

V.4. Plošný integrál vektorové funkce

Nechť Q je jednoduchá hladká plocha orientovaná v bodech $X \in Q$ jednotkovým vektorem normály $\vec{n}^o(X)$. Nechť \vec{f} je vektorová funkce omezená na Q a nechť skalární funkce $(\vec{f} \cdot \vec{n}^o)$ je integrovatelná na ploše Q . Potom říkáme, že \vec{f} je integrovatelná na Q a

$$\iint_Q \vec{f}(X) \cdot d\vec{p} = \iint_Q (\vec{f}(X) \cdot \vec{n}^o(X)) dp.$$

Je-li $X = P(u, v)$ parametrizace plochy Q definovaná na množině $B \subset \mathbb{E}_2$, pak plošný integrál vektorové funkce \vec{f} lze přímo spočítat dle vzorce:

$$\iint_Q \vec{f}(X) \cdot d\vec{p} = \pm \iint_B \vec{f}(P(u, v)) \cdot (P_u \times P_v) du dv,$$

přičemž znaménko vybíráme podle toho, zda je plocha Q orientována souhlasně, resp. nesouhlasně, s parametrizací $P(u, v)$, tzn. je-li $(P_u \times P_v) \cdot \vec{n}^o(X) \geq 0$.

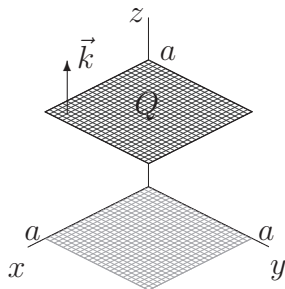
POZNÁMKA : Někdy se používá i jiné značení : Je-li $\vec{f} = (U, V, W)$, pak plošný integrál vektorové funkce \vec{f} se dá zapsat ve tvaru

$$\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q U dy dz + V dx dz + W dx dy$$

- Vypočítejte dané plošné integrály $\iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p}$ na ploše $Q \subset \mathbb{E}_3$, která je orientována daným normálovým vektorem.

Příklad 643. $\vec{f} = (x, y, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x \in \langle 0, a \rangle, y \in \langle 0, a \rangle, z = a, a > 0\}$ je orientována vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

Řešení :



$$Q \begin{cases} x = u, & u \in \langle 0, a \rangle \\ y = v, & v \in \langle 0, a \rangle \\ z = a, & \end{cases}$$

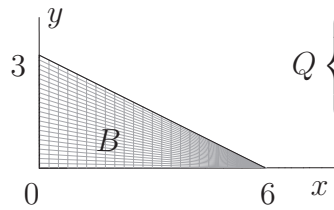
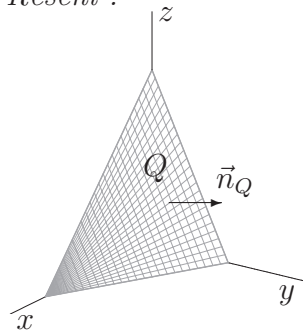
$$\left| \begin{array}{l} P(u, v) = [u, v, a], \quad B = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, a \rangle \\ P_u \times P_v = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1) \Rightarrow Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_Q (x, y, z) \cdot d\vec{p} = \iint_B (u, v, a) \cdot (P_u \times P_v) du dv = \\ &= \iint_B (u, v, a) \cdot (0, 0, 1) du dv = a \iint_B 1 du dv = a \cdot a^2 = a^3. \end{aligned}$$

■

Příklad 644. $\vec{f} = (z, y, 2x)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, normálový vektor plochy Q svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

