Obsah

1. Posloupnost reálných čísel

***Příklad* 1**. Napište prvních pět členů posloupnosti, jestliže:

$$\textbf{a)}\ \ a_n = \frac{3^n}{n!};\quad \textbf{b)}\ \ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\quad \textbf{c)}\ \ a_n = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{2\,n^2-1};$$

$$\textbf{d)}\ \ a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_{n+2} = \frac{1}{n}\left(a_n + a_{n+1}\right).$$

Řešení:

a) $a_1 = \dfrac{3^1}{1!} = 3,\quad a_2 = \dfrac{3^2}{2!} = \dfrac{9}{2},\quad a_3 = \dfrac{3^3}{3!} = \dfrac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3} = \dfrac{9}{2},$

$$a_4 = \frac{3^4}{4!} = \frac{3^4}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{27}{8},\quad a_5 = \frac{3^5}{5!} = \frac{3^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{81}{40}.$$

b) Tato posloupnost je velmi důležitá, a proto se objeví i v dalších příkladech:

$$a_1 = (1+1)^1 = 2,\quad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25,$$

$$a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \doteq 2.37,\quad a_4 = \left(1+\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \doteq 2.44,$$

$$a_5 = \left(1+\frac{1}{5}\right)^5 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125} \doteq 2.49.$$

Přímým výpočtem jsme se přesvědčili, že $\quad a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5.$

c) $a_1 = \dfrac{1}{2-1} = 1,\quad a_2 = \dfrac{1^2+2^2}{2\cdot 2^2-1} = \dfrac{5}{7},\quad a_3 = \dfrac{1+4+9}{2\cdot 9-1} = \dfrac{14}{17},$

$$a_4 = \frac{1+4+9+16}{2\cdot 16-1} = \frac{30}{31},\quad a_5 = \frac{1+4+9+16+25}{2\cdot 25-1} = \frac{55}{49};$$

d) $a_3 = \dfrac{1}{1}\left(a_1+a_2\right) = 1+\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2},\quad a_4 = \dfrac{1}{2}\left(a_2+a_3\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right) = 1,$

$$a_5 = \frac{1}{3}\left(a_3+a_4\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{5}{6}.$$

■

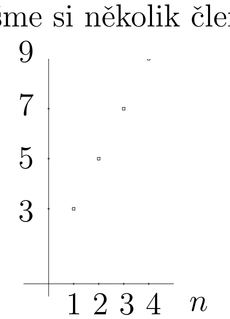
***Příklad* 2**. Rozhodněte, zda následující posloupnosti jsou monotónní, ryze monotónní, omezené $(n = 1, 2, 3\ \ldots)$:

$$\textbf{a)}\ \left\{1+2\,n\right\}_{n=1}^{\infty};\quad \textbf{b)}\ \left\{4-n^2\right\}_{n=1}^{\infty};\quad \textbf{c)}\ \left\{\frac{2+(-1)^n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty};$$

$$\textbf{d)}\ \left\{(-3)^n\right\}_{n=1}^{\infty};\quad \textbf{e)}\ \left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty};\quad \textbf{f)}^*\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Řešení:

a) Napišme si několik členů posloupnosti $\left\{1+2\,n\right\}_{n=1}^{\infty} = 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$



$$a_{n+1} - a_n = 1 + 2(n+1)(1+2n) = 2 > 0$$

$\forall\ n\ \Rightarrow\ \{a_n\}$ je rostoucí

Nyní dokážeme, že není shora omezená. K tomu zvolíme libovolně velké číslo K a dokážeme, že existuje nekonečně mnoho členů posloupnosti větších než K:

$$1 + 2n > K \quad \Rightarrow \quad n > \frac{K-1}{2} \quad \Rightarrow \quad n_0 = \left[\frac{K-1}{2}\right]_{\text{celá část čísla}}$$

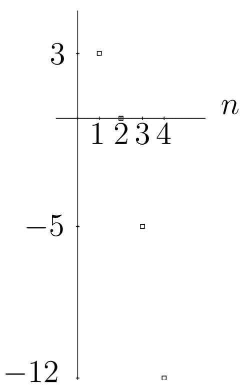
tzn. pro všechna $n > n_0$ je $a_n > K$. Např. zvolme:

$\boxed{1}$ $K = 100 \quad \Rightarrow \quad n_0 = \left[\frac{99}{2}\right] = 49, \quad a_n > 100$ pro všechna $n > 49$,

$\boxed{2}$ $K = 1005 \quad \Rightarrow \quad n_0 = \left[\frac{1004}{2}\right] = 502, \quad a_n > 1005$ pro všechna $n > 502$.

