

IV.7. Potenciální vektorové pole

Vektorové pole $\vec{f} = (U, V, W)$ se nazývá **potenciální pole v oblasti** $G \subset \mathbb{E}_3$, jestliže existuje skalární funkce φ taková, že $\vec{f} = \text{grad} \varphi$ v oblasti G . Podobně pro vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$.

Skalární funkci φ nazýváme **potenciálem vektorového pole \vec{f} v G** .

Platí následující tvrzení (podrobněji ve skriptu Matematika II od J. Neustupy):

Věta. Nechť \vec{f} je potenciální a spojitě vektorové pole s potenciálem φ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ (resp. \mathbb{E}_2). Nechť c je orientovaná křivka v G s počátečním bodem A a s koncovým bodem B . Pak

$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A).$$

POZNÁMKA. Protože pro potenciální vektorové pole \vec{f} závisí hodnota křivkového integrálu $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ pouze na počátečním a koncovém bodě, lze v tomto případě psát

$$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}.$$

Věta. Nechť \vec{f} je spojitě vektorové pole v oblasti $G \subset \mathbb{E}_3$ (resp. \mathbb{E}_2). Pak následující tři výroky jsou ekvivalentní:

- \vec{f} je potenciální pole v G .
- Křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí v oblasti G na integrační cestě.
- Cirkulace pole \vec{f} po libovolné uzavřené křivce v G je nulová.

V dalším textu se soustředíme především na **vektorové pole v \mathbb{E}_2** .

Věta. (Postačující podmínka potenciálnosti v \mathbb{E}_2 .)

Nechť

- G je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_2 a
- $\vec{f} = (U, V)$ je vektorové pole, jehož souřadnicové funkce $U(x, y), V(x, y)$ mají v oblasti G spojitě parciální derivace a
- funkce U, V splňují podmínku $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$ v G .

Pak \vec{f} je potenciální vektorové pole v G .

Při výpočtu potenciálu zpravidla nejprve ověříme podle postačující podmínky, že dané vektorové pole je potenciální v oblasti G . Pro **výpočet potenciálu v \mathbb{E}_2** pak máme několik možností.

1. metoda. Potenciál určíme z definice potenciálu, tzn. $\vec{f} = \text{grad} \varphi$ v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$. Tak dostáváme rovnice

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = U, \quad (2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V$$

2. metoda. Potenciál určíme výpočtem křivkového integrálu. Z výše uvedené věty vyplývá, že potenciál $\varphi(x, y) = \int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je vhodně zvolená křivka v G se zvoleným počátečním bodem $[x_0, y_0]$ a koncovým bodem $[x, y]$.

Příklad 554. Určete největší možnou oblast(i), na níž je dané vektorové pole po-

$$\text{tenciální. a) } \vec{f} = \left(\frac{y^2}{x^2} - \sin y, -\frac{2y}{x} + y^2 \right), \quad \text{b) } \vec{f} = \left(\frac{y^2}{x^2}, -\frac{2y}{x} + y^2 \right).$$

Řešení: a) Souřadnicové funkce U, V daného pole mají spojité parciální derivace v oblastech D_1 a D_2 , kde $D_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0\}$, $D_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x < 0\}$.

Vypočteme parciální derivace: $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}$, zatímco $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} - \cos y$.

Není tedy splněna nutná podmínka, aby vektorové pole bylo potenciální, tj. podmínka

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}.$$

b) Dané vektorové pole má spojité parciální derivace v oblasti D_1 a v oblasti D_2 z úlohy a). Každá z těchto oblastí je jednoduše souvislá a platí

$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2y}{x^2}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}$. Zadané vektorové pole tedy splňuje výše uvedenou postačující podmínku a proto je potenciální v každé z oblastí D_1, D_2 . ■

Příklad 555. a) Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ je potenciální v oblasti \mathbb{E}_2 . b) Určete potenciál tohoto vektorového pole. c) Vypočítejte křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je úsečka od bodu $A = [1, 3]$ do bodu $B = [2, 1]$.