Řešení :



$$Q \begin{cases} x = x, & x \in \langle 0, 6 \rangle \\ y = y, & y \in \langle 0, 3 - \frac{x}{2} \rangle \\ z = 6 - x - 2y, & \end{cases}$$

$$P(x, y) = [x, y, 6 - x - 2y], \quad B = \left\{ [x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 3 - \frac{x}{2} \right\}$$

$$P_x \times P_y = (1, 0, -1) \times (0, 1, -2) = (1, 2, 1)$$

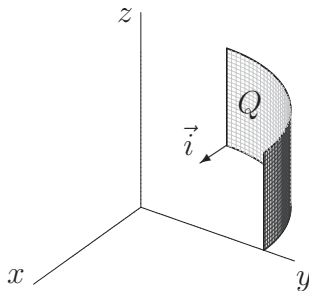
vektor $(1, 2, 1)$ svírá s vektorem \vec{k} ostrý úhel, tzn. $(1, 2, 1) \cdot \vec{k} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q$ je orientovaná souhlasně s parametrizací

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_Q (z, y, 2x) \cdot d\vec{p} = \iint_B (6 - x - 2y, y, 2x) \cdot (1, 2, 1) dx dy = \\ &= \iint_B (6 + x) dx dy = \int_0^6 (6 + x) \left[y \right]_0^{3 - \frac{x}{2}} dx = \int_0^6 \left(18 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[18x - \frac{x^3}{6} \right]_0^6 = 72 \end{aligned}$$

Příklad 645. $\vec{f} = (y, z, x^2)$, $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 16, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0 \}$, plocha je v bodě $[-4, 0, 0]$ orientována normálovým vektorem $\vec{i} = (1, 0, 0)$.

Řešení :



Q je část válcové plochy \Rightarrow

použijeme cylindrické souřadnice, kde $r = 4$

$$Q \begin{cases} x = 4 \cos u, & u \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \\ y = 4 \sin u, & \\ z = v, & v \in \langle 0, 3 \rangle \end{cases}$$

$$P(u, v) = [4 \cos u, 4 \sin u, v] \quad B = \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle \times \langle 0, 3 \rangle$$

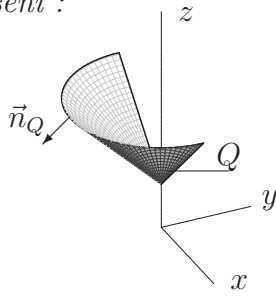
$$P_u \times P_v = (-4 \sin u, 4 \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (4 \cos u, 4 \sin u, 0)$$

$$\vec{n}([-4, 0, 0]) = (4 \cos \pi, 0, 0) = (-1, 0, 0) = -\vec{i} \Rightarrow Q \text{ je orientovaná nesouhlasně s parametrizací}$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= - \iint_B (4 \sin u, v, 16 \cos^2 u) \cdot (P_u \times P_v) du dv = \\ &= - \iint_B (4 \sin u, v, 16 \cos^2 u) \cdot (4 \cos u, 4 \sin u, 0) du dv = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^3 (-8 \sin 2u - 4v \sin u) dv \right) du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left[(-8v \sin 2u - 4 \frac{v^2}{2} \sin u) \right]_0^3 du = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -24 \sin 2u - 18 \sin u du = \left[12 \cos 2u + 18 \cos u \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 12 - 18 + 12 = 6 \end{aligned}$$

Příklad 646. $\vec{f} = (y, x, 2)$, $Q = \{ [x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0, y \leq 0, 1 \leq z \leq 3 \}$, \vec{n}_Q svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ tupý úhel, tzn. $\vec{n}_Q \cdot \vec{k} < 0$.

Řešení :