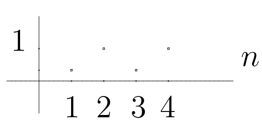
Posloupnost je **rostoucí, omezená zdola** svým prvním členem $a_1 = 3$ a není omezená shora.

b) $\left\{4 - n^2\right\}_{n=1}^{\infty} = 3,\ 0,\ -5,\ -12,\ \ldots$



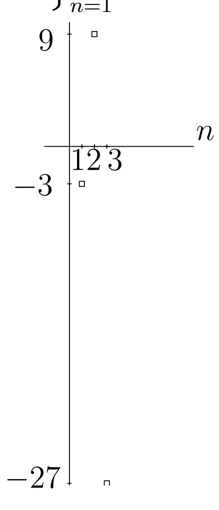
Snadno dokážeme, že pro všechna n platí nerovnost $a_n > a_{n+1}$ a že není zdola omezená.
Posloupnost $\left\{4 - n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ je **klesající, shora omezená** prvním členem $a_1 = 3$ a zdola není omezená.

c) $\left\{\frac{2 + (-1)^n}{3}\right\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \ldots$



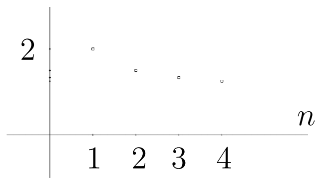
Všechny liché členy posloupnosti jsou $a_{2k-1} = \frac{1}{3}$ a všechny sudé členy $a_{2k} = 1$, tedy posloupnost je **omezená** (shora i zdola), ale není monotónní. Lze ji rozložit na dvě konstantní posloupnosti.

d) $\left\{(-3)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = -3,\ 9,\ -27,\ 81,\ \ldots$



Okamžitě je jasné, že posloupnost není monotónní a že vybraná posloupnost $\left\{(-3)^{2k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ roste neomezeně, kdežto posloupnost $\left\{(-3)^{2k-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ klesá neomezeně.
Z toho plyne, že daná posloupnost není **omezená**.

e) $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = 2,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{5}{4},\ \dots$

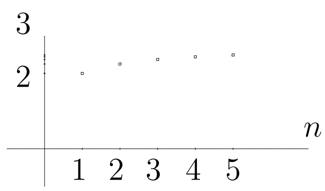


Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$1 < 1+\dfrac{1}{n} \leq 2$ a $1+\dfrac{1}{n} > 1+\dfrac{1}{n+1}$.

Z toho plyne, že se jedná o posloupnost **omezenou** (např. shora 2, zdola 1) a **klesající**.

f) $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ Posloupnost je stejná jako v příkladě **1b)**.



Dokážeme, že je:

$\boxed{1}$ **omezená** $2 \leq a_n < 3$ pro všechna n,

$\boxed{2}$ **rostoucí**.

$\boxed{1}$ n - tý člen $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ rozepíšeme podle binomické věty

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k, \text{ kde } a = 1 \;\; b = \frac{1}{n}.$$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \dots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\,\frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\,\frac{n-1}{n} + \dots + \frac{1}{k!}\,\frac{(n-1)}{n}\,\frac{(n-2)}{n}\cdots\frac{\bigl(n-(k-1)\bigr)}{n} + \dots + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr) + \cdots \frac{1}{k!}\Bigl(1-\frac{1}{n}\Bigr)\Bigl(1-\frac{2}{n}\Bigr)\dots\Bigl(1-\frac{k-1}{n}\Bigr) + \dots + \frac{1}{n^n} <$$

$\Big|$použijeme $\Bigl(1-\dfrac{1}{n}\Bigr)\Bigl(1-\dfrac{2}{n}\Bigr)\dots\Bigl(1-\dfrac{k-1}{n}\Bigr) < 1\Big|$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} <$$

$\Big|$pro všechna $k \geq 2$ pomocí nerovnosti $k! > 2^{k-1} \Rightarrow \dfrac{1}{k!} < \dfrac{1}{2^{k-1}}$ dostaneme geometrickou řadu, kterou sečteme podle vzorce $s_{n-1} = a_0\,\frac{1-q^{n-1}}{1-q}$, kde $a_0 = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$ $\Big|$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Tím jsme dokázali omezenost.

$\boxed{2}$ Nyní dokážeme, že posloupnost je rostoucí. Podobně jako a_n rozepíšeme

$a_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ a ukážeme, že $a_n < a_{n+1}$:

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} =$$

$$= 1 + (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{(n+1)n(n-1)\ldots\Big(n+1-(k-1)\Big)}{k!\,(n+1)^k} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 1 + 1 + \cdots + \frac{1}{k!} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdots \frac{n+1-(k-1)}{n+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 2 + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

Okamžitě je vidět, že pro všechna $k \geq 2$ platí

$$\frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

a z toho platí i stejná nerovnost pro $a_n < a_{n+1}$.

