V. Potenciální vektorové pole

Definice. Říkáme, že křivkový integrál vektorové funkce $\overrightarrow{f}$ nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ $(k = 2,\ k = 3)$ na cestě, jestliže pro libovolné dvě křivky C_1, C_2 v D se stejným počátečním a stejným koncovým bodem platí

$$\int_{C_1} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s} = \int_{C_2} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$$

Věta 1.2. Křivkový integrál $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ nezávisí v oblasti $D \subset \mathbb{E}_k$ na cestě právě tehdy, když cirkulace $\overrightarrow{f}$ podél libov. uzavřené křivky v $\boldsymbol{D}$ je nulová.

Definice. Vektorové pole $\overrightarrow{f}$ se nazývá **potenciální pole v oblasti** $D \subset \mathbb{E}_k$ $(k=2,\ k=3)$, jestliže existuje skalární funkce φ taková, že $\overrightarrow{f} = \operatorname{grad}\varphi$ v oblasti D.
Skalární funkci φ nazýváme **potenciálem vektorového pole** $\overrightarrow{f}$ **v** D.

Věta 1.4. Je-li $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ potenciální pole, pak jeho potenciál $\boldsymbol{\varphi}$ je určen jednoznačně až na aditivní konstantu.

Věta 1.5. Nechť $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ je spojité potenciální vekt. pole v oblasti $\boldsymbol{D}$ s potenciálem $\boldsymbol{\varphi}$. Pak pro libovolnou křivku $\boldsymbol{C}$ v $\boldsymbol{D}$ s počát. bodem A a konc. bodem B platí:

$$\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{A})$$

Věta 1.6., 1.7.

Nechť $\overrightarrow{f}$ je spojité vekt. pole v oblasti D.

Potom násl. výroky jsou ekvivalentní:

(1) $\overrightarrow{f}$ je potenciální pole v D

(2) křivkový integrál nezávisí v D na cestě

(3) cirkulace podél libov. uzavřené křivky v D je nulová.

Definice. Oblast D v $\mathbb{E}_2$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže vnitřek každé uzavřené křivky v D leží v D.

Věta 2.6. (Postač. podm. pro potenciální pole, $n = 2$)

Nechť 1. D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_2$ a

2. souřadnicové funkce $U(x, y)$, $V(x, y)$ vekt. pole $\vec{f}$ mají spojité parc. derivace v oblasti D a

3. $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial y}$ v D.

Potom $\vec{f}$ je potenciální pole v D.

Poznámka (viz Věta 2.5.)

Jsou-li parciální derivace funkcí U, V spojité v obl. $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{E}_{\mathbf{2}}$, pak rovnost

$\boldsymbol{\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}}$ v D je nutnou podmínkou, aby $\overrightarrow{f}$ bylo potenciální pole v $\boldsymbol{D}$.

Potenciál, příklady

1. Dáno vektorové pole $\vec{\boldsymbol{f}} = (\boldsymbol{xy^2}\,,\, \boldsymbol{x^2y + y^2})$

a) Určete potenciál φ tohoto pole v největší možné oblasti $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{E}_{\mathbf{2}}$.

b) Určete $\int_C \overrightarrow{\boldsymbol{f}} \cdot \mathrm{d}\,\overrightarrow{\boldsymbol{s}}$, kde
C je křivka od bodu $\boldsymbol{A} = [\mathbf{0}, \mathbf{3}]$ do bodu $\boldsymbol{B} = [\mathbf{2}, \mathbf{1}]$

2. Dáno vektorové pole

$$\vec{f} = \left(\frac{\cos x}{y} - 2x \,,\; \frac{1}{y} - \frac{\sin x}{y^2} \right).$$

a) Určete největší možnou oblast $D \subset \mathbb{E}_2$, ve které křivkový integrál $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$ nezávisí na cestě.

b) Určete potenciál φ tohoto pole v D.

c) Vypočítejte $\int_C \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{s}$,
kde C je křivka s počát. bodem $A = [0, 1]$ a konc. b. $B = [\pi/2, 1]$.

Potenciální pole a potenciál v $\mathbb{E}_3$

Definice a základní vlastnosti jsou uvedeny výše (Věty 1.4 až 1.7)

Definice. Oblast D v $\mathbb{E}_3$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže každou uzavřenou křivku v D můžeme spojitě stáhnout do bodu v D, aniž přitom oblast D opustíme.

Věta 3.7. (Postač. podm. pro potenciální pole, $n = 3$)

Nechť 1. D je jednoduše souvislá oblast v $\mathbb{E}_3$ a

2. souřadnicové funkce $U(x, y, z)$, $V(x, y, z)$, $W(x, y, z)$ vekt. pole $\overrightarrow{f}$ mají spojité parc. derivace v oblasti D a

3. $\operatorname{rot} \overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$ v D.

Potom $\overrightarrow{f}$ je potenciální pole v D.

Poznámka (viz Věta 3.1.)

Jsou-li parciální derivace funkcí U, V, W spojité v obl. $\boldsymbol{D} \subset \mathbb{E}_3$,

pak rovnost $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{\boldsymbol{f}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ v D

je nutnou podmínkou, aby $\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$ bylo potenciální pole v $\boldsymbol{D}$.