$$x^2 + y^2 - (z - 1)^2 = 0$$

$$z - 1 = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$$

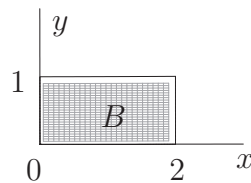
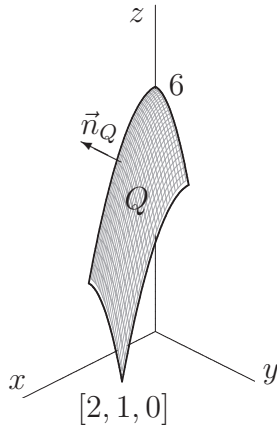
$$Q \begin{cases} x = v \cos u, & u \in \langle \pi, 2\pi \rangle \\ y = v \sin u, & v \in \langle 0, 3 \rangle \\ z = 1 + v, & \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, 1 + v] \quad B = \langle \pi, 2\pi \rangle \times \langle 0, 3 \rangle \\ P_u \times P_v = (-v \sin u, v \cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, 1) = (v \cos u, v \sin u, -v) \\ (v \cos u, v \sin u, -v) \cdot (0, 0, 1) = -v < 0 \Rightarrow Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_B (v \sin u, v \cos u, 2) \cdot (P_u \times P_v) du dv = \\ &= \iint_B (v \sin u, v \cos u, 2) \cdot (v \cos u, v \sin u, -v) du dv = \iint_B (2v^2 \sin u \cos u - 2v) du dv = \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \left(\int_0^3 (v^2 \sin 2u - 2v) dv \right) du = \int_{\pi}^{2\pi} \left[\left(\frac{v^3}{3} \sin 2u - v^2 \right) \right]_0^3 du = \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} [9 \sin 2u - 9] du = 9 \left[-\frac{\cos 2u}{2} - u \right]_{\pi}^{2\pi} = -9\pi \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 647. $\vec{f} = (y, x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 6 - x^2 - 2y^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0\}$, \vec{n}_Q svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

Řešení :



Q je část paraboloidu

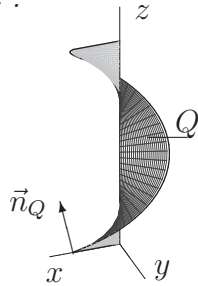
$$Q \begin{cases} x = x, & x \in \langle 0, 2 \rangle \\ y = y, & y \in \langle 0, 1 \rangle \\ z = 6 - x^2 - 2y^2, & \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(x, y) = [x, y, 6 - x^2 - 2y^2] \quad B = \langle 0, 2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ P_x \times P_y = (1, 0, -2x) \times (0, 1, -4y) = (2x, 4y, 1) \\ (2x, 4y, 1) \cdot (0, 0, 1) > 0 \Rightarrow Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_B (y, x, 6 - x^2 - 2y^2) \cdot (P_x \times P_y) dx dy = \\ &= \iint_B (y, x, 6 - x^2 - 2y^2) \cdot (2x, 4y, 1) dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^1 (6xy + 6 - x^2 - 2y^2) dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\left(3x \frac{y^2}{2} + 6y - yx^2 - \frac{2}{3}y^3 \right) \right]_0^1 dx = \int_0^2 \left(3x + 6 - x^2 - \frac{2}{3} \right) dx = \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{16}{3}x \right]_0^2 = 14 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 648. $\vec{f} = (xz^2, yz^2, (x^2 + y^2)z)$, $Q : x = v \cos u, y = v \sin u, z = bu$
 (šroubová plocha), $[u, v] \in \langle 0, a \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle$ ($a > 0, b > 0$), orientována
 normálovým vektorem $\vec{n}_Q = (n_1, n_2, n_3)$, kde $n_3 > 0$.

Řešení :

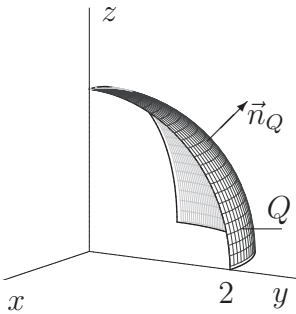


$$\left. \begin{array}{l} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, bu] \\ P_u = (\cos u, \sin u, 0) \\ P_u \times P_v = (b \sin u, -b \cos u, v) \\ v > 0 \implies \text{orientace plochy je souhlasná s parametrizací} \end{array} \right| \begin{array}{l} B = \langle 0, a \rangle \times \langle 0, 2\pi \rangle \\ P_v = (-v \sin u, v \cos u, b) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_Q (xz^2, yz^2, (x^2 + y^2)z) \cdot d\vec{p} = \\ &= \iint_B (b^2 u^2 v \cos u, b^2 u^2 v \sin u, buv^2) \cdot (b \sin u, -b \cos u, v) du dv = \\ &= \iint_B (b^3 v u^2 \sin u \cos u - b^3 v u^2 \sin u \cos u + bv^3 u) du dv = \iint_B bv^3 u du dv = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a bv^3 u dv \right) du = b \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^a \cdot \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \pi^2 a^4 b. \end{aligned}$$

Příklad 649.* Vypočítejte $\iint_Q z^2 dx dy$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = 4,$
 $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, \vec{n}_Q svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.

