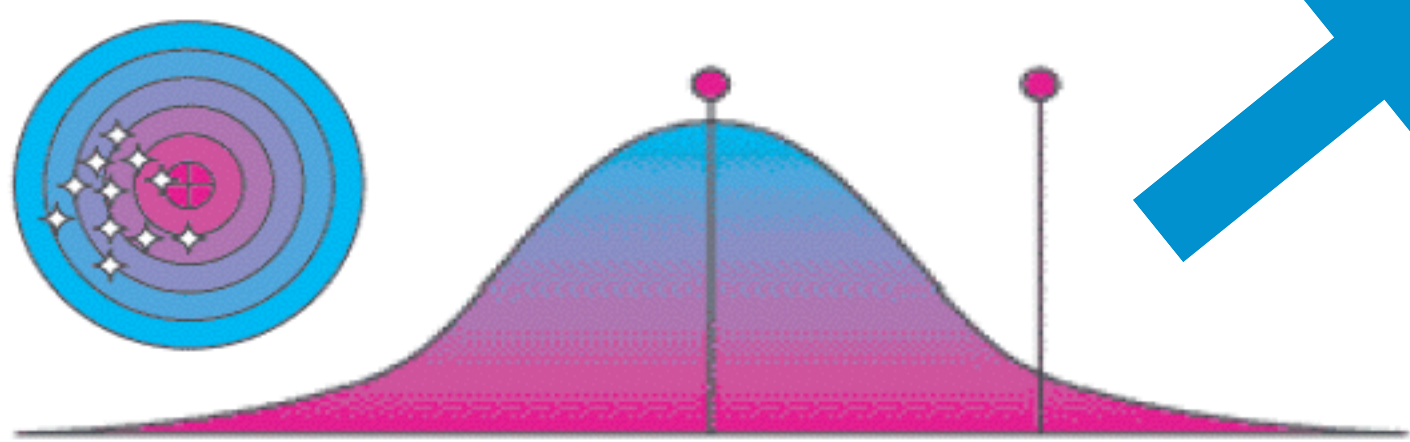
Základy navrhování průmyslových experimentů DOE



II. Statistické metody vyhodnocení kvantitativních dat

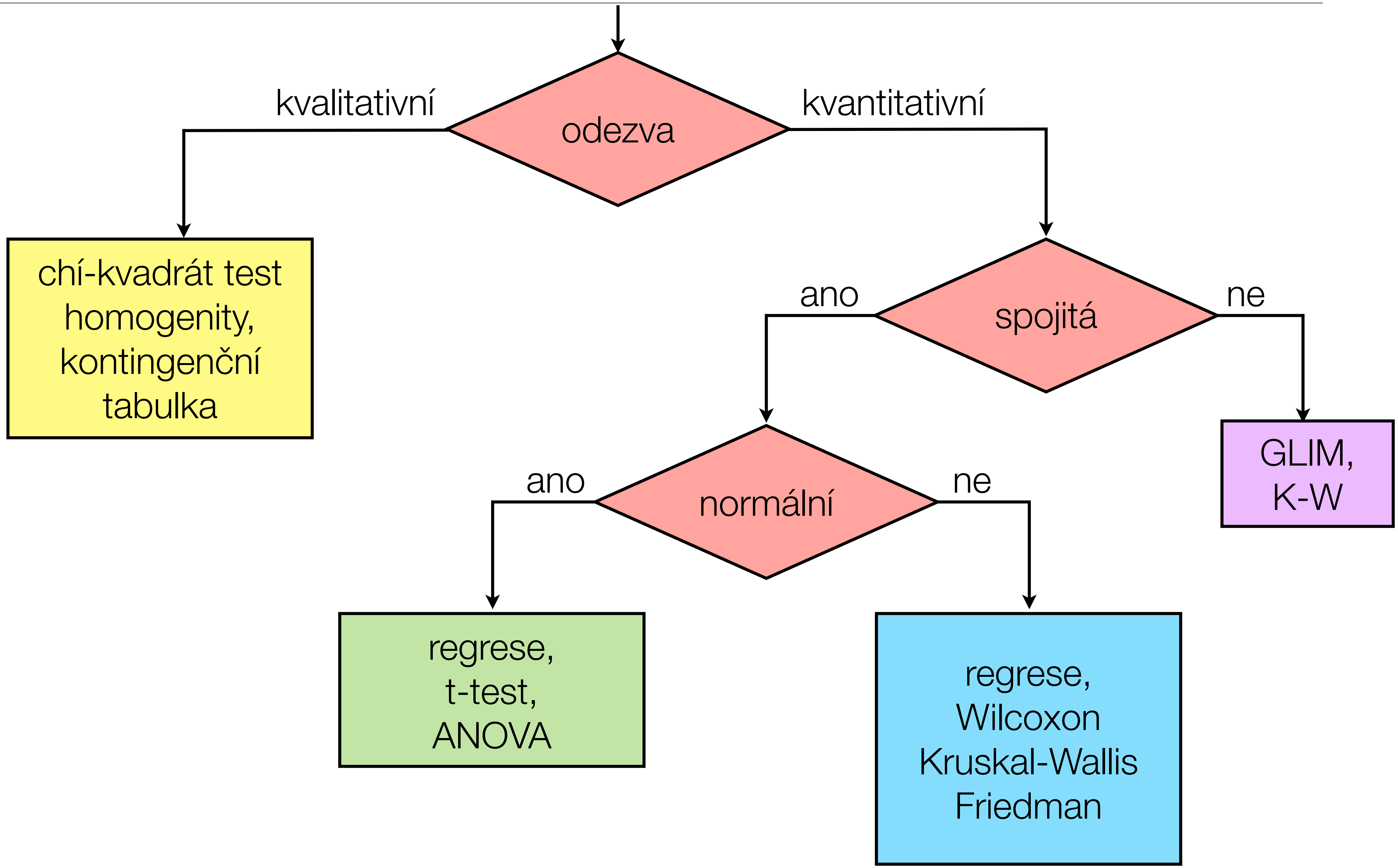


Gejza Dohnal

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Testování statistických hypotéz

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů



Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontingenční tabulka

odezva má kvalitativní charakter: může nabývat r h

jeden kvalitativní faktor: může nabývat s hodnot, u n
provádíme N > r.s pozorová
výsledky zapisujeme do tab

Omezení: očekávané četnosti musejí být větší než 5!