Řešení: a) Souřadnicové funkce U, V jsou polynomy. Mají tedy spojité parciální derivace v množině \mathbb{E}_2 , což je oblast jednoduše souvislá. Výpočtem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2x \text{ vidíme, že dané pole je potenciální v oblasti } \mathbb{E}_2.$$

b) Při výpočtu potenciálu podle 1. metody vyjdeme ze dvou podmínek

$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3 + 2xy, \quad (2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 - 3y^2$$

Integrováním podle x vypočítáme z podmínky (1):

$$\varphi(x, y) = \int (3 + 2xy) dx = 3x + x^2y + K(y).$$

Takto vypočtená funkce $\varphi(x, y)$ obsahuje neznámou funkci $K(y)$. Po dosazení za φ do podmínky (2) získáme rovnici (2'), ve které už nebude proměnná x .

To je "kontrolní místo" výpočtu. Derivaci funkce K lze zapsat ve tvaru $\frac{dK}{dy}$, neboť K je funkce jedné proměnné.

$$(2') \quad x^2 + \frac{dK}{dy} = x^2 - 3y^2 \implies \frac{dK}{dy} = -3y^2.$$

Funkci $K(y)$ pak získáme integrováním:

$$K(y) = \int -3y^2 dy = -y^3 + C.$$

Po dosazení za $K(y)$ obdržíme výsledný tvar potenciálu

$$\varphi(x, y) = 3x + x^2y - y^3 + C, \quad [x, y] \in \mathbb{E}_2, \quad C \text{ je libovolné reálné číslo.}$$

c) Zadaný křivkový integrál lze vypočítat pomocí parametrizace dané úsečky. Protože však dané pole je potenciální v \mathbb{E}_2 , lze křivkový integrál vypočítat pomocí potenciálu:

$$\int_c (3 + 2xy, x^2 - 3y^2) \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(2, 1) - \varphi(1, 3) = 30. \quad \blacksquare$$

- Příklad 556.** a) Ověřte, že jsou splněny postačující podmínky potenciálnosti pro dané vektorové pole \vec{f} v oblasti $G = \mathbb{E}_2$.
 b) Určete jeho potenciál výpočtem křivkového integrálu, tj. 2. metodou.
 c) Vypočtěte $\int_A^B (3x^2y - 3y^2, x^3 - 6xy) \cdot d\vec{s}$, je-li $A = [1, 3], B = [2, 1]$.

Řešení: a) Funkce U a V jsou spojité a diferencovatelné v celém \mathbb{E}_2 .

$G = \mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá oblast.

Pak k ověření, že \vec{f} je potenciální v G , stačí zjistit, zda $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 3x^2 - 6y. \quad \text{Ano, pole } \vec{f} \text{ je potenciální v } \mathbb{E}_2.$$

b) $\vec{f} = \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$. Ukažme výpočet podle 2. metody.

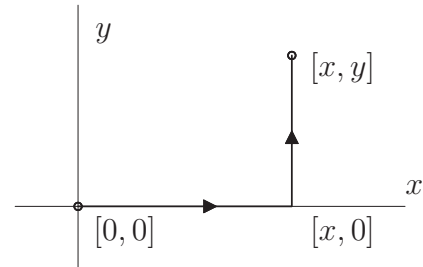
$$\int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_{[x_0, y_0]}^{[x, y]} d\varphi = \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) .$$

$$\text{Zvolíme } [x_0, y_0] = [0, 0] : \quad \varphi(x, y) = \int_{[0, 0]}^{[x, y]} (3x^2y - 3y^2) dx + (x^3 - 6xy) dy =$$

(víme, že integrál nezávisí na cestě, proto zvolíme

lomenou čáru $[0, 0] \rightarrow [x, 0] \rightarrow [x, y]$) :

$$\left| \begin{array}{l} [0, 0] \rightarrow [x, 0] : y = 0, dy = 0 \\ [x, 0] \rightarrow [x, y] : x = \text{konst.}, dx = 0 \end{array} \right|$$



$$= \int_{[0, 0]}^{[x, 0]} (3x^2y - 3y^2) dx + (x^3 - 6xy) dy + \int_{[x, 0]}^{[x, y]} (3x^2y - 3y^2) dx + (x^3 - 6xy) dy =$$

$$= \int_0^x 0 dx + \int_0^y (x^3 - 6xy) dy = x^3y - 3xy^2 \implies$$

$$\varphi(x, y) = x^3y - 3xy^2 + C,$$

$$\text{c) } \int_{[1, 3]}^{[2, 1]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(2, 1) - \varphi(1, 3) = (8 - 6) - (3 - 27) = 26. \quad \blacksquare$$