Řešení :



Q je část kulové plochy \implies

použijeme sférické souřadnice, kde $r = 2$:

$$Q \begin{cases} x = 2 \cos u \cos v & \frac{\pi}{2} \leq u \leq \pi \\ y = 2 \sin u \cos v & 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \\ z = 2 \sin v \end{cases}$$

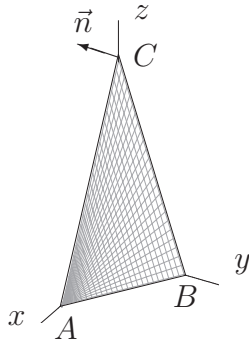
$$\left. \begin{array}{l} P(u, v) = [2 \cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, 2 \sin v] \\ P_u = (-2 \sin u \cos v, 2 \cos u \cos v, 0) \\ P_u \times P_v = (4 \cos u \cos^2 v, 4 \sin u \cos^2 v, 4 \sin v \cos v) \end{array} \right| \begin{array}{l} B = \langle \frac{\pi}{2}, 2\pi \rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ P_v = (-2 \cos u \sin v, -2 \sin u \sin v, 2 \cos v) \\ Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \iint_Q z^2 dx dy &= \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_Q (0, 0, z^2) \cdot d\vec{p} = \\ &= \iint_B (0, 0, 4 \sin^2 v) \cdot (4 \cos u \cos^2 v, 4 \sin u \cos^2 v, 4 \sin v \cos v) = \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^3 v \cos v du dv = 16 \cdot \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin^4 v}{4} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi. \end{aligned}$$

- Určete tok vektorového pole \vec{f} plochou $Q \subset \mathbb{E}_3$ orientovanou daným normálovým vektorem \vec{n} .

Příklad 650. $\vec{f} = (x, y - z, 2z)$, Q je trojúhelník o vrcholech A, B, C , kde $A = [3, 0, 0]$, $B = [0, 2, 0]$, $C = [0, 0, 6]$, $\vec{n} \cdot \vec{i} < 0$.

Řešení : Tok vypočteme tentokrát podle definice, tj. převedením na integrál skalární funkce.



Q je část roviny, jejíž rovnici napíšeme v úsekovém tvaru :

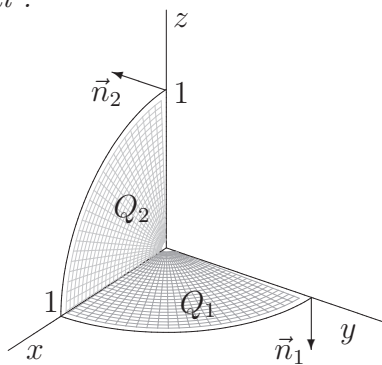
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1 \implies 2x + 3y + z = 6$$

