

## V. Potenciální vektorové pole

**Definice.** Vektorové pole  $\vec{f} = (U, V, W)$  se nazývá **potenciální pole** v oblasti  $D \subset \mathbb{E}_k$  ( $k = 2$  nebo  $k = 3$ ), jestliže existuje skalární funkce  $\varphi$  taková, že  $\vec{f} = \text{grad } \varphi$  v oblasti  $D$ .  
Skalární funkci  $\varphi$  nazýváme **potenciálem vektorového pole**  $\vec{f}$  v  $D$ .

**Věta 1.4.** Je-li  $\vec{f}$  potenciální pole, pak jeho potenciál  $\varphi$  je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

**Definice.** Vektorové pole  $\vec{f}$  se nazývá **potenciální pole v oblasti**  $D \subset \mathbb{E}_k$  ( $k = 2$  nebo  $k = 3$ ), jestliže existuje skalární funkce  $\varphi$  taková, že  $\vec{f} = \text{grad } \varphi$  v oblasti  $D$ .

Skalární funkci  $\varphi$  nazýváme **potenciálem vektorového pole  $\vec{f}$  v  $D$** .

**Věta 1.4.** Je-li  $\vec{f}$  potenciální pole, pak jeho potenciál  $\varphi$  je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

**Věta 1.5.** Nechť  $\vec{f}$  je spojitě potenciální vekt. pole v oblasti  $D$  s potenciálem  $\varphi$ .

**Pak** pro libovolnou křivku  $C$  v  $D$  s počát. bodem  $A$  a konc. bodem  $B$  platí:

$$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

### Věta 1.6., 1.7.

Nechť  $\vec{f}$  je spojitě vekt. pole v oblasti  $D$ .

Potom násl. výroky jsou ekvivalentní:

- (1)  $\vec{f}$  je potenciální pole v  $D$
- (2) křivkový integrál nezávisí v  $D$  na cestě
- (3) cirkulace podél libov. uzavřené křivky v  $D$  je nulová.

## DEFINICE:

Oblast  $D$  v  $\mathbb{E}_2$  se nazývá jednoduše souvislá, jestliže vnitřek každé uzavřené křivky v  $D$  leží v  $D$ .

## Věta 2.6

(Postač. podm. pro potenciální pole,  $n = 2$ )

Nechť

1.  $D$  je jednoduše souvislá oblast v  $\mathbb{E}_2$
2.  $\vec{f}$  má spojité PD v oblasti  $D$ .
3.  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$  v  $D$ .

Potom  $\vec{f}$  je potenciální pole v  $D$ .

### Věta 2.5

Jsou-li PD funkcí  $U, V$  spojité v obl.  $D$ ,

pak rovnost  $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$

je nutnou podm. pro potenciální pole v  $D$ .

## Potenciál, příklady

1. Dáno vektorové pole

$$\vec{f} = (2xy^2 + 3x^2, 2x^2y)$$

a) Určete potenciál  $\varphi$  tohoto pole v největší možné oblasti  $D$ .

b) Určete  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$ , kde

$C$  je křivka od bodu  $A = [1, 0]$  do bodu  $B = [2, 2]$

---

2. Dáno vektorové pole

$$\vec{f} = \left( \frac{\cos x}{y} - 2x, \frac{1}{y} - \frac{\sin x}{y^2} \right).$$

- a) **Ověřte, že křivkový integrál  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$  nezávisí na cestě** v oblasti  $D \subset \mathbb{E}_2$   
( určete největší možnou oblast).
- b) **Určete potenciál  $\varphi$**  tohoto pole v  $D$ .
- c) Pomocí potenciálu **určete  $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$** ,  
kde  $C$  je křivka s počát. bodem  $A = [0, 1]$   
a konc. b.  $B = [\pi/2, 1]$ .