Testování v kontingenční tabulce:

- test hypotézy o nezávislosti znaků (test homogenity
- test symetrie

Test nezávislosti: testová statistika = $\frac{\sum(\text{pozorované - očekávané})^2}{\text{očekávané}}$

označme: n_{ij} absolutní četnost v řádku i a sloupci j napozorovaná v experimentu
m_{ij} očekávaná četnost v řádku i a sloupci j za platnosti hypotézy

$m_{ij} = \frac{R_i S_j}{N}$, kde R_i = součet četností v řádku i
S_j = součet četností ve sloupci j

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$$

testová statistika má chí-kvadrát rozdělení o (r-1)x(s-1) stupňů volnosti

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontingenční tabulka

odezva má kvalitativní charakter: může nabývat r hodnot
jeden kvalitativní faktor: může nabývat s hodnot, u nichž nemá smysl uspořádání
provádíme N > r.s pozorování a sledujeme četnosti n_{ij}
výsledky zapisujeme do tabulky o s řádcích a r sloupcích

Příklad: Ovlivňuje barva očí Rh faktor?

Provedeme 400 pozorování, jejichž výsledky jsou v tabulce napravo:

barva očí	Rh⁺	Rh⁻	součet
modrá	35	65	100
hnědá	94	206	300
součet	129	271	400
zjištěné četnosti kombinací			

Za předpokladu nezávislosti by (podle marginálních součtů) mělo platit:

barva očí	Rh⁺	Rh⁻	součet
modrá	32,25	67,75	100
hnědá	96,75	203,25	300
součet	129	271	400
odhadnuté četnosti kombinací			

Chceme testovat hypotézu o tom, že barva očí neovlivňuje Rh faktor:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$$

$$\chi^2 = \frac{(35-32.25)^2}{32.25} + \frac{(65-67.75)^2}{67.75} + \frac{(94-96.75)^2}{96.75} + \frac{(206-203.25)^2}{203.25} \doteq 0.2289$$

$\chi^2_1(0.05) = 3.84$

=> Na hladině významnosti 5% nebyla prokázána závislost mezi barvou očí a Rh faktorem.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontingenční tabulka

Příklad 2: Ovlivňuje složení krmiva schopnost otelení krav?

odezva má kvalitativní charakter: dojde k otelení (ano) nebo nedojde (ne)
dva kvantitativní faktory, každý na dvou úrovních: krmení s vysokým nebo nízkým obsahem energie nebo proteinů. To vytvoří celkem 4 kombinace = 4 řádky tabulky. Celkem bylo sledováno n = 100 zvířat.

kombinace	ano	ne
vysoká energie a vysoký protein	81	19
vysoká energie a nízký protein	88	12
nízká energie a vysoký protein	75	25
nízká energie a nízký protein	43	57

Pro celou tabulku: testová statistika má df = 3.1=3 (stupně volnosti)

$$\chi^2 = 58,549, \quad \chi^2_{0,01}(3) = 11,3$$

Sloučíme-li řádky 1 + 2 (vysoká energie) a 3 + 4 (nízká energie), dostaneme tabulku 2x2 s df = 1 a testovou statistiku (efekt energie) $\chi^2_{en} = 32,080, \quad \chi^2_{0,01}(1) = 6,63$

Sloučíme-li řádky 1 + 3 (vysoký protein) a 2 + 4 (nízký protein), dostaneme tabulku 2x2 s df = 1 a testovou statistiku (efekt proteinu) $\chi^2_{prot} = 7,709, \quad \chi^2_{0,01}(1) = 6,63$

Odečteme-li hodnoty chí-kvadrát energie a proteinu od celkového chí-kvadrátu, dostaneme efekt interakce $\chi^2_{en.prot} = 18,760.$

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Kontingenční tabulka

Test symetrie: hypotéza: $\frac{n_{ij}}{N} = \frac{n_{ji}}{N}$

testová statistika $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{i} \frac{(n_{ij} - n_{ji})^2}{n_{ij} + n_{ji}}$ má chí-kvadrát rozdělení o r(r-1) stupňů volnosti

Příklad: Dědí syn barvu očí otce?

Bylo provedeno 1000 pozorování, jejichž výsledky jsou v tabulce napravo. Barva očí je zakódována: 1=sv.modrá, 2=modrozelená 3=tm.šedá nebo sv.hnědá, 4=tm.hnědá

barva očí syna

barva očí otce	1	2	3	4	∑
1	194	70	41	30	335
2	83	124	41	36	284
3	25	34	55	23	137
4	56	36	43	109	224
∑	358	264	180	198	1000

Dosazením do testové statistiky dostaneme hodnotu $\chi^2 = 19,56$

Kritická hodnota pro 6 stupňů volnosti a pro α=5% je $\chi^2_6(0,05) = 12,59$

=> Na hladině významnosti 5% nebyla prokázána shoda barvy očí otce a syna.

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Regresní model experimentu

odezva má kvantitativní charakter: může nabývat hodnot z podintervalu reálné přímky

lineární model regresní závislosti: $Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \ldots + b_k X_k + \varepsilon$

Máme n pozorování: $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ vektor pozorování odezvy

$\boldsymbol{X} = (X_{ij}), \; i = 1,..,n, \; j = 0,1,..,k$ matice (nx(k+1)) pozorování k faktorů

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ vektor (k+1) neznámých parametrů

$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ vektor náhodných odchylek (náhodná složka)

$$\boxed{\text{obecný lineární model:} \quad \boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}}$$

Předpoklady lineárního modelu:

1) $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$ => střední hodnota $E(\varepsilon_i) = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$ => $E(\boldsymbol{Y}) = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$
2) rozptyl $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ je konstantní (nezávisí na i) = homoskedaticita
3) $Cov(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ pro všechna $i \neq j = 1, 2, \ldots, n$ => $D(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \mathbf{I} = D(\boldsymbol{Y})$
4) Matice $\boldsymbol{X}$ je nenáhodná
5) Hodnost matice $\boldsymbol{X}$ je k+1
6) náhodné veličiny ε_i mají normální rozdělení

Pokud je některý z těchto předpokladů porušen, jedná se o "**zobecněný lineární model**" (GLM)

Vícefaktoriální návrhy experimentů

Regresní model experimentu

odhad parametrů metodou nejmenších čtverců: $(X'X)b = X'Y$ => $b = (X'X)^{-1}X'Y$

Platí: $E(b) = \beta$, $D(b) = \sigma^2(X'X)^{-1}$

lineární model pro jeden faktor: $Y = a + bX + \varepsilon$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & X_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \dots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum x_i Y_i \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i, \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

$$\boxed{b_1 = \frac{\sum x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}, \quad b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{x}} \qquad s^2 = \frac{\sum Y_i^2 - b_0 \sum Y_i - b_1 \sum x_i Y_i}{n-2}$$

Pro test hypotézy H_0: $\beta_1 = 0$ použijeme testovou statistiku $T_1 = \frac{b_1}{s}\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$, která má t-rozdělení o $(n-2)$ stupních volnosti.