■

Poznámka: V předcházejícím příkladě jsme dokázali, že posloupnost $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ryze monotónní (rostoucí) a omezená. Taková posloupnost má vždy limitu.

Poznámka: V dalších příkladech se budeme věnovat výpočtu limit neurčitých výrazů typu $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ s použitím známých limit a vět.

Poznámka: Pod symbolem $\dfrac{\infty}{\infty}$ rozumíme možnosti $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Pod symbolem $0 \cdot \infty$ rozumíme možnosti $0 \cdot (\pm\infty)$.
Pod symbolem $\infty - \infty$ rozumíme $+\infty - (+\infty)$ nebo $-\infty + \infty$ nebo $-\infty - (-\infty)$.

Pro úplnost vyjmenujme nejdůležitější známé limity:

$$\lim_{n\to\infty} n^p = \begin{cases} \bullet \quad 0 & \text{pro} \quad p < 0 \\ \bullet \quad 1 & \text{pro} \quad p = 0 \\ \bullet \quad +\infty & \text{pro} \quad p > 0 \end{cases}, \qquad \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \bullet \quad \text{neex.} & \text{pro} \quad -\infty < a \leq -1 \\ \bullet \quad 0 & \text{pro} \quad -1 < a < 1 \\ \bullet \quad 1 & \text{pro} \quad a = 1 \\ \bullet \quad +\infty & \text{pro} \quad a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\ (= 2.718281828\ldots)$$

***Příklad* 3**. Spočítejte limity

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3\,n^2+5\,n-1}{3\,n-4\,n^2};\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^2-3\,n+5}{n^4+5\,n+1};$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{4\,n^3+5}{2\,n^2+n};\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{4\,n^3+5}{3\,n-2\,n^2}.$$

Řešení: Ve všech příkladech jde o neurčité výrazy typu $\frac{\infty}{\infty}$ a ve všech použijeme stejnou úpravu: čitatel a jmenovatel zlomku vydělíme nejvyšší mocninou n ze jmenovatele a pak spočítáme jednotlivé dílčí limity.

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{3\,n^2+5\,n-1}{3\,n-4\,n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{3}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}4}=\frac{3+0-0}{0-4}=$$
$$=-\frac{3}{4};$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n^2-3\,n+5}{n^4+5\,n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{5}{n^4}}{1+\dfrac{5}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}}=\frac{0-0+0}{1+0+0}=0;$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4\,n^3+5}{2\,n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\,n+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty;$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\frac{4\,n^3+5}{3\,n-2\,n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\,n+\dfrac{5}{n^2}}{\dfrac{3}{n}-2}=\frac{+\infty}{-2}=-\infty.$$

■

POZNÁMKA: Limita podílu dvou polynomů se dá vyjádřit obecně:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_s\,n^s+a_{s-1}\,n^{s-1}+\cdots+a_0}{b_r\,n^r+b_{r-1}\,n^{r-1}+\cdots+b_0}=\begin{cases}\bullet\quad \dfrac{a_s}{b_r}\quad \text{pro}\quad r=s\\[4pt] \bullet\quad 0\quad \text{pro}\quad r>s\\[4pt] \bullet\quad \left\langle\begin{array}{lll}+\infty & \text{pro} & a_s\,b_r>0\\ -\infty & \text{pro} & a_s\,b_r<0\end{array}\right\rangle\ s>r\end{cases}}$$

***Příklad* 4**. Spočítejte limity:

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{(3\,n+1)(1-2\,n)(2+5\,n)}{(1+2\,n)^3};\qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27\,n^3+2}+2\,n}{5-2\,n};$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+5}-\sqrt[3]{n}};\qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right).$$

Řešení:

a) Jelikož jde o podíl dvou polynomů, stačí si všimnout, že oba polynomy jsou stejného stupně a (podle předchozí poznámky) limita se bude rovnat podílu koeficientů u nejvyšších mocnin:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3\,n+1)(1-2\,n)(2+5\,n)}{(1+2\,n)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-30\,n^3+\cdots}{8\,n^3+\cdots}=-\frac{30}{8}=-\frac{15}{4}.$$

b) V tomto příkladě čitatel není polynomem, ale postup výpočtu limity bude stejný jako v případě polynomů, tj. čitatel i jmenovatel vydělíme nejvyšší mocninou jmenovatele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27\,n^3+2}+2\,n}{5-2\,n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt[3]{27\,n^3+2}}{n}+2}{\dfrac{5}{n}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{27+\dfrac{2}{n^3}}+2}{\dfrac{5}{n}-2} = \frac{\sqrt[3]{27}+2}{-2} =$$
$$= -\frac{5}{2}.$$