Příklad 557. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (3x^2y, x^3 + \sqrt{y})$. Napište postačující podmínky pro to, aby křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisel v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$ na cestě. Ověřte jejich splnění. Určete potenciál φ a užitje jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce \vec{f} po dané křivce.

a) c_1 je úsečka z bodu $A = [2, 4]$ do bodu $B = [1, 1]$. b) c_2 je záporně orientovaná hranice množiny $M = \{[x, y] : x^2 + (y - 3)^2 \leq 8, x \geq 0\}$.

Řešení: $U(x, y) = 3x^2y, V(x, y) = x^3 + \sqrt{y}$. Ověřte si, že parciální derivace jsou spojité v oblasti $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y > 0\}$, která je jednoduše souvislá a platí rovnost $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$.

Výpočet potenciálu φ : Podmínky (1) a (2) mají tvar:

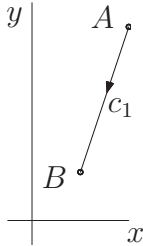
$$(1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2y, \quad (2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^3 + \sqrt{y}$$

Z podmínky (1) vypočítáme $\varphi(x, y) = \int 3x^2y \, dx = x^3y + K(y)$.

Po dosazení do (2): $x^3 + \frac{dK}{dy} = x^3 + \sqrt{y}$. Po úpravě získáme rovnici $\frac{dK}{dy} = \sqrt{y}$, ze které určíme $K(y) = \int \sqrt{y} \, dy = \frac{2}{3} \sqrt{y^3} + C$.

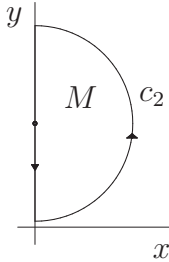
Hledaný potenciál v D je $\varphi(x, y) = x^3y + \frac{2}{3} \sqrt{y^3} + C$.

a)



$$\begin{aligned} \int_{c_1} \vec{f} \cdot d\vec{s} &= \int_{c_1} (3x^2y, x^3 + \sqrt{y}) \cdot d\vec{s} = \\ &= \varphi([1, 1]) - \varphi([2, 4]) = -107/3. \end{aligned}$$

b)



Daná křivka c_2 je uzavřená. Je to obvod půlkruhu M , který leží v oblasti D , v níž je dané vektorové pole \vec{f} potenciální.

Z vlastnosti potenciálu pak vyplývá, že cirkulace daného vektorového pole \vec{f} podél této křivky c_2 je rovna nule. ■

Příklad 558. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (2x \cos y, -x^2 \sin y)$. a) Ověřte, že je pole potenciální v \mathbb{E}_2 . b) Určete jeho potenciál φ . c) Vypočtěte $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je křivka s počátečním bodem $A = [2, 0]$ a koncovým bodem $B = [4, \pi/2]$.

Řešení: a) Oblast \mathbb{E}_2 je jednoduše souvislá oblast a platí

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -2x \sin y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -2x \sin y \quad \implies \quad \vec{f} \text{ je potenciální v } \mathbb{E}_2.$$

$$b) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \cos y \quad \implies \quad \varphi(x, y) = \int 2x \cos y \, dx = x^2 \cos y + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -x^2 \sin y \quad \implies \quad x^2(-\sin y) + \frac{dK}{dy} = -x^2 \sin y \quad \implies \quad \frac{dK}{dy} = 0 \quad \implies \quad K(y) = C$$

$$\varphi(x, y) = x^2 \cos y + C.$$

$$c) \quad \int_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(4, \pi/2) - \varphi(2, 0) = 16 \cos \frac{\pi}{2} - 4 \cos 0 = -4. \quad \blacksquare$$

Příklad 559. Určete oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$, v nichž je pole $\vec{f} = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5, \right.$

$\left. \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \right)$ potenciální a stanovte jeho potenciál $\varphi(x, y)$,

který splňuje podmínku $\varphi(-2, 2) = 0$.