$$\left| \begin{array}{l} Q \text{ je rovina s normálovým vektorem } \vec{n} = \pm(2, 3, 1) \\ \text{z podmínky } \vec{n} \cdot \vec{i} < 0 \text{ plyne, že } \vec{n} = -(2, 3, 1) \\ \vec{n}^o = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{-(2, 3, 1)}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{-(2, 3, 1)}{\sqrt{14}} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_Q \vec{f} \cdot \vec{n}^o dp = \iint_Q (x, y - z, 2z) \cdot \frac{(-2, -3, -1)}{\sqrt{14}} dp = \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_Q (-2x - 3y + 3z - 2z) dp = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_Q (z - 2x - 3y) dp = \\ &= \left| \begin{array}{ll} P(x, y) = [x, y, 6 - 2x - 3y] & 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{6-2x}{3} \\ P_x \times P_y = (1, 0, -2) \times (0, 1, -3) = (2, 3, 1) & \|P_x \times P_y\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_D (6 - 2x - 3y - 2x - 3y) \sqrt{14} dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^{\frac{6-2x}{3}} (6 - 4x - 6y) dy \right) dx = \\ &= \int_0^3 [6y - 4xy - 3y^2]_0^{\frac{6-2x}{3}} dx = \int_0^3 \left(-4x + \frac{4}{3}x^2 \right) dx = \left[-2x^2 + \frac{4x^3}{9} \right]_0^3 = -6. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Příklad 651. $\vec{f} = (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$, $Q = Q_1 \cup Q_2$, kde $Q_1 = \{[x, y, 0] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$, $Q_2 = \{[x, 0, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, z \geq 0\}$, jednotkovým vektorem normály plochy Q_2 je $\vec{n}_2^o = -\vec{j}$.

Řešení :



V souladu s normálovým vektorem $\vec{n}_2^o = -\vec{j}$ bude jednotkový vektor normály plochy Q_1 $\vec{n}_1^o = -\vec{k}$.

$$\iint_{Q_1 \cup Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_{Q_1} \vec{f} \cdot d\vec{p} + \iint_{Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p}$$

$$Q_1 : \left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, 0] & B_1 = \langle 0, \pi/2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ P_u \times P_v = (-v \sin u, v \cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, 0) = (0, 0, -v) \\ (0, 0, -v) \cdot (0, 0, -1) = v > 0 & \implies Q_1 \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q_1} \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_{B_1} v^3 \cos^2 u \, du \, dv = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 v^3 \cos^2 u \, dv \right) du = \\ &= \int_0^1 v^3 \, dv \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^1 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2u}{2} \, du = \frac{1}{8} \left[u + \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

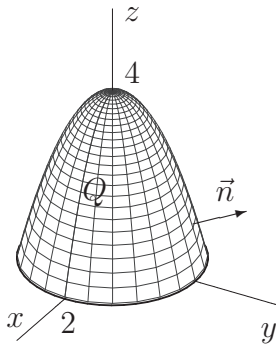
$$Q_2 : \left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [v \cos u, 0, v \sin u] & B_2 = \langle 0, \pi/2 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \\ P_u \times P_v = (-v \sin u, 0, v \cos u) \times (\cos u, 0, \sin u) = (0, -v, 0) \\ (0, -v, 0) \cdot (0, -1, 0) = v > 0 & \Rightarrow Q_2 \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_{Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \iint_{B_2} v^3 \sin^2 u \, du \, dv = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 v^3 \sin^2 u \, dv \right) du = \\ &= \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^1 \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2u}{2} \, du = \frac{1}{8} \left[u - \frac{\sin 2u}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

$$\iint_{Q_1 \cup Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p} = \iint_{Q_1} \vec{f} \cdot d\vec{p} + \iint_{Q_2} \vec{f} \cdot d\vec{p} = \frac{\pi}{8}. \quad \blacksquare$$

Příklad 652. $\vec{f} = (y, -x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, jejíž normálový vektor splňuje podmínku $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

Řešení :



Q je rotační paraboloid

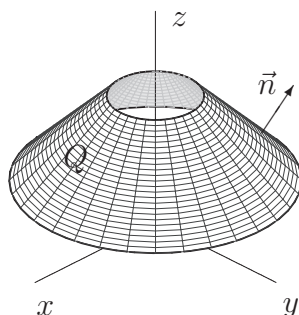
$$Q \begin{cases} x = v \cos u, & u \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ y = v \sin u, & v \in \langle 0, 2 \rangle \\ z = 4 - v^2, & \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{ll} P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, 4 - v^2] & B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 2 \rangle \\ P_u \times P_v = (-v \sin u, v \cos u, 0) \times (\cos u, \sin u, -2v) = (-2v^2 \cos u, -2v^2 \sin u, -v) \\ (2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, -v) \cdot (0, 0, 1) = -v < 0 & \Rightarrow Q \text{ je orientovaná nesouhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \pm \iint_B \vec{f} \cdot (P_u \times P_v) \, du \, dv = \\ &= - \iint_B (v \sin u, -v \cos u, 4 - v^2) \cdot (-2v^2 \cos u, -2v^2 \sin u, -v) \, du \, dv = \\ &= \iint_B (4v - v^3) \, du \, dv = \int_0^2 (4v - v^3) \, dv \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, du = 2\pi \left[2v^2 - \frac{v^4}{4} \right]_0^2 = 8\pi \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Příklad 653. $\vec{f} = (-y, x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 3\}$, normálový vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má $n_3 > 0$.