c) Podobně jako v **b)** čitatel a jmenovatel vydělíme nejvyšší mocninou jmenovatele:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+5}-\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n^3+2}}{n}+\dfrac{\sqrt{n}}{n}}{\dfrac{\sqrt{n^2+5}}{n}-\dfrac{\sqrt[3]{n}}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\dfrac{2}{n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{5}{n^2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}} = \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

d) Čitatel prvního zlomku nahradíme součtem aritmetické řady
$1+2+\cdots+n = \dfrac{1+n}{2}\cdot n$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1+n)\,n}{2\,(n+2)}-\frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\,n-n\,(n+2)}{2\,(n+2)} =$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2-n^2-2\,n}{2\,n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{-n}{2\,n+4} = -\frac{1}{2}.$$

■

***Příklad* 5**. Spočítejte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)$.

Řešení:

a) $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right) = \left|\begin{array}{c}\text{neurčitý výraz typu } \infty-\infty,\\ \text{proto výraz rozšíříme}\end{array}\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+5-(n+2)}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)} = \frac{3}{+\infty} = 0.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right) = \left|\text{neurčitý výraz typu } \infty\cdot 0\right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot 3}{\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n+2}\right)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{n+5}{n}}+\sqrt{\dfrac{n+2}{n}}} = \frac{3}{2};$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right) = \left|\begin{array}{c}\text{neurčitý výraz } \infty-\infty,\text{opět rozšíříme podle vzorce}\\ (a-b)(a^2+a\,b+b^2)=a^3-b^3,\text{kde } a=\sqrt[3]{n^3+1},\ b=n\end{array}\right| =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)\left(\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2\right)}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1-n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3+1}\right)^2+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

■

***Příklad* 6**. Spočítejte

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to\infty}\left(3+(-1)^n\right); \qquad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n;$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^n}{n}; \qquad \textbf{d)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2\,n+(-1)^n}{3\,n-(-1)^n}.$$

Řešení:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+(-1)^n\right)$ neexistuje, protože posloupnost má dvě odlišné konstantní vybrané posloupnosti

$$\left\{3+(-1)^n\right\}_{n=1}^{\infty} = 2,\ 4,\ 2,\ 4,\dots \ \left\langle \begin{array}{l} 2,\ 2,\dots \\ 4,\ 4,\dots \end{array}\right.$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n = +\infty$, protože jak pro sudá tak i pro lichá n máme konstantu

$$a^n,\ \text{kde } a>1.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{n} = 0$, protože čitatel je vždy konečná konstanta a jmenovatel je $+\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\,n+(-1)^n}{3\,n-(-1)^n} = \left|\ \frac{\infty}{\infty}\ \right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{(-1)^n}{n}}{3-\dfrac{(-1)^n}{n}} = \dfrac{2}{3}.$

■

***Příklad* 7**. Spočítejte

$$\textbf{a)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n},\ a>0; \quad \textbf{b)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{n}}{5^n+n^n}; \quad \textbf{c)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n-5^n}.$$

Řešení:

a) Rozlišujeme 3 případy:

$\boxed{1}$ $\quad 0<a<1 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}a^n=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=0;$

$\boxed{2}$ $\quad a=1 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}a^n=1 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\dfrac{1}{2};$

$\boxed{3}$ $\quad a>1 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{1+a^n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^n}+1}=1.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}5^n=+\infty,\ \lim\limits_{n\to\infty}n^n=+\infty \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{n}}{5^n+n^n} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5^{n+1}}{2^n-5^n} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{5^n}+5}{\frac{2^n}{5^n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1} = \frac{0+5}{0-1} = -5.$ ■

***Příklad* 8**. Dokažte vzorce

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = \mathrm{e};$ **b)** $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n} = \mathrm{e};$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = \mathrm{e}^k;$ **d)** $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^k,$

kde $k \neq 0$ je konečná konstanta.

Řešení: Všechny limity jsou typu 1^∞ a u všech provedeme úpravy vedoucí na využití

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}}\,.$$

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} = \mathrm{e}$, protože $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k} = 1^k = 1;$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k-k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k}\cdot\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k} =$
$= \mathrm{e};$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{kn} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{k} = \mathrm{e}^k;$

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}\cdot k} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{k}}\right)^{\frac{n}{k}}\right]^{k} = \mathrm{e}^k.$ ■

***Příklad* 9**. Využitím výsledků předcházejícího příkladu vypočítejte:

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n};$ **b)** $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+9}\right)^{n};$ **c)** $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n};$

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\,n+4}{n+1}\right)^{n};$ **e)** $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{3\,n+9}\right)^{n};$ **f)** $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-1}\right)^{n+3}.$

Řešení:

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = |\ 1^\infty\ | = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}};$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+9}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+9-10}{n+9}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{10}{n+9}\right)^{n} = \mathrm{e}^{-10};$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n} = |\ 1^\infty\ | = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n} = \mathrm{e}^2;$

d) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\,n+4}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2(n+2)}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(2^n\cdot\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}\right) =$
$\displaystyle \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = +\infty\cdot\mathrm{e} = +\infty;$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{3\,n+9}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{3(n+3)}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^n\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \cdot \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{n+3}\right)^n = 0\cdot \mathrm{e}^{-4} = 0;$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1+5}{n-1}\right)^{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n-1}\right)^{n+3} = \mathrm{e}^5.$

■

10. Napište požadované členy posloupnosti:

a) $\left\{\dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n-3^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $a_3=?$, $a_5=?$; **b)** $\left\{\dfrac{n!}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $a_2=?$, $a_4=?$;

c) $a_1 = \dfrac{-5}{2^2\cdot 3^3}$, $a_2 = \dfrac{5^2}{3^2\cdot 4^3}$, $a_3 = \dfrac{-5^3}{4^2\cdot 5^3}$, $a_8=?$

[**a)** $\frac{-43}{73}$, $\frac{-307}{697}$; **b)** $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; **c)** $\frac{5^8}{9^2\,10^3}$]

11. Dokažte, že posloupnosti jsou omezené a že kromě toho

a) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí; **b)** $\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající.

12. Spočítejte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(5\,n+3)(1-2\,n)}{7\,n^2+n-1}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4+1}{3\,n^4+2\,n}\right)^3$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\,n^4+2\,n+1}{(1-2\,n)^3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}+2}{2\,n^2-1}$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{2\,n!(n+3)}$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+5\,n}{n^2+2}-\dfrac{3\,n^3+2}{5\,n^3+1}\right)$.

[**a)** $\frac{-10}{7}$; **b)** $\frac{1}{27}$; **c)** $-\infty$; **d)** 0; **e)** $\frac{1}{2}$; **f)** $-\frac{3}{5}$]

13. Spočítejte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{n}}+2}{\sqrt[n]{2}+3}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left((-1)^n-3\right)$; **e)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)^n$; **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $a>0$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-3)^{n+1}}{2^n+4^{n+1}}$; **h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

[**a)** 0; **b)** $+\infty$; **c)** $\frac{3}{4}$; **d)** $-\infty$; **e)** $+\infty$;
f) • -1 pro $0<a<1$; • 0 pro $a=1$; • 1 pro $a>1$; **g)** 0; **h)** 1]

14. Spočítejte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3\,n}\right)^n$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+2}\right)^n$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3\,n+1}{n+3}\right)^n$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2\,n-1}{3\,n+1}\right)^n$.

[**a)** $\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$; **b)** e^{-2}; **c)** $+\infty$; **d)** 0]

2. Funkce - základní pojmy

***Příklad* 15**. Určete definiční obory D funkcí:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$; **b)** $y = \sqrt{2\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - 1}$;

c) $y = \ln\big(\ln x\big) + \sqrt{x^3 - 4x^2}$; **d)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - |x-1|}}$;

e) $y = \sqrt{\dfrac{1}{\ln\sin x}}$; **f)** $y = \sqrt{\ln\sin x}$;

g) $y = \arcsin\dfrac{x-1}{x}$; **h)** $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}} + \sqrt{2^{-x} - \dfrac{1}{2}}$.

Řešení:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$: $\quad x^2 - 5x + 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x-3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$;

b) $y = \sqrt{2\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - 1}$: $\quad 2\,\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \geq \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \frac{\pi}{3} - x \leq \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq -x \leq \frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq -x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6} - 2k\pi \geq x \geq -\frac{\pi}{2} - 2k\pi \quad .$$

Položme $n = -k$, pak

$$D = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \frac{\pi}{6} + 2n\pi \right\rangle,$$ kde $\mathbb{Z}$ je množina všech celých čísel.

c) $y = \ln\big(\ln x\big) + \sqrt{x^3 - 4x^2}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1})\ \ln x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 1 \\ \mathbf{2})\ x^3 - 4x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(x-4) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 4 \end{array}\right\} \quad \{x > 1\} \cap \{x \geq 4\} \quad \Rightarrow$$

$D = \langle 4, \infty)$;

d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x - |x-1|}}$: $\quad 2x - |x-1| > 0 \quad \Rightarrow$

pro $x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x \geq 1}$: $\ 2x - x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x > -1} \quad \Rightarrow$

$$\{x \geq 1\} \cap \{x > -1\} = \{x \geq 1\};$$

pro $x - 1 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x \leq 1}$: $\ 2x + x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 3x > 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x > \dfrac{1}{3}} \quad \Rightarrow$

$$\{x \leq 1\} \cap \{x > \frac{1}{3}\} = \{\frac{1}{3} < x \leq 1\};$$

$$D = \left(\frac{1}{3}, 1\right\rangle \cup \langle 1, \infty) = \left(\frac{1}{3}, \infty\right);$$

e) $y = \sqrt{\dfrac{1}{\ln\sin x}}$: $\quad \ln\sin x > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x > 1 \quad \Rightarrow \quad$ žádné $x \in \mathbb{R}$ nesplňuje tuto podmínku, takže $\quad D = \emptyset$, (prázdná množina).