Řešení: $G_1 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 0\}$, $G_2 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x < 0, y > 0\}$,
 $G_3 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y < 0\}$, $G_4 = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x < 0, y < 0\}$.

Platí $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} + 2$, tedy je \vec{f} potenciální v $G_i, i = 1, 2, 3, 4$.

Výpočet potenciálu φ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5 \Rightarrow \varphi(x, y) = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} + 2y - 5 \right) dx = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \Rightarrow -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2x + \frac{dK}{dy} = \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} + 2x + 11 \Rightarrow K(y) = 11y + C$$

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y + C;$$

Z podmínky $\varphi(-2, 2) = 0$ vypočteme konstantu C :

$$-1 + 1 - 8 + 10 + 22 + C = 0 \implies C = -22$$

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2xy - 5x + 11y - 22 \quad \text{pro } [x, y] \in G_2.$$

■

Příklad 560. Určete největší možnou oblast $G \subset \mathbb{E}_2$, v níž je vektorová funkce

$\vec{f} = \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x} \right)$ spojitá a rozhodněte, zda $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí na integrační

cestě v G . Pokud tato oblast existuje, vypočtěte $\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot d\vec{s}$.

Řešení: $G = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2, x > 0\}$ je polorovina, a tedy je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{E}_2 .

$\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí na cestě, protože parciální derivace souřadnicových funkcí U, V

jsou spojitě v G a platí $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2y}{\sqrt{x}} \implies$ existuje potenciál φ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{x}} \implies \varphi(x, y) = \int \frac{y^2}{\sqrt{x}} dx = y^2 \cdot 2\sqrt{x} + K(y)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4y\sqrt{x} \implies 2y \cdot 2\sqrt{x} + \frac{dK}{dy} = 4y\sqrt{x} \implies K(y) = C$$

$$\varphi(x, y) = 2y^2\sqrt{x} + C$$

$$\int_{[1,2]}^{[4,-2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{[1,2]}^{[4,-2]} \left(\frac{y^2}{\sqrt{x}}, 4y\sqrt{x} \right) \cdot d\vec{s} = \varphi(4, -2) - \varphi(1, 2) = 8$$

■

Příklad 561. Je dána funkce $\varphi(x, y) = x^3y + x^2y^2$. Určete a) silové pole \vec{f} , jehož potenciálem je funkce $\varphi(x, y)$; b) práci síly \vec{f} při pohybu z bodu $M = [1, 1]$ do bodu $N = [-2, 3]$; c) práci síly \vec{f} podél křivky $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + 4y^2 = 4\}$, která je orientována kladně.

Řešení: a) $\vec{f} = \text{grad } \varphi \implies \vec{f} = (3x^2y + 2xy^2, x^3 + 2x^2y)$;

$$\begin{aligned} \text{b) } W &= \int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s} = (\text{integrál nezávisí na cestě}) = \varphi(N) - \varphi(M) = \\ &= (-24 + 36) - (1 + 1) = 10; \end{aligned}$$

$$\text{c) } W = \oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0. \quad \blacksquare$$

Příklad 562. Je dáno vektorové pole $\vec{f} = \frac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2}$ v $G = \mathbb{E}_2 \setminus \{[0, 0]\}$.

a) Ověřte, že platí $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$ v G . b) Výpočtem integrálu $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde c je záporně orientovaná kružnice $S = [0, 0]$, $r = 2$, se přesvědčte, že pole není potenciální v G .

Řešení: a)
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) Cirkulace
$$\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_c \frac{(x-y, x+y)}{x^2+y^2} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} P(t) = [2 \cos t, 2 \sin t], \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ \dot{P}(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t) \\ \text{křivka je nesouhlasně orientovaná s parametrizací} \end{array} \right| =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \frac{(2(\cos t - \sin t), 2(\cos t + \sin t))}{4} \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt =$$

$$= - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (-4(\cos t - \sin t) \sin t + 4(\cos t + \sin t) \cos t) dt = - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi$$

Pole \vec{f} není potenciální, protože $\oint_c \vec{f} \cdot d\vec{s} \neq 0$.