Pro dané x je interval spolehlivosti predikce Y: $b_0 + b_1 x \pm t_{n-2}(\alpha) s \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}}$

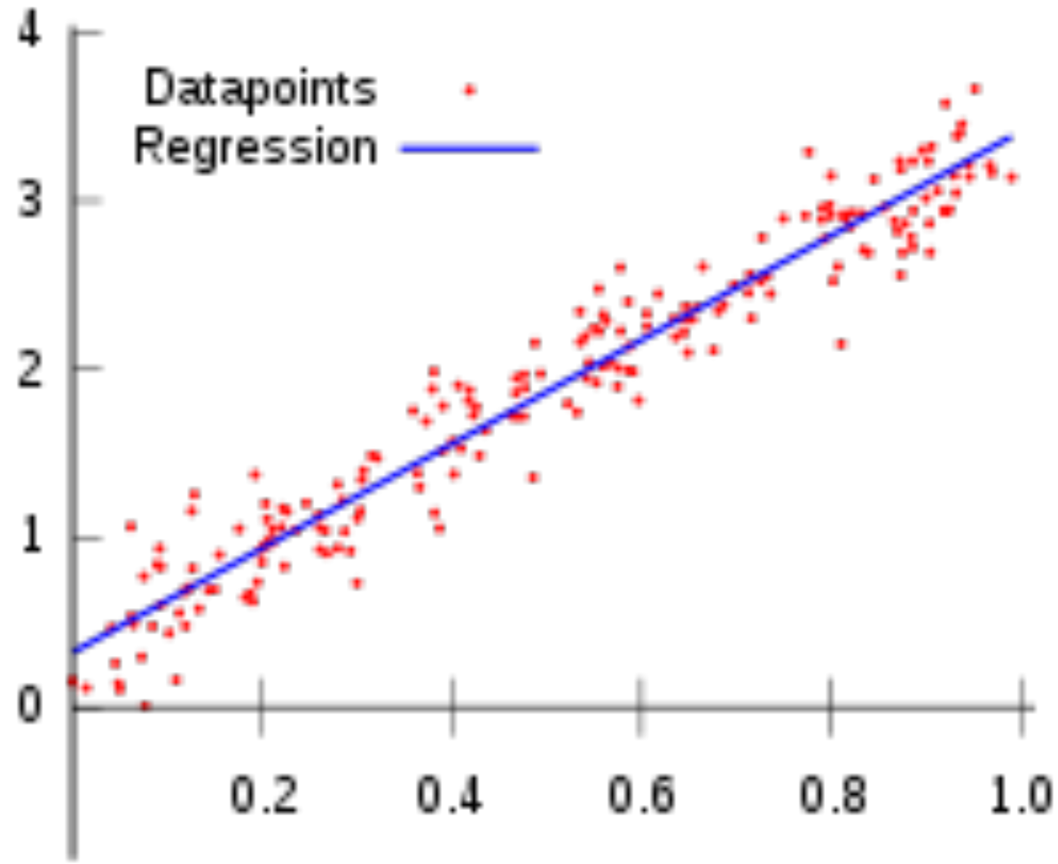
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Regresní model experimentu

odhad parametrů metodou nejmenších čtverců: $(\boldsymbol{X'X})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{X'Y}$ => $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'Y}$

Platí: $E(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\beta}$, $D(\boldsymbol{b}) = \sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$

lineární model pro jeden faktor: $Y = a + bX + \varepsilon$



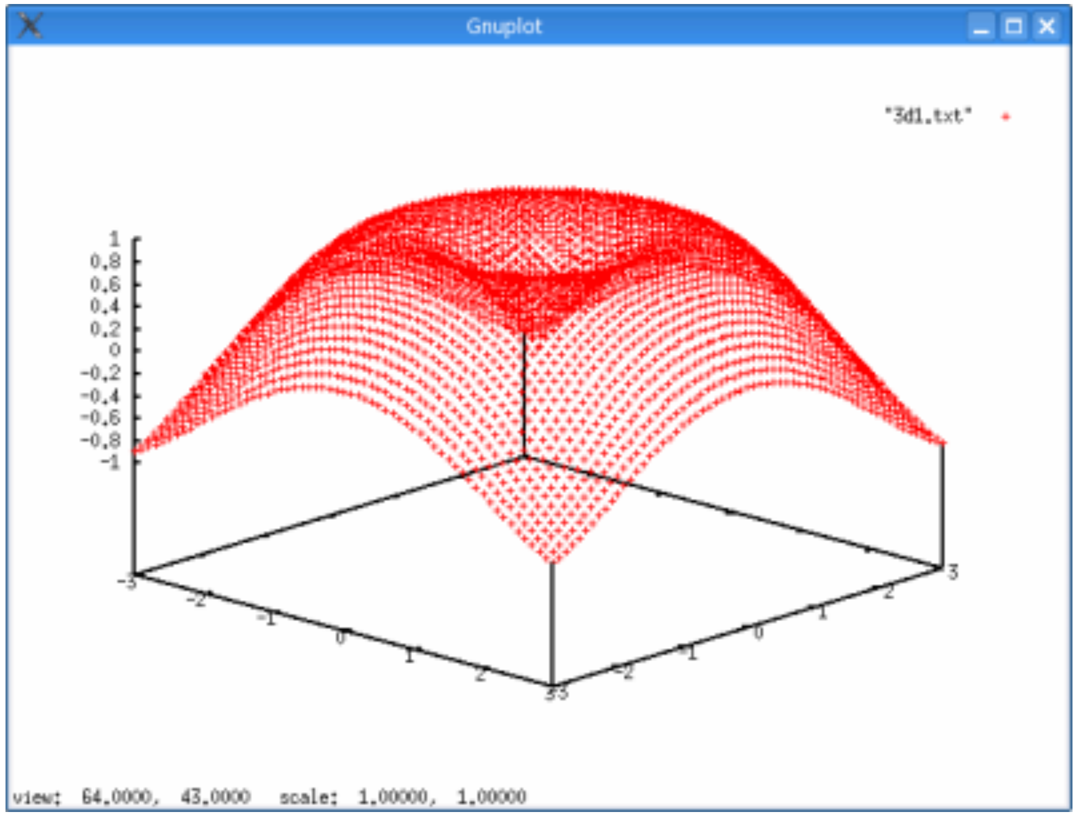
Vícefaktoriální návrhy experimentů

Regresní model experimentu

lineární model pro dva faktory: $Y = a + bX + cZ + dXZ + \varepsilon$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_1 & Z_1 & X_1 Z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_n & Z_n & X_n Z_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \dots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum z_i & \sum x_i z_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i z_i & \sum x_i^2 z_i \\ \sum z_i & \sum x_i z_i & \sum z_i^2 & \sum x_i z_i^2 \\ \sum x_i z_i & \sum x_i^2 z_i & \sum x_i z_i^2 & \sum x_i^2 z_i^2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum x_i Y_i \\ \sum z_i Y_i \\ \sum x_i z_i Y_i \end{pmatrix}$$