f) $y=\sqrt{\ln\sin x}$: $\quad \ln\sin x\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \sin x\geq 1 \quad\Rightarrow\quad x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,$

$$D=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}},$$ definičním oborem je množina izolovaných bodů.

g) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{x}$: $\quad -1\leq\dfrac{x-1}{x}\leq 1,\ x\neq 0,$

pro $x>0$: $\quad -x\leq x-1\leq x \quad\Rightarrow\quad -2x\leq -1\leq 0 \quad\Rightarrow\quad x\geq\frac{1}{2},$

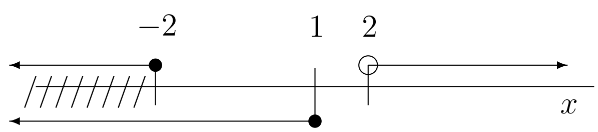
pro $x<0$: $\quad -x\geq x-1\geq x \quad\Rightarrow\quad -2x\geq -1\geq 0 \quad\Rightarrow\quad$ nepravdivá nerovnost,

$$D=\left\langle\frac{1}{2},\infty\right);$$

h) $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}+\sqrt{2^{-x}-\dfrac{1}{2}}$:

1) $\dfrac{x+2}{x-2}\geq 0,\ x\neq 2 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,-2\rangle\ \cup\ (2,+\infty),$

2) $2^{-x}-\dfrac{1}{2}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{2^x}\geq\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad 2^x\leq 2 \quad\Rightarrow\quad x\leq 1$



$D=(-\infty,-2\rangle.$

■

***Příklad* 16**. Rozhodněte, zda jsou funkce f a g totožné, jestliže:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\qquad g(x)=x+1;$

b) $f(x)=(x-1)^2,\qquad g(x)=x^2-2x+1;$

c) $f(x)=\ln x^2,\qquad g(x)=2\,\ln x.$

Řešení: *Funkce f a g jsou považovány za **totožné** právě tehdy, když mají stejné definiční obory a pro jednotlivá x nabývají stejné funkční hodnoty.*

a) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}\neq D(g)=\mathbb{R} \quad\Rightarrow\quad f(x)=g(x)$ pro $x\neq 1$,funkce f a g nejsou totožné.

b) $D(f)=D(g)=\mathbb{R}$ a $f(x)=g(x)$ pro všechna $x\in\mathbb{R}$, funkce f a g jsou totožné.

c) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}\neq D(g)=(0,\infty), f(x)=g(x)$ pro $x>0$, funkce nejsou totožné.

■

***Příklad* 17**. Určete, které z následujících funkcí jsou sudé a které liché:

a) $f(x)=\dfrac{x^4-x^2}{x^2+4};\qquad$ **b)** $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x;$

c) $f(x)=\operatorname{tg} x-x^3;\qquad$ **d)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x};$

e) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4};\qquad$ **f)** $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sin x.$

Řešení:

Funkci f nazýváme $\left\langle \begin{array}{l} \textbf{\textit{sudou}} \\ \textbf{\textit{lichou}} \end{array}\right.$, $\forall\, x \in D(f)$, *platí* $f(-x) = \left\langle \begin{array}{r} f(x) \\ -f(x) \end{array}\right.$.

Důsledek: *Graf* $\left\langle \begin{array}{l} \textit{sudé} \\ \textit{liché} \end{array}\right.$ *funkce je souměrný podle* $\left\langle \begin{array}{l} \textbf{\textit{osy}}\ y \\ \textbf{\textit{počátku}} \end{array}\right.$.