POZNÁMKA: K výpočtu tohoto integrálu nelze použít Greenovu větu, jelikož bod $[0, 0] \in \text{int } c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 < 4\}$ nepatří do $D(\vec{f})$. \blacksquare

Příklad 563. Vypočtete $\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s}$, kde $M = [1, 0, e]$, $N = [2, -1, e^2]$, víte-li, že pole \vec{f} je potenciální v oblasti \mathbb{E}_3 a jeho potenciál je funkce $\varphi(x, y, z) = xy^2 \ln z$. Určete největší možnou oblast G , v níž je φ potenciálem pole \vec{f} .

Řešení: $G = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; z > 0\}$;
$$\int_M^N \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(N) - \varphi(M) = 2 \ln e^2 - 0 = 4. \quad \blacksquare$$

• Je dáno vektorové pole \vec{f} . Ověřte, že je pole potenciální v $G \subset \mathbb{E}_2$, resp. \mathbb{E}_3 , stanovte jeho potenciál a vypočtete $\int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$:

Příklad 564.* $\vec{f} = (3x^2y - z^2 + 2z, x^3 + 2yz - 3, y^2 - 2xz + 2x + 5)$, $A = [0, 1, 1]$,
 $B = [3, 0, 2]$, $G = \mathbb{E}_3$

Řešení: a) K ověření stačí:

1) spojitost parciálních derivací funkcí $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ v oblasti G , která je jednoduše souvislá v \mathbb{E}_3 ,

2) $\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$ v G .

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y - z^2 + 2z & x^3 + 2yz - 3 & y^2 - 2xz + 2x + 5 \end{vmatrix} =$$

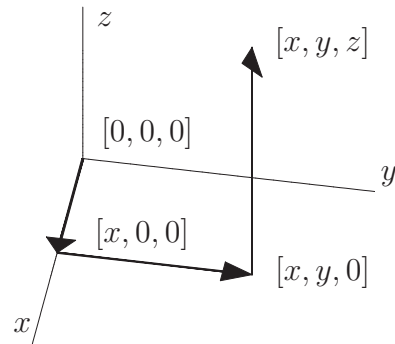
$$= (2y - 2y, -2z + 2 + 2z - 2, 3x^2 - 3x^2) = \vec{0} \implies \vec{f} \text{ je potenciální v } \mathbb{E}_3 .$$

b) $\varphi(x, y, z) =$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,y,z]} (3x^2y - z^2 + 2z) dx + (x^3 + 2yz - 3) dy + (y^2 - 2xz + 2x + 5) dz =$$

$$= \int_{[0,0,0]}^{[x,0,0]} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{[x,0,0]}^{[x,y,0]} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{[x,y,0]}^{[x,y,z]} \vec{f} \cdot d\vec{s} =$$

$$\left| \begin{array}{l} [0, 0, 0] \implies [x, 0, 0] : y = 0, dy = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x, 0, 0] \implies [x, y, 0] : dx = 0, z = 0, dz = 0 \\ [x, y, 0] \implies [x, y, z] : dx = 0, dy = 0 \end{array} \right|$$



$$= \int_0^x 0 dx + \int_0^y (x^3 - 3) dy + \int_0^z (y^2 - 2xz + 2x + 5) dz =$$

$$= x^3y - 3y + y^2z - xz^2 + 2xz + 5z + C ,$$

c) $\int_{[0,1,1]}^{[3,0,2]} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(3, 0, 2) - \varphi(0, 1, 1) = 7 .$ ■

565. $\vec{f} = (xe^{2y}, (x^2 + 1)e^{2y})$, $A = [1, 0]$, $B = [3, 1]$ [$\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + 1)e^{2y} + C; 5e^2 - 1$]

566. $\vec{f} = (3x^2y - 2xy^2, x^3 - 2x^2y)$, $A = [1, 1]$, $B = [2, -1]$ [$\varphi = x^3y - x^2y^2 + C; -12$]

567. $\vec{f} = (\cos 2y + y + x, y - 2x \sin 2y + x)$, $A = [0, 7]$, $B = [1, 0]$
[$\varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + x \cos 2y + xy + C; -23$]