Řešení :



Q je část kuželové plochy

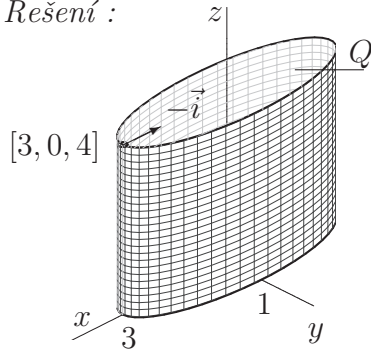
$$\begin{aligned} 1 \leq z \leq 3 &\Rightarrow \\ 1 \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 &\Rightarrow \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9 & \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(x, y) = [x, y, 4 - \sqrt{x^2 + y^2}] \quad B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\} \\ P_x \times P_y = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \times \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right), \\ \text{třetí souřadnice je kladná} \Rightarrow Q \text{ je orientovaná souhlasně s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= + \iint_B \vec{f} \cdot (P_x \times P_y) \, dx \, dy = \\ &= \iint_B (-y, x, 4 - \sqrt{x^2 + y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1\right) \, dx \, dy = \\ &= \iint_B 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \quad 1 \leq r \leq 3 \\ y = r \sin \varphi \quad | \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J = r \end{array} \right| = \\ &= \int_1^3 \left(\int_0^{2\pi} (4 - r) \cdot r \, d\varphi \right) dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_1^3 = \frac{44}{3} \pi. \end{aligned}$$

Příklad 654. $\vec{f} = (x, y, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + 9y^2 = 9, 0 \leq z \leq 4\}$, plocha je v bodě $[3, 0, 4]$ orientována normálovým vektorem $\vec{n} = -\vec{i} = (-1, 0, 0)$.

Řešení :



Q je eliptická válcová plocha \Rightarrow použijeme zobecněné cylindrické souřadnice

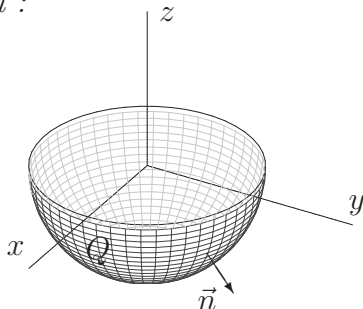
$$Q \begin{cases} x = 3 \cos u & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = \sin u & 0 \leq v \leq 4 \\ z = v \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} P(u, v) = [3 \cos u, \sin u, v] \quad B = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, 4 \rangle \\ P_u \times P_v = (-3 \sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) = (\cos u, 3 \sin u, 0) \\ \vec{n}([3, 0, 4]) = \vec{n}(u=0, v=4) = (1, 0, 0) \Rightarrow \text{orientace plochy není souhlasná s parametrizací} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \iint_Q \vec{f} \cdot d\vec{p} &= \pm \iint_B \vec{f} \cdot (P_u \times P_v) \, du \, dv = \\ &= - \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (3 \cos u, \sin u, v) \cdot (\cos u, 3 \sin u, 0) \, du \right) dv = \\ &= - \int_0^4 \left(\int_0^{2\pi} (3 \cos^2 u + 3 \sin^2 u) \, du \right) dv = -3 \cdot 2\pi \cdot 4 = -24\pi. \end{aligned}$$

Příklad 655. $\vec{f} = (-y, x, x^2 y^2 z)$, $Q = \{[x, y] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \leq 0, a > 0\}$, normálový vektor \vec{n} svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ tupý úhel.