a) $D(f) = \mathbb{R}: \quad f(-x) = \dfrac{(-x)^4 - (-x)^2}{(-x)^2 + 4} = \dfrac{x^4 - x^2}{x^2 + 4} = f(x) \quad \Rightarrow$ funkce je sudá;

b) $D(f) = \mathbb{R}: \quad f(-x) = \big(\sin(-x)\big)^2 + \cos 2(-x) = \big(-\sin x\big)^2 + \cos 2x =$
$= \sin^2 x + \cos 2x = f(x) \quad \Rightarrow$ funkce je sudá;

c) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}: \quad f(-x) = \operatorname{tg}(-x) - (-x)^3 = -\operatorname{tg} x - (-x^3) =$
$= -\operatorname{tg} x + x^3 = -(\operatorname{tg} x - x^3) = -f(x) \quad \Rightarrow$ funkce je lichá;

d) $D(f) = (-1, 1): \quad f(-x) = \ln \dfrac{1 + (-x)}{1 - (-x)} = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x} = \ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right)^{-1} = -\ln \dfrac{1 + x}{1 - x} =$
$= -f(x)$, funkce je lichá;

e) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}: \quad f(-x) = \dfrac{(-x) + 2}{(-x)^2 - 4} = \dfrac{-x + 2}{x^2 - 4} \neq \pm \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$,
funkce není ani sudá ani lichá;

f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$ má definiční obor $\langle 0, \infty)$. Potom $(-x) \notin \langle 0, \infty)$, pro $x \neq 0$ a $f(-x)$ není definována. Proto funkce $f(x)$ není ani sudá ani lichá.

■

***Příklad* 18.** Rozhodněte, zda funkce f je periodická. Pokud ano, určete její primitivní periodu p:

a) $f(x) = \sin 4x + \sin 3x$; **b)** $f(x) = \cos^2 x + 5$;
c) $f(x) = \sin\big(x^2\big)$; **d)** $f(x) = |x - 1|$.

*Řešení: Funkci f nazýváme **periodickou** s periodou $p > 0$, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $f(x \pm p) = f(x)$.*
*Nejmenší z period p nazýváme **primitivní** periodou.*

a) $f(x) = \sin 4x + \sin 3x = f_1(x) + f_2(x)$, kde funkce

$f_1(x) = \sin 4x = \sin(4x + 2k_1\pi) = \sin 4\left(x + k_1 \dfrac{\pi}{2}\right)$ má primitivní periodu

$$p_1 = \frac{\pi}{2}, \quad k_1 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

$f_2(x) = \sin 3x = \sin(3x + 2k_2\pi) = \sin 3\left(x + \dfrac{2}{3}\, k_2\pi\right)$ má primitivní periodu

$$p_2 = \frac{2}{3}\,\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

Potom funkce $f(x)$ bude mít primitivní periodu p společnou pro $f_1(x)$ a $f_2(x)$ a

$p = k_1 p_1 = k_2 p_2: \ k_1 \dfrac{\pi}{2} = k_2 \dfrac{2}{3}\,\pi \quad \Rightarrow \quad k_1 = \dfrac{4}{3}\, k_2 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 3, k_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad p = 2\pi,$

$$f(x+2\pi) = \sin 4(x+2k\pi) + \sin 3(x+2k\pi) = \sin 4x + \sin 3x = f(x);$$

b) $f(x) = \cos^2 x + 5 = \big(\cos(x+k\pi)\big)^2 + 5 = f(x+k\pi) \quad \Rightarrow \quad p = \pi,$
zde jsme použili, že konstantní funkce $g(x) = 5$ je vždy periodická a její perioda je libovolné reálné nenulové číslo.

c) $f(x) = \sin x^2 = \sin\big(x^2 + 2k\pi\big) \neq \sin(x+p)^2 \quad \Rightarrow \quad$ funkce není periodická;

d) $f(x) = |x-1| = |x+p-1| \quad \Rightarrow \quad$ platí jen pro $p = 0 \quad \Rightarrow \quad$ funkce není periodická.

■

***Příklad* 19**. Sestavte složené funkce $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f,\ g\circ g$, jestliže:

a) $f(x) = x+1; \qquad g(x) = \cos x;$
b) $f(x) = x^2+3; \qquad g(x) = \ln(x+1);$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}; \qquad g(x) = \operatorname{tg} x.$

Řešení: Platí-li, že $H(g) \subset D(f)$, pak lze definovat složenou funkci $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$. V našich příkladech se zaměříme na zápisy funkcí $f\circ g,\ g\circ f$; nebudeme zkoumat příslušné definiční obory $D(f), D(g)$ a obory funkčních hodnot $H(f), H(g)$.