Srovnání dvou souborů dat

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad Y : Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- oba parametry v obou případech známe
- známe střední hodnoty a neznáme rozptyly
- známe rozptyly a neznáme střední hodnoty
- žádný z parametrů neznáme

Odhady středních hodnot: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \bar{Y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

Odhady rozptylů:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum (X - \bar{X})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum (Y - \bar{Y})^2$$

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání dvou souborů dat

Dvě nezávislá měření

$$X : X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad Y : Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$$

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2) \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

- test shody rozptylů
- test shody středních hodnot při stejných rozptylech
- test shody středních hodnot při nestejných rozptylech

Dvě závislá měření

$$X : X_1, X_2, \ldots, X_n$$

$$Y : \; Y_1, \; Y_2, \ldots, \; Y_n$$

párová pozorování

- párový test shody středních hodnot

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání rozptylů dvou nezávislých měření

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska velikosti rozptylu?

Lze považovat rozptyl dvou nezávislých měření za shodný při dané hladině významnosti?

nulová hypotéza : $H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

alternativní hypotéza: $H_A : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$

testová statistika : $F = \dfrac{s_X^2}{s_Y^2}$

hladina významnosti: α

F-test

Fisherovo-Snedecorovo rozdělení $F(n\text{-}1, m\text{-}1)$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude

$$F_{\alpha/2}(n-1, m-1) < F < F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$$

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

Liší se statisticky významně dvě nezávislá měření z hlediska jejich střední hodnoty?

Lze považovat střední hodnoty dvou nezávislých měření za shodné při dané hladině významnosti?

Lze od sebe statisticky významně odlišit dvě nezávislá měře-ní podle jejich jejich střední hodnoty?

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

nulová hypotéza : $H_0 : \mu_X = \mu_Y$

alternativní hypotéza: $H_A : \mu_X \neq \mu_Y$ (oboustranná)

testová statistika : $T = \dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{s_{\bar{X}-\bar{Y}}}$

hladina významnosti: α

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ → dvouvýběrový t-test se stejnými rozptyly

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ → dvouvýběrový t-test s nestejnými rozptyly

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

$$\Rightarrow s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = s^2_{\bar{X}} + s^2_{\bar{Y}} = \frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m} = s^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = s^2\left(\frac{m+n}{n.m}\right)$$

dále odhadneme s^2 ze všech naměřených hodnot:

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{m}(Y_i - \bar{Y})^2\right) =$$

$$\frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\right)$$

tedy:

$$s^2_{\bar{X}-\bar{Y}} = \frac{n+m}{nm(n+m-2)}\left((n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2\right)$$

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$

Testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}$$

ta má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n+m\text{-}2)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n+m-2)$ kde $t_\alpha(n+m-2)$ je (oboustranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n+m\text{-}2)$ stupních volnosti.

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání středních hodnot dvou nezávislých souborů dat - dvouvýběrový t-test

pokud $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$:

Testová statistika bude mít tvar:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n} s_X^2 + \frac{1}{m} s_Y^2}}$$

a má rozdělení, které je směsí t-rozdělení o $(n\text{-}1)$ a $(m\text{-}1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude splněna nerovnost $|T| \leq At_\alpha(n-1) + Bt_\alpha(m-1)$, kde A a B jsou váhy, A+B=1.

$$A = \frac{\frac{1}{n} s_X^2}{\frac{1}{n} s_X^2 + \frac{1}{m} s_Y^2}, \qquad B = \frac{\frac{1}{m} s_Y^2}{\frac{1}{n} s_X^2 + \frac{1}{m} s_Y^2}$$

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání párových souborů dat - párový t-test

- pozorování stejné veličiny před a po nějakém zásahu
- měření stejných obektů za různých podmínek
- měření stejné veličiny ve dvou různých časech
- .....

$$X : X_1, X_2, \ldots, X_n \qquad X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$$

$$Y : Y_1, Y_2, \ldots, Y_n \qquad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

$$\Rightarrow \quad Z_1 = X_1 - Y_1,\ Z_2 = X_2 - Y_2, \ldots,\ Z_n = X_n - Y_n,$$

$$Z \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_Z^2)$$

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad H_0 : \mu_Z = 0$$

$$H_A : \mu_X \neq \mu_Y \qquad H_A : \mu_Z \neq 0$$

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Srovnání párových souborů dat - párový t-test

$$H_0 : \mu_Z = a$$
$$H_A : \mu_Z \neq a$$

$$T = \frac{\bar{Z} - a}{s_Z}\sqrt{n}$$

T má t-rozdělení (Studentovo rozdělení) pravděpodobnosti o $(n\text{-}1)$ stupních volnosti.

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude $|T| \leq t_\alpha(n-1)$ kde $t_\alpha(n-1)$ je (oboustranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n\text{-}1)$ stupních volnosti.