568.* $\vec{f} = (x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy)$, $A = [0, 0, 3]$, $B = [3, 3, 0]$
[$\varphi = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C; 9$]

569.* $\vec{f} = (2y + z^2, 2x + 1, 2xz + 2)$, $A = [0, 1, 1]$, $B = [3, 0, 2]$
[$\varphi = 2xy + y + xz^2 + 2z + C; 13$]

570.* $\vec{f} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, 2z \right)$, $A = [1, 0, 0]$, $B = [0, 1, 1]$
[$\varphi = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2 + 1) + z^2 + C; 1$]

571. Ověřte, že pole $\vec{f} = (y^2, 2xy)$ je potenciální v \mathbb{E}_2 . Stanovte potenciál $\varphi(x, y)$,
 splňující $\varphi(-4, 3) = -9$. [$\varphi = xy^2 + 27$]

572.* Stanovte potenciál pole $\vec{f} = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}, \frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}, 2z - \frac{xy}{z^2} \right)$ na $G \subset \mathbb{E}_3 : y > 0, z > 0$.
[$\varphi = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + z^2 + C$]

573. Najděte práci silového pole \vec{f} , jehož potenciálem je funkce $\varphi(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ při pohybu a) z bodu $M = [1, \sqrt{3}]$ do bodu $N = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; b) podél křivky $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; (x - 2)^2 + y^2 = 1\}$ v kladném směru. [a) $-\frac{\pi}{12}$, b) 0]

• Vypočtěte :

574. $\int_{[2,1]}^{[1,2]} \frac{y dx - x dy}{x^2}$ [$-\frac{3}{2}$, integrál nezávisí na cestě]

575. $\int_{[\pi/4,2]}^{[\pi/6,1]} 2y \sin 2x dx + (1 - \cos 2x) dy$ [$-\frac{3}{2}$]

576. $\oint_c (2x + y) dx + (x + 2y) dy, \quad c : x^2 + y^2 = a^2$ [0]

• Určete oblasti G , v nichž je vektorové pole \vec{f} potenciální a stanovte potenciál :

577. $\vec{f} = (x^3 y^2 + x, y^2 + y x^4)$ [$G = \emptyset$, \vec{f} není potenciální]

578. $\vec{f} = \left(\ln y - \frac{e^y}{x^2}, \frac{e^y}{x} + \frac{x}{y} \right)$ [$G_1 \subset \mathbb{E}_2 : y > 0, x > 0$
 $G_2 \subset \mathbb{E}_2 : y > 0, x < 0$
 $\varphi = \frac{e^y}{x} + x \ln y + C$]

579.* $\vec{f} = \left(\frac{z}{x-y}, \frac{z}{y-x}, \ln(x-y) + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)$ [$G \subset \mathbb{E}_3 : x > y, z > 0$
 $\varphi = z \ln(x-y) + 2\sqrt{z} + C$]

• Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ a křivka c .

- Pomocí křivkového integrálu vektorové funkce vypočítejte práci, kterou vykoná síla \vec{f} působením po křivce c .
- Ověřte, že vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ je potenciální v \mathbb{E}_2 .
- Napište podmínky, z nichž lze určit potenciál podle definice. Určete potenciál φ daného pole a pomocí něho ověřte výsledek z úlohy a).

580. $\vec{f} = (x+3y, 3x)$, c je orientovaná úsečka s počátečním bodem $A = [0, 1]$ a koncovým bodem $B = [1, 3]$ [a) 19/2
c) $\varphi(x, y) = x^2/2 + 3xy + C$]

581. $\vec{f} = (y^2, 2xy)$, c je část paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [2, 4]$ [a) 32
c) $\varphi(x, y) = xy^2 + C$]

582. $\vec{f} = (2x - y^2, 3 - 2xy)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x = -y^2 - 1\}$ od bodu $[-1; 0]$ do bodu $[-5; -2]$ [a) 38
c) $\varphi(x, y) = x^2 - xy^2 + 3y + C$]

583. $\vec{f} = (-x, y)$, $c = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x^2 + y^2 = 4\}$ od bodu $A = [2, 0]$ do bodu $B = [0, 2]$ [a) 4
c) $\varphi(x, y) = -x^2/2 + y^2/2 + C$]

584. a) Vysvětlete, co to znamená, že integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ nezávisí v oblasti $G \subset \mathbb{E}_2$ na integrační cestě.

b) Zdůvodněte, zda $\int_c (y \sin x, y - \cos x) \cdot d\vec{s}$ nezávisí v \mathbb{E}_2 na integrační cestě.