Řešení :



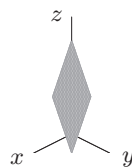
Q je část kulové plochy
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \leq 0 \Rightarrow$
 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$\left[\begin{array}{l} P(x, y) = [x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}] \quad B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq a^2\} \\ P_x = \left(1, 0, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right) \quad P_y = \left(0, 1, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right) \\ P_x \times P_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\right) \\ \text{z podmínky } \vec{n}_Q \cdot (0, 0, 1) < 0 \Rightarrow \text{orientace plochy není souhlasná s parametrizací} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \iint_Q (-y, x, x^2 y^2 z) \cdot d\vec{p} = \\ & = - \iint_B (-y, x, -x^2 y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) \cdot \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right) dx dy = \\ & = \iint_B x^2 y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \left[\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \quad 0 \leq r \leq a \\ y = r \sin \varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ J = r \end{array} \right] = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^a r^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \sqrt{a^2 - r^2} \cdot r dr d\varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi \int_0^a r^4 \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \left[\begin{array}{l} a^2 - r^2 = t^2 \\ -r dr = t dt \end{array} \right] = \\ & = 4 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi) d\varphi \cdot \int_a^0 (a^2 - t^2)^2 t \cdot (-t) dt = (\text{viz př. 21}) = \\ & = 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \int_0^a (a^4 - 2a^2 t^2 + t^4) t^2 dt = \frac{\pi}{4} \left[a^4 \frac{t^3}{3} - 2a^2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} \right]_0^a = \\ & = \frac{\pi}{4} \left(\frac{a^7}{3} - \frac{2a^7}{5} + \frac{a^7}{7} \right) = \frac{2\pi}{105} a^7. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

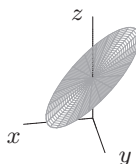
- Je dána vektorová funkce \vec{f} a plocha Q .
 - Načrtněte danou plochu. Navrhněte její parametrizaci a k ní napište vektor kolmý k ploše Q .
 - Vypočítejte tok zadaného vektorového pole \vec{f} plochou Q při orientaci daným normálovým vektorem \vec{n} .

656. $\vec{f} = (3x, 2y, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; 2x + 2y + z = 4, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,
 \vec{n} svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.



$$\left[\begin{array}{l} a) P(x, y) = [x, y, 4 - 2x - 2y], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \\ P_x \times P_y = (2, 2, 1) \\ b) 7 \end{array} \right]$$

657. $\vec{f} = (z, x, y)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x + z = 2, x^2 + y^2 \leq 4\}$, $\vec{n}^o = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$



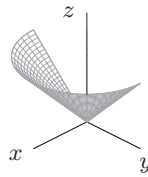
$$\left[\begin{array}{l} a) P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, 2 - v \cos u], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\} \\ P_u \times P_v = (v, 0, v) \\ b) 8\pi \end{array} \right]$$

658. $\vec{f} = (x, 0, 2z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = x^2 + y^2, z \leq 9\}$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý.



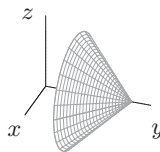
$$\left[\begin{array}{l} a_1) P(x, y) = [x, y, x^2 + y^2], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9\}, \\ P_x \times P_y = (-2x, -2y, 1) \\ a_2) P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v^2], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3\}, \\ P_u \times P_v = (2v^2 \cos u, 2v^2 \sin u, -v) \\ b) -\frac{81\pi}{2} \end{array} \right]$$

659. $\vec{f} = (-y, x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 3, x \geq 0\}$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel.



