

IV. PLOŠNÉ INTEGRÁLY

1. Jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3

Parametrizace, orientace

2. Plošný integrál skalární funkce $\int \int_{\sigma} f(X) dp$

(obsah, hmotnost, těžiště, momenty ...)

3. Plošný int. vektorové funkce $\int \int_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{p}$

(tok vektorového pole \vec{f} danou plochou σ daným směrem \vec{n})

4. Gaussova-Ostrogradského věta

výpočet toku **uzavřenu** plochou σ výpočtem

$$\int \int \int_{\text{Int}\sigma} \text{div } \vec{f} \, dx \, dy \, dz$$

Definice:

Jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 je množina bodů tvaru $X = P(u, v)$, kde P je zobrazení množiny $B \subset \mathbb{E}_2$ do \mathbb{E}_3 :

- a) P je spojitě a prostě zobr.,
- b) Parciální derivace P_u, P_v jsou spojitě a omezené v B ,
- c) Vekt. součin $P_u \times P_v \neq \vec{0}$ v B .

vlastnosti b), c) mohou být nesplněny v konečně mnoha bodech ∂B , tj. hranice B .

Zobr. P se nazývá **parametrizace plochy**

Plochy značíme např. σ, τ, Q, \dots

Okraj plochy je křivka v \mathbb{E}_3 , která je obrazem hranice ∂B .

Definice: Plošný integrál skalární funkce $f(x, y, z)$ na ploše σ

(též plošný integrál 1. druhu) tj. $\int \int_{\sigma} f(X) dp$

je definován dvojným integrálem $\int \int_B f(P(u, v)) \|P_u \times P_v\| du dv$,
pokud tento existuje.

Zde σ je jednoduchá hladká plocha v \mathbb{E}_3 s parametrizací

$X = P(u, v), [u, v] \in B$.

Postač. podm. pro existenci: Fce f je spojitá na ploše σ

Slabší podm.:

Fce f je spojitá a omezená na $(\sigma - M)$, kde M je konečná mn.

NP pro existenci: Fce f je omezená na ploše σ

Poznámka: Existence a hodnota nezávisí na volbě parametrizace P .

Aplikace: obsah plochy, mechanické charakteristiky plochy

IV.4 Plošný integrál vektorové funkce

(též plošný integrál 2. druhu)

Příklad. Objem tekutiny, která při rychlosti \vec{v} proteče danou plochou σ daným směrem \vec{n} za jednotku času

Předpoklady:

Nestlačitelná tekutina a stacionární proudění,
tj. rychlost $\vec{v}(x, y, z)$ nezávisí na čase

Definice:

Plošný integrál vektorové funkce $\vec{f} = (U, V, W)$ na ploše σ orientované vektorem \vec{n} , značíme $\int \int_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{p}$

je definován hodnotou plošného integrálu skalární funkce $\vec{f} \cdot \vec{n}$, tj.

$$\int \int_{\sigma} \vec{f} \cdot d\vec{p} = \int \int_{\sigma} (\vec{f} \cdot \vec{n}) \, d p,$$

pokud tento existuje.

Název: Tok vekt. pole \vec{f} danou orientovanou plochou

V následujících úlohách

- a) Načrtněte danou plochu a navrhňte její parametrizaci.
Napište vektor kolmý k dané ploše (při této parametrizaci).
- b) Řešte danou úlohu ...

Skalární funkce

1. a) $Q = \{[x, y, z]; x^2 + y^2 = 16, 0 \leq z \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- b) Vypočítejte plošný integrál $\int \int_Q z(x^2 + y^2) \, dp$.
Co by mohl výsledek vyjadřovat? $\left[\text{Výsl.: } 400\pi \right]$

2. a) $Q : z = \sqrt{x^2 + y^2}; z \leq 6, x \geq 0$

b) Vypočítejte plošný integrál $\int \int_Q xy^2 z \, dp$.
Co by mohl výsledek vyjadřovat ?

Vypočítejte obsah dané plochy.

a) $Q : z = x^2 + y^2; z \leq 9$

b) $Q : z = y^2 - x^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$
[Výsl.: $\pi (17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})/6$]

Vektorová funkce

V následujících úlohách

- a) Načrtněte danou plochu (včetně orientace). Navrhněte její parametrizaci. Napište vektor kolmý k dané ploše (při této parametrizaci).
- b) Určete tok daného vekt. pole \vec{f} danou orientovanou plochou.

1. $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; 2x + 2y + z = 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.
Orientace je dána normálovým vektorem $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, který má $n_3 < 0$.

$$\vec{f} = (x, y^2, z) \quad [-63/2].$$

2. $Q : z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Orientace dána vektorem $\vec{n}[(0, 0, 4)] = \vec{k}$.
pole $\vec{f} = (-y, x, 3z)$.

3. $\sigma = \{[x, y, z] \in E_3; z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$.
Orientace dána vektorem \vec{n} , který svírá s vektorem $\vec{k} = (0, 0, 1)$ úhel tupý (též: $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$)

pole $\vec{f} = (x, 0, 2z)$.

4. $\sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq z \leq 2$, ve směru \vec{n} , kde $n_3 > 0$.
pole $\vec{f} = (-x, -y, z^2)$.

Věta Gaussova-Ostrogradského.

Nechť 1. Souřadnicové funkce U, V, W vektorového pole \vec{f} mají spojité parc. derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.

2. Q je uzavřená po částech hladká plocha, vně orientovaná, která leží i se svým vnitřkem $\text{Int } Q$ v D .

Pak platí

$$\iint_Q \vec{f}(\mathbf{X}) d\vec{p} = \iiint_{\text{Int}Q} \text{div } \vec{f}(\mathbf{X}) dx dy dz$$

! Poznámka: Je-li plocha orientovaná dovnitř, pak napravo přidáme znaménko **mínus**.

Předpoklady souhrnně:

Q je vně orientovaná uzavřená plocha

ležící se svým vnitřkem $\text{Int } Q$ v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$,

ve které jsou spojitě PD vektorového pole $\vec{f} = (U, V, W)$.

Poznámka:

Předpoklady vyžadují, aby se vše "odehrávalo" v oblasti, v níž má dané vekt. pole spojitě PD.

Věta Stokesova (IV.5.10.) Nechť

1. souřadnicové funkce U, V, W vekt. pole \vec{f} mají spojité parc. derivace v oblasti $D \subset \mathbb{E}_3$.
2. σ je jednoduchá po č. hladká plocha v D , jejímž okrajem je uzavřená hladká křivka C .
3. Plocha σ je se svým okrajem C souhlasně orientovaná.

Pak platí

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{p}$$

Důsledek Je-li plocha σ uzavřená, pak její okraj je prázdná množina a proto

$$\iint_{\sigma} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{p} = 0$$