Jednostranné testy

"dolní" nebo "horní" jednostranná alternativa :

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y \qquad\qquad H_0 : \mu_X = \mu_Y$$
$$H_A : \mu_X < \mu_Y \qquad\qquad H_A : \mu_X > \mu_Y$$

H_0 nezamítneme, když pro dané α bude buď

$T < -t_\alpha(n-1)$ nebo $T > t_\alpha(n-1)$

kde $t_\alpha(n-1)$ je (jednostranná) α-kritická hodnota t-rozdělení o $(n$-$1)$ stupních volnosti.

oboustranná α-kritická hodnota je $(1-\alpha/2)$-kvantil $t_{1-\alpha/2}(n-1)$

jednostranná α-kritická hodnota je $(1-\alpha)$-kvantil $t_{1-\alpha}(n-1)$

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Dodavatel X:

```
> x
  [1]  0.41379418  0.51040227  3.28722973  7.31995568  4.53994434 -1.07426821
  [7]  4.74575978  2.55201407  3.22058685 -1.17401554 -1.24119500  4.18294690
 [13]  0.65486399 -0.18908709 -0.73101186  1.27876451  1.26734875  2.78570344
 [19]  2.96834139  1.22145702  1.80851440 -0.80356569  2.57347292  3.42552806
 [25]  1.66904559 -2.21179295  4.17696270  2.15191523  3.62707736  0.06900211
 [31]  0.51371315  0.54983237  4.09554316  1.28465289  4.05350899  5.10504379
 [37]  4.25580572  0.79826235 -1.02042629  1.87299786  0.14051938  3.05622839
 [43]  4.74780021  4.54794140 -6.54132331  1.94429658  1.95488616  4.73267571
 [49]  4.83082378  2.95830720  2.99769818 -1.07337799  0.58403864  2.73050678
 [55]  0.28021230 10.49771713  2.36870296  0.60689702  8.42679434  1.29763889
 [61]  1.31289734  1.93230073  5.92597773  1.49746935  6.30721756  3.15585521
 [67]  5.38824907  3.27322441  3.41248356 -0.40437473  3.19350142 -4.06261001
 [73] -1.05763312 -0.39748962  0.86637433  2.02108109 -1.06445976  1.10375263
 [79]  4.51823259 -0.75725877 -0.87173075 -2.19932463  7.70167909  1.48655986
 [85]  4.90757730  5.51652338 -0.34615559  0.01031344  4.57582354  1.17516968
 [91] -0.21932558 -1.27848277  2.97655676  1.44863955  3.67881403  0.30868429
 [97] -2.52052309  0.05248743  0.07728483 -1.12975005  3.99585182  0.79045260
[103]  3.73159608  7.36490361  6.40646375 -1.54228149 -0.65100869  4.04305846
[109]  2.47766853 -3.48957597  6.20840771  0.40560482  0.49118447 -1.48277951
[115] -1.23675030  5.16138353  1.15383008  2.75286404  4.70183189 -2.29877355
```

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

Dodavatel Y:

```
> y
  [1]  6.65956934  2.78876119  0.33397602 -0.03763918  0.74993937  3.81490677
  [7]  1.70428804 -3.31291341 -0.22972370  4.02124752  5.93229834  3.30506070
 [13] -3.61277063  0.78809415  0.37976841  1.52357320  1.76230055  1.03078642
 [19] -2.74093726  2.77205578 -0.25596771 -0.79295335 -1.99567925  7.14183490
 [25]  6.56129569 -2.39785588 -2.30807391 -1.02088455 -2.26040839 -2.76088135
 [31]  1.81877126  0.14669279  4.21783231 -2.13184320  3.69196005 -2.69614367
 [37] -2.68014820  3.72209577  1.73709472 -0.70580812  0.07337669  2.17063230
 [43]  2.72495294  5.04390706  1.32219033  4.72349163 -0.67638087  2.64424944
 [49]  2.78769261 -2.10997705  4.26042721 -3.50266144  1.72564280 -2.07028305
 [55] -4.59779260 -1.71953774  2.90307934  1.38358058  3.42339203 -1.68000430
 [61]  7.55683608  6.32574310 -2.60318964  3.24511198  0.97390332  2.22611398
 [67]  0.83831831  0.07828888  2.29402602  2.68356827  0.07483911  3.38214384
 [73] -0.59180508  9.07209729 -1.27708114  4.77997853 -0.83918672  6.26383807
 [79]  1.50674691  3.25716693  5.70351834  5.80174051  3.61099316  2.19293272
 [85] -1.46102337 -0.97135778  1.54849399  4.34257358 -1.64886246  2.44942102
 [91]  2.68469434  1.64707956  5.49827517  1.01640668  4.43099277  2.23430799
 [97] -1.74337571  6.43458332  2.94137432 -1.01569579
```

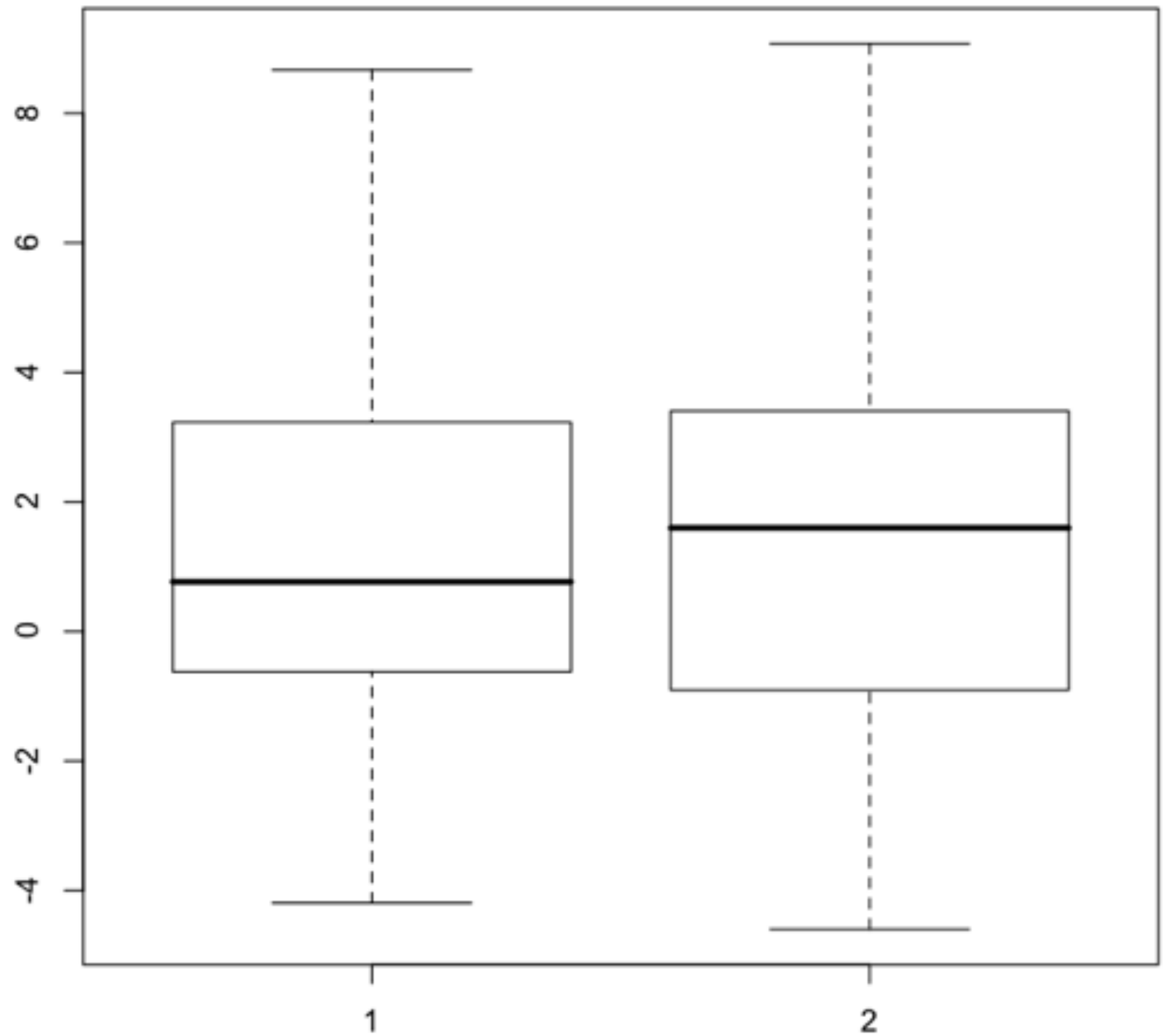
Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedenv v cm.