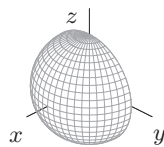
$$\left[\begin{array}{l} a_1) P(x, y) = [x, y, \sqrt{x^2 + y^2}], \\ B = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 \leq 9\}, \\ P_x \times P_y = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right) \\ a_2) P(u, v) = [v \cos u, v \sin u, v], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 3\}, \\ P_u \times P_v = (v \cos u, v \sin u, -v) \\ b) 9\pi \end{array} \right]$$

660. $\vec{f} = (x, y, -2z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; y = 9 - \sqrt{x^2 + z^2}, y \geq 3\}$, $\vec{n} \cdot \vec{j} < 0$



$$\left[\begin{array}{l} a_1) P(x, z) = [x, 9 - \sqrt{x^2 + z^2}, z], \\ B = \{[x, z] \in \mathbb{E}_2; x^2 + z^2 \leq 9\}, \\ P_x \times P_z = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}, 1, \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) \\ a_2) P(u, v) = [v \cos u, 9 - v, v \sin u], \\ B = \{[u, v] \in \mathbb{E}_2; 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\}, \\ P_u \times P_v = (v \cos u, -v, v \sin u) \\ b) -108\pi \end{array} \right]$$

661. $\vec{f} = (x, y, -z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0\}$, $\vec{n}^o([2, 0, 0]) = -\vec{i}$



$$\left[\begin{array}{l} a_1) P(y, z) = [\sqrt{4 - y^2 - z^2}, y, z], \\ B = \{[y, z] \in \mathbb{E}_2; y^2 + z^2 \leq 4\}, \\ P_y \times P_z = \left(1, \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) \\ a_2) P(u, v) = [2 \cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, 2 \sin v], \\ B = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \times \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, \\ P_u \times P_v = (4 \cos u \cos^2 v, 4 \sin u \cos^2 v, 4 \cos^2 v \sin v) \\ b) -\frac{16\pi}{3} \end{array} \right]$$

- Určete tok vektorového pole \vec{f} plochou $Q \subset \mathbb{E}_3$ orientovanou normálou \vec{n} :

662. $\vec{f} = (0, 0, 2)$, Q je trojúhelník o vrcholech $A = [0, 0, 0]$, $B = [5, 0, 0]$, $C = [0, 4, 1]$, normálový vektor svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ostrý úhel. [20]

663. $\vec{f} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$, Q je rovnoběžník s vrcholy $A = [0, 0, 0]$, $B = [0, 3, 3]$, $C = [-1, 4, 5]$, $D = [-1, 1, 2]$ orientován normálou $\vec{n} = (1, -1, 1)$. [12]

664. $\vec{f} = (x, y, 0)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$, normálový vektor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ má třetí souřadnici kladnou. [81π]

665. $\vec{f} = (y, -x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = x^2 + \frac{y^2}{9} - 4, y \geq 0, z \leq 0\}$, $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ [12π]

666. $\vec{f} = (x, y, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = 9, 0 \leq z \leq 4\}$, $\vec{n}^\circ([3, 0, 0]) = -\vec{i}$.
[-72\pi]
667. $\vec{f} = (z, x^2 + y^2, 1)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq h\}$, $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$
[-h^2\pi]
668. $\vec{f} = (x, y, x^2 + y^2)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 = b^2, 0 \leq z \leq h, y \geq 0\}$
 $\vec{n}^\circ([b, 0, 0]) = \vec{i}$.
[b^2h\pi]
669. $\vec{f} = (y, -x, z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = 4 - x^2 - \frac{y^2}{9}, y \geq 0, z \geq 0\}$, $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$
[12\pi]
670. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2\}$, $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$
[8\pi]
671. $\vec{f} = (x, y, 3z)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z = x^2 + y^2 + 1, 1 \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$,
 $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$
[\frac{7}{8}\pi]
672. $\vec{f} = (x^2, y^2, z^2)$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1, z \geq 0, 0 \leq x \leq 3\}$,
 $\vec{n}^\circ([1, 0, 2]) = -\vec{k}$.
[-64]
673. Vypočítejte plošný integrál $\iint_Q x^2 dy dz + z^2 dx dy$, $Q = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;$
 $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$, \vec{n} svírá tupý úhel s vektorem \vec{k} .
[-\frac{\pi}{2}]