

III. Diferenciální počet

Rozšířená mn. reálných čísel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

množina \mathbb{R} rozšířená o dva prvky značené $+\infty$, $-\infty$, tzv. nevlastní body.

Aritmetické operace v množině \mathbb{R}^*

1. Pro každé $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}x + (+\infty) &= +\infty, & x + (-\infty) &= -\infty, & x - (+\infty) &= -\infty, \\x - (-\infty) &= +\infty, & x / (+\infty) &= x / (-\infty) = 0.\end{aligned}$$

2. Pro každé $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$:

$$\begin{aligned}x \cdot (+\infty) &= +\infty, & x \cdot (-\infty) &= -\infty, \\+\infty / x &= +\infty, & (-\infty) / x &= -\infty,\end{aligned}$$

pro $x < 0$ jsou opačná znaménka ve výsledku.

3. Operace mezi nevlastními body:

$$\begin{aligned} (+\infty) + (+\infty) &= (+\infty) - (-\infty) = +\infty, \\ (-\infty) + (-\infty) &= (-\infty) - (+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

NEJSOU definovány tzv. neurčité výrazy:

$$\begin{aligned} (+\infty) - (+\infty), \quad (-\infty) - (-\infty), \quad (+\infty) + (-\infty), \\ 0 \cdot (\pm\infty), \quad 0/0, \quad (\pm\infty)/(\pm\infty). \end{aligned}$$

Výraz $x/0$, $x \in \mathbb{R}$ není jednoznačně definován,
ale o jeho hodnotě můžeme v limitě rozhodnout ze znalosti
znaménka výrazu ve jmenovateli v okolí vyšetřovaného bodu.

Posloupnosti

Definice Plst $\{a_n\}$ nazýváme

a) **rostoucí**, jestliže pro $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n < a_{n+1}$

b) **klesající**, jestliže pro $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n > a_{n+1}$

V těchto dvou případech mluvíme o **plsti ryze monotónní**.

c) **neklesající**, jestliže pro $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$

d) **nerostoucí**, jestliže pro $\forall n \in \mathbf{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$

V těchto dvou případech mluvíme o **plsti monotónní**.

Příklad. Vyšetřete monotónii plsti $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

Definice Plst $\{a_n\}$ nazýváme

a) **omezenou shora**, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in N : a_n \leq K$

b) **omezenou zdola**, existuje-li $L \in \mathbb{R}$ tak, že pro $\forall n \in N : a_n \geq L$.

a)* Nejmenší z čísel s vlastností a) se nazývá **supremum plsti** $\{a_n\}$.

Je-li některý prvek a_n roven supremu, pak mluvíme o **maximu plsti**.

Používáme označení **sup** $\{a_n\}$, resp. **max** $\{a_n\}$.

b)* Největší z čísel s vlastností b) se nazývá **infimum plsti** $\{a_n\}$.

Je-li některý prvek a_n roven infimu, pak mluvíme o **minimu plsti** $\{a_n\}$.

Používáme označení **inf** $\{a_n\}$, resp. **min** $\{a_n\}$.

Příklad *. Dána plst $\{a_n\}$, kde $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Určete její supremum a infimum. Existují hodnoty maxima a minima ?

Základní věty o limitě posloupnosti

Věta 1.6 Každá plst má nejvýše jednu limitu.

Věta 1.9 (limita vybrané posloupnosti) Má-li plst $\{a_n\}$ limitu a , pak jakákoliv vybraná plst má též limitu a .

Poznámka. Jestliže plst $\{a_n\}$ obsahuje dvě vybrané plsti s různou limitou, pak $\lim \{a_n\}$ neexistuje.

Příklad

Limity **a)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$, **b)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ **neexistují,**

ALE

Př. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$

Věta 1.11 Nechť existují $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

Pak platí: $\lim a_n * b_n = a * b$, **pokud** výraz $a * b$ má smysl.

Symbol $*$ znamená operaci z mn. $\{+, -, \times, /\}$, **vždy je** $n \rightarrow +\infty$

Další řešené příklady **v textu Výpočet limity** na této web stránce.

Př. 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 1000n) = +\infty - (+\infty)$, tento výraz však

není definován, Větu 1.11 nelze použít. Proto úprava

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^3 - 1000n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left(1 - \frac{1000}{n^2}\right) = +\infty \cdot \left(1 - \frac{1000}{+\infty}\right) = \\ &+\infty \cdot (1 - 0) = +\infty. \end{aligned}$$

Př. 2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1000n - n^3) = -\infty$.

Př. (důležitý) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$ P, Q jsou polynomy, vede na typ " $\frac{\infty}{\infty}$ "

Postup výpočtu:

Každý z polynomů upravíme jako v př. 1, tj. vytkneme jeho nejvyšší mocninu. Společnou mocninu pak krátíme, čímž odstraníme neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$.

Lze postupovat také tak, že danou racionální lomenou funkci, tj. podíl $P(n)/Q(n)$ krátíme nejvyšší mocninou polynomu $Q(n)$.

$$\text{Př. 3 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n - n^2}{100n + 30} = -\infty. \quad \text{Př. 4 } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{30n^2 + 5}{n^3 + 10n - 8} = 0.$$

$$\text{Př. 5. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 3}{4n^2 - (2n + 1)^2} = -\frac{1}{4}$$

Limity s odmocninami

$$\text{Př. 6. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-2} \right) = 0$$

$$\text{Př. 7. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-2} \right) = 5/2$$

Důležité limity

$$\text{Př. 8. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2,718\dots \quad \text{Eulerovo číslo}$$

$$\text{Př. 9. } \text{Libovolné } a > 0, \text{ pak } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$\text{Př. 10. } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Věta 1.15 (limita sevřené plsti)

Nechť pro plsti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ platí: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = c$
a pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \leq b_n \leq c_n$.

Pak existuje $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = c$.

Př. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$

Př. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n!)}{n^2 + 1} = 0.$