1) Vizualizace dat:
Box&Whiskers diagram



Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

2) Srovnání rozptylů: F-test

```
> var.test(x,y)

    F test to compare two variances

data:  x and y
F = 0.8712, num df = 119, denom df = 99, p-value = 0.4701
alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
95 percent confidence interval:
 0.5943383 1.2684711
sample estimates:
ratio of variances
         0.8711758
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme, rozptyly se statisticky významně neliší

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Lze považovat délky tyčí od dvou různých dodavatelů za shodné na hladině významnosti 5%?

Byly měřeny odchylky délky ocelových tyčí od požadované hodnoty 4m od dvou dodavatelů. Odchylky jsou uvedeny v cm.

3) Srovnání středních hodnot: dvouvýběrový t-test se shodnými rozptyly

```
> t.test(x,y, var.equal=T)

	Two Sample t-test

data:  x and y
t = 1.0375, df = 218, p-value = 0.3007
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3598731  1.1598308
sample estimates:
mean of x mean of y 
 1.884360  1.484381 
```

=> nulovou hypotézu nezamítáme, střední hodnoty se statisticky významně neliší

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách.
Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

1) Data:

```
> pred_cvicenim
  [1] 12.666378  7.322789 15.021706 13.616913 10.970712  5.464451
  [7]  9.999636 15.693764 13.771444 17.065310  6.940708 15.860749
 [13] 18.019348  6.326531 20.647763 23.005369 14.619170 20.787108
 [19] 14.238225  9.674337 14.763170  9.613791  9.727326  9.146292
 [25] 21.246960 16.200128 15.466065 13.691879  9.032113 10.558392
 [31] 18.258896 14.992416 14.722569 10.579842 10.758363  8.894299
 [37] 13.502299 12.994734 14.775563  9.818535 18.208089  8.438143
 [43]  8.282819 11.090392 15.174881  7.704479  8.917742 10.275903
 [49] 11.488700 16.572150 18.892428 13.544225  9.309845 13.713258
 [55] 12.904993  8.951567  9.041688 10.222305 14.136072  9.222289
 [61] 15.208694 14.627659 15.287092 11.389052  7.716052 14.307632
 [67] 14.647653 18.705963 13.665201  8.025347 13.157791 14.336731
 [73]  9.548584 12.522605 11.876452 12.241549 12.944160 17.637175