- c) Existuje-li potenciál pole $\vec{f} = (y \sin x, y - \cos x)$ v \mathbb{E}_2 , najděte jej a vypočítejte křivkový integrál tohoto pole po křivce c s počátečním bodem $A = [0, 0]$ a koncovým bodem $B = [0, \pi]$.

$$\left[\begin{array}{l} b) \text{ ověřte splnění postačující podmínky,} \\ c) \varphi(x, y) = y^2/2 - y \cos x + C, \pi^2/2 - \pi \end{array} \right]$$

- Je dána skalární funkce $\varphi(x, y, z)$, která je potenciálem nějakého vektorového pole \vec{f} .
 - Určete největší oblast v \mathbb{E}_3 , ve které má φ spojitě parciální derivace a vyjádřete v této oblasti pole \vec{f} .
 - Je-li ještě nějaká jiná funkce potenciálem \vec{f} v této oblasti, pak ji uveďte.
 - Vypočítejte křivkový integrál $\int_c \vec{f} \cdot d\vec{s}$ pro danou křivku c .

585. $\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + z^2$; c je křivka v G s počátečním bodem $[1, 0, 0]$ a koncovým bodem $[0, 1, 1]$.

$$\left[\begin{array}{l} a) G = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3; x^2 + y^2 > 0\} \\ b) \vec{f}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 2z \right) \\ c) 1 \end{array} \right]$$

586. $\varphi(x, y, z) = xy + xz + yz$; $c = \left\{ [x, y, z] : x = -1 + t, y = 2 + \frac{t}{2}, z = -\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right), \text{ pro } t \in \langle 0, 4 \rangle \right\}$

$$\left[\begin{array}{l} a) \mathbb{E}_3, \text{ funkce } \varphi + C \\ b) \vec{f} = (y + z, x + z, x + y) \\ c) 22 \end{array} \right]$$

- Je dáno vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$, oblast D a křivka c .
 - Napište postačující podmínky pro to, aby vektorové pole $\vec{f} = (U, V)$ bylo potenciální v oblasti $D \subset \mathbb{E}_2$.
 - Ověřte jejich splnění pro dané vektorové pole \vec{f} a danou oblast D (není-li oblast D dána, uveďte největší možnou).
 - Napište podmínky, z nichž lze určit potenciál podle definice. Určete potenciál a užiňte jej k výpočtu křivkového integrálu vektorové funkce \vec{f} po dané křivce c .

587. $\vec{f} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; x > 0, y > 0\}$, c je úsečka AB s počátečním bodem $A = [2, 4]$ a koncovým bodem $B = [1, 2]$

$$[\varphi(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C; -\ln 2]$$

588. $\vec{f} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{-x}{x^2 + y^2} \right)$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y > 0\}$, c je kladně orientovaná

$$\text{kružnice } (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$[\varphi(x, y) = \arctg \frac{x}{y} + C; 0]$$

589. $\vec{f} = \left(y^2 - \frac{x}{\sqrt{y - x^2}}, 2xy + \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} \right)$, $D = \{[x, y] \in \mathbb{E}_2; y > x^2\}$, c je křivka

$$\text{s poč. bodem } A = [0, 1] \text{ a konc. bodem } B = [1, 2] \quad [\varphi(x, y) = xy^2 + \sqrt{y - x^2} + C; 0]$$

590. $\vec{f} = \left(\frac{y^2}{x} + x^2, 2y \ln x - \cos 2y \right)$, c je křivka s počátečním bodem $A = [1, \pi/4]$

$$\text{a koncovým bodem } B = [2; 0] \quad [\varphi(x, y) = x^3/3 + y^2 \ln x - \sin 2y/2 + C; 17/6]$$