a)
$$\begin{aligned}
\big(f\circ g\big)(x) &= f\big(g(x)\big) = f(\cos x) = \cos x + 1,\\
\big(g\circ f\big)(x) &= g\big(f(x)\big) = g(x+1) = \cos(x+1),\\
\big(f\circ f\big)(x) &= f\big(f(x)\big) = f(x+1) = (x+1)+1 = x+2,\\
\big(g\circ g\big)(x) &= g\big(g(x)\big) = g(\cos x) = \cos(\cos x);
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\big(f\circ g\big)(x) &= f\big(g(x)\big) = f\big(\ln(x+1)\big) = \ln^2(x+1)+3,\\
\big(g\circ f\big)(x) &= g\big(f(x)\big) = g(x^2+3) = \ln\big((x^2+3)+1\big) = \ln(x^2+4),\\
\big(f\circ f\big)(x) &= f\big(f(x)\big) = f(x^2+3) = \big(x^2+3\big)^2+3,\\
\big(g\circ g\big)(x) &= g\big(g(x)\big) = g(\ln(x+1)) = \ln\big(\ln(x+1)+1\big);
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\big(f\circ g\big)(x) &= f\big(g(x)\big) = f\big(\operatorname{tg} x\big) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1},\\
\big(g\circ f\big)(x) &= g\big(f(x)\big) = g\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \operatorname{tg}\frac{1}{x^2+1},\\
\big(f\circ f\big)(x) &= f\big(f(x)\big) = f\Big(\frac{1}{x^2+1}\Big) = \frac{1}{\Big(\dfrac{1}{x^2+1}\Big)^2+1} = \frac{(x^2+1)^2}{1+(x^2+1)^2},\\
\big(g\circ g\big)(x) &= g\big(g(x)\big) = g\big(\operatorname{tg} x\big) = \operatorname{tg}\,(\operatorname{tg} x).
\end{aligned}$$

■

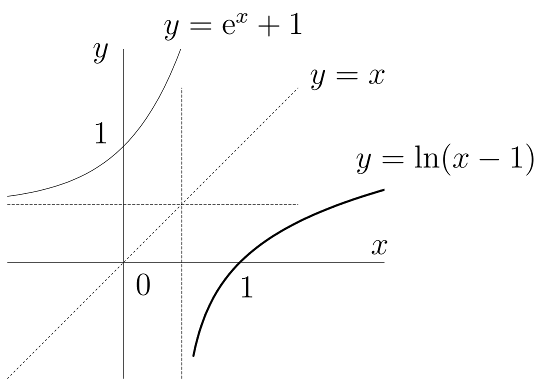
***Příklad* 20**. Najděte inverzní funkci f_{-1} k funkci f (pokud existuje) a nakreslete její graf, jestliže:

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + 1,$ kde $x \in (-\infty, +\infty);$
b) $f(x) = x^2 + 1,$ kde buď $x \in \langle -2, 4\rangle$ nebo $x \in \langle -2, 0\rangle;$
c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2},$ stanovte definiční obor tak, aby existovala $f_{-1};$
d) $f(x) = \ln(3x-5),$ stanovte definiční obor $D\,(f).$

Řešení: Inverzní funkce f_{-1} k funkci f existuje, jestliže daná funkce f je **prostá** *na svém definičním oboru* $D(f)$. *To znamená, že pro všechna* $x_1,\ x_2 \in D(f)$ *platí implikace* $\quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$. *Pak pro* f *a* f_{-1} *platí* $D\,(f_{-1}) = H\,(f), \quad D\,(f) = H\,(f_{-1})$ *a jejich grafy jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu.*

a) $f(x) = \mathrm{e}^x + 1$ je funkce ryze rostoucí, a tedy prostá pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$. Z toho plyne, že f_{-1} existuje a nyní ji stanovíme:

$$y = \mathrm{e}^x + 1 \quad \overset{x\leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \mathrm{e}^y + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^y = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x-1) \quad \Rightarrow$$

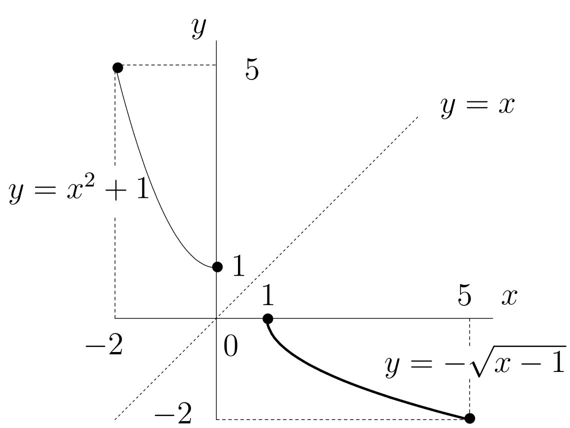


$\Rightarrow f_{-1}(x) = \ln(x-1)$,

$D\,(f) = \mathbb{R} = H\,(f_{-1})$,
$H\,(f) = (1, +\infty) = D\,(f_{-1})$;

b) $f(x) = x^2 + 1$ není prostá na intervalu $\langle -2, 4\rangle$, např. $f(-1) = f(1)$, a proto na tomto intervalu neexistuje f_{-1}. Avšak budeme-li uvažovat interval $\langle -2, 0\rangle$, pak funkce f je prostá a f_{-1} existuje;

$$y = x^2 + 1 \quad \overset{x\leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = y^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{x-1} \quad \Rightarrow$$