 [79]  9.854223 17.877400 15.892081  9.893356  7.791175 11.901961
 [85] 15.605362 13.464186 12.451922 16.090626  8.907932 16.333859
 [91] 13.554146 19.586575 11.765020  9.981692  5.325750 20.168371
 [97] 12.485393 14.349888 14.198229  7.315012 16.787920 10.998550
[103] 10.377856 13.531181 12.258939 11.346062 12.998020  8.498104
[109] 14.195263 15.372914 11.698431 12.929311 11.232474 21.551867
[115] 10.436798 14.430260 18.836296 14.838428 14.450987 10.879682
```

Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

1) Data:

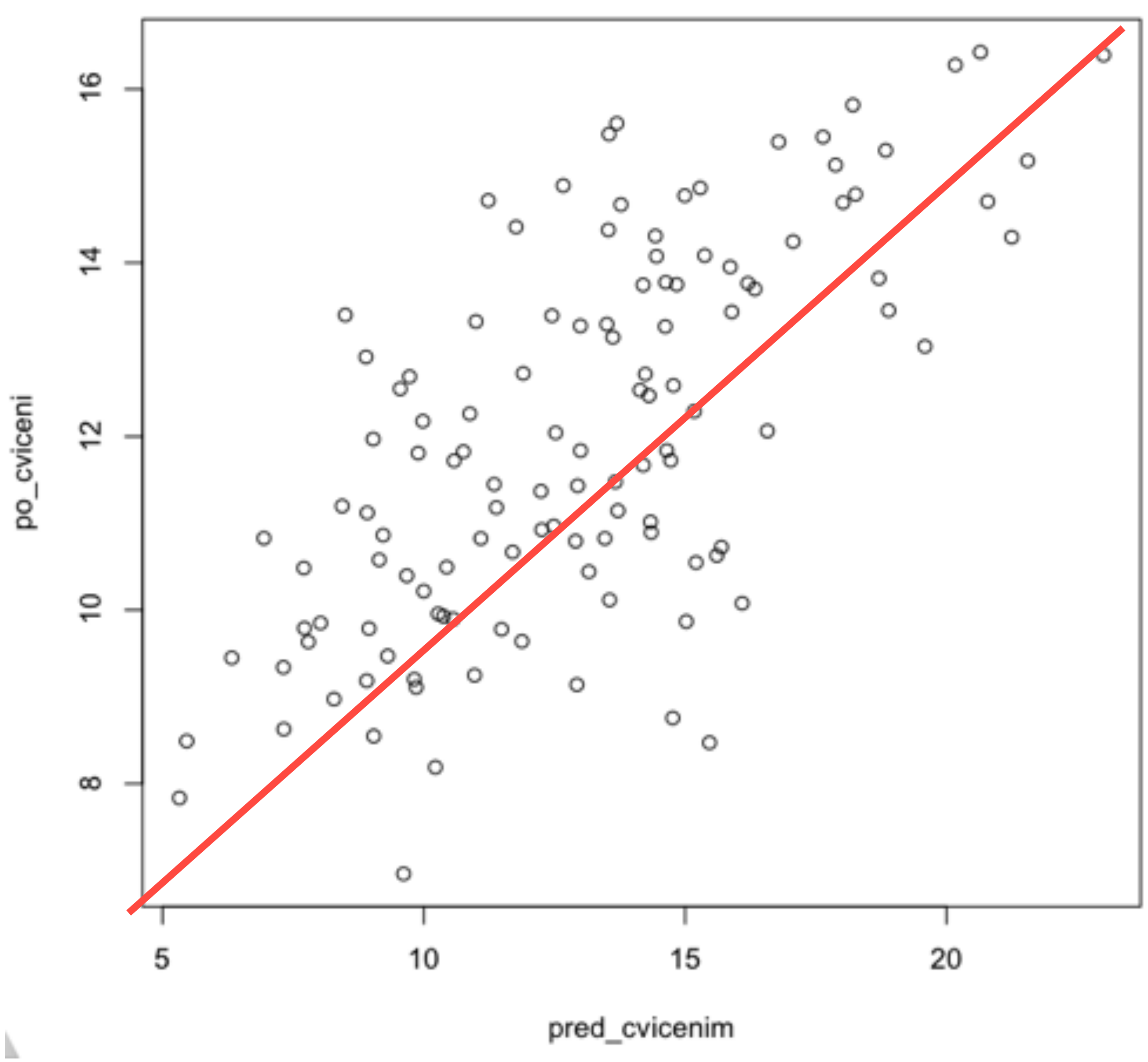
```
> po_cviceni
  [1] 14.889379  8.627612  9.867455 13.141168  9.249122  8.490774
  [7] 10.217290 10.724403 14.669450 14.243944 10.826905 13.951521
 [13] 14.693401  9.449562 16.425888 16.392689 13.265474 14.704994
 [19] 12.718107 10.395385  8.756276  6.961521 12.688497 10.578342
 [25] 14.294064 13.763032  8.472324 15.605253 11.968936  9.897284
 [31] 14.788205 14.773378 11.723336 11.719464 11.824407 12.914485
 [37] 13.291805 13.272867 12.586791  9.202608 15.817188 11.197137
 [43]  8.974410 10.823942 12.289400 10.483861 11.119684  9.956822
 [49]  9.778551 12.062084 13.449972 15.481139  9.470557 11.143402
 [55] 10.793291  9.786869  8.547580  8.188947 12.532635 10.862473
 [61] 10.547040 13.774638 14.861969 11.180668  9.790466 12.469556
 [67] 11.837173 13.820717 11.476120  9.850563 10.440890 11.015557
 [73] 12.547672 12.041457  9.639740 11.368657 11.431948 15.449064
 [79]  9.110052 15.125478 13.433802 11.807514  9.632299 12.725762
 [85] 10.628523 10.824474 13.389953 10.077884  9.185360 13.697777
 [91] 10.116078 13.036067 14.412094 12.175099  7.835201 16.277825
 [97] 10.967441 10.892966 11.668289  9.340267 15.392018 13.323701
[103]  9.928631 14.378075 10.924935 11.448320 11.836161 13.397990
[109] 13.744963 14.083459 10.668370  9.139692 14.716621 15.173684
[115] 10.493444 14.308470 15.295041 13.748886 14.074436 12.261138
```

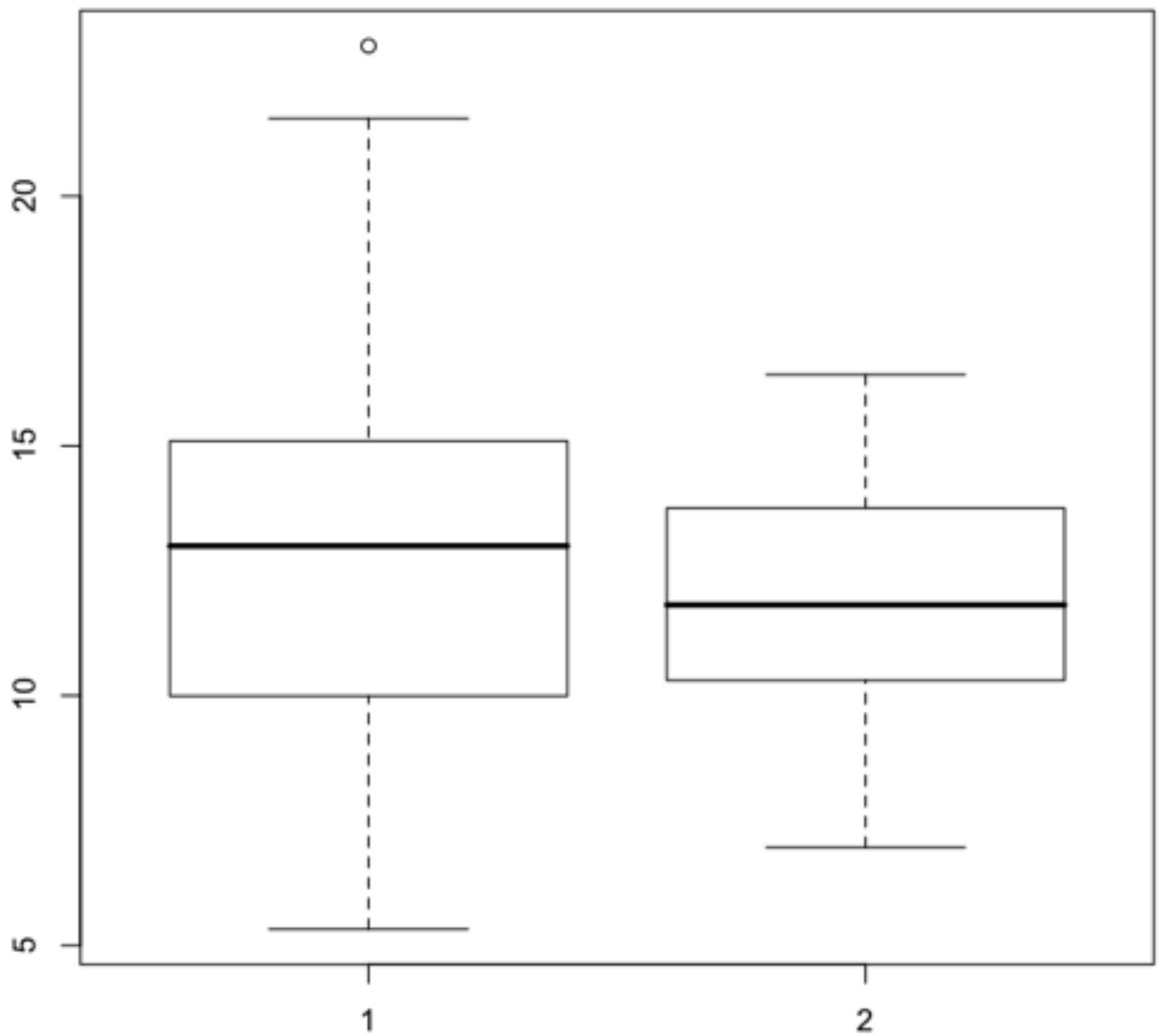
Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

2) Grafické zobrazení





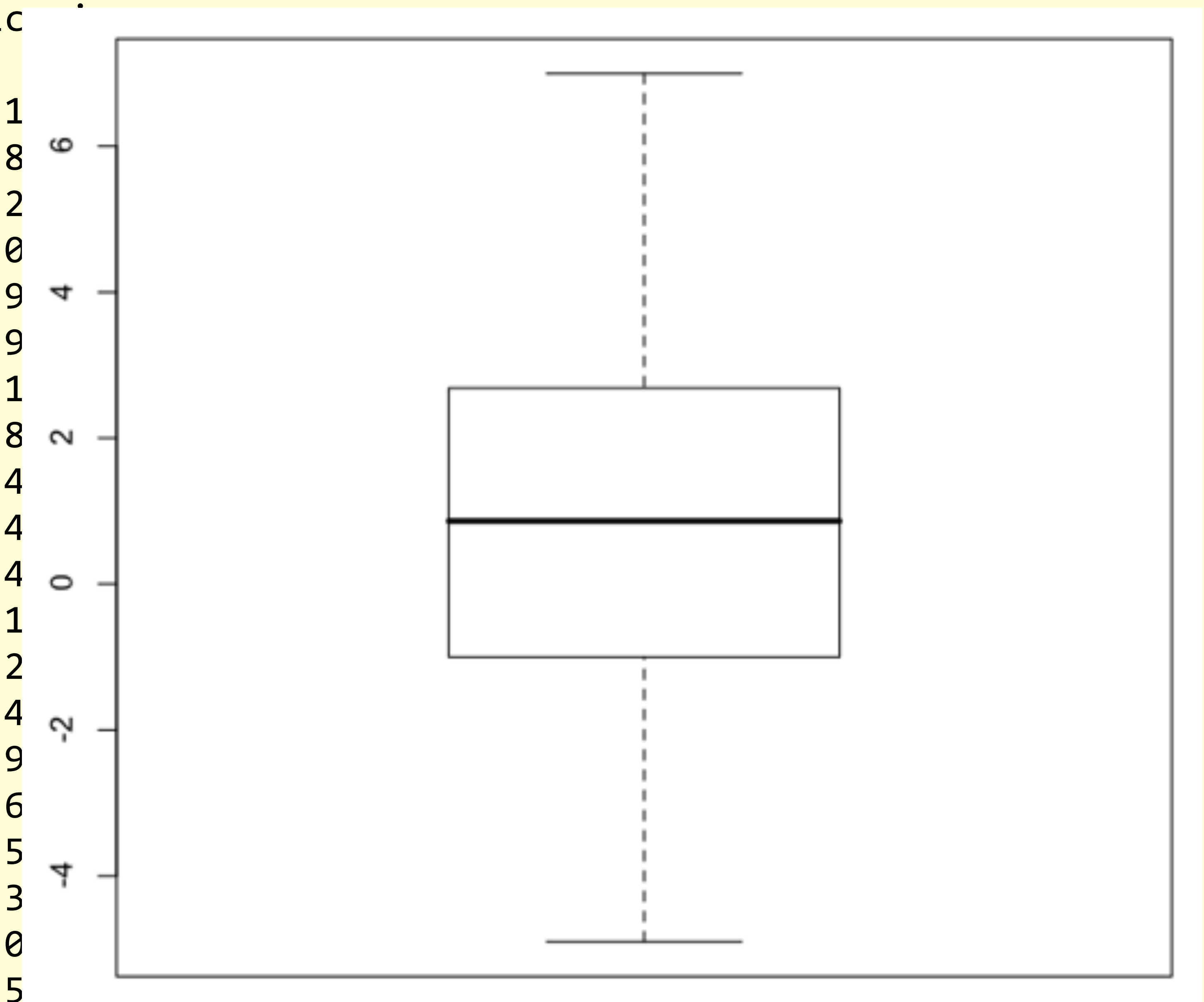
Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

3) Rozdíly:

```
> rozdil = pred_cvicenim - po_cvic
> rozdil
  [1] -2.22300091 -1.30482283  5.1
  [7] -0.21765415  4.96936015 -0.8
 [13]  3.32594695 -3.12303070  4.2
 [19]  1.52011877 -0.72104757  6.0
 [25]  6.95289576  2.43709534  6.9
 [31]  3.47069129  0.21903888  2.9
 [37]  0.21049440 -0.27813376  2.1
 [43] -0.69159043  0.26644963  2.8
 [49]  1.71014906  4.51006508  5.4
 [55]  2.11170209 -0.83530141  0.4
 [61]  4.66165463  0.85302053  0.4
 [67]  2.81048012  4.88524631  2.1
 [73] -2.99908758  0.48114855  2.2
 [79]  0.74417071  2.75192209  2.4
 [85]  4.97683829  2.63971186 -0.9
 [91]  3.43806805  6.55050838 -2.6
 [97]  1.51795203  3.45692228  2.5
[103]  0.44922574 -0.84689404  1.3
[109]  0.45029949  1.28945495  1.0
[115] -0.05664624  0.12179055  3.5
```



Statistické metody vyhodnocení výsledků experimentů

Příklady:

Byla měřena rychlost reakce operátorů před a po speciálním cvičení v sekundách. Mělo cvičení statisticky významný vliv na rychlost?

4) Párový t-test:

```
> t.test(rozdil, mu=0)

   One Sample t-test

data:  rozdil
t = 4.0391, df = 119, p-value = 9.54e-05
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.5089508 1.4878397
sample estimates:
mean of x
0.9983952
```

=> nulovou hypotézu zamítáme, cvičení mělo vliv a rychlost reakce se statisticky významně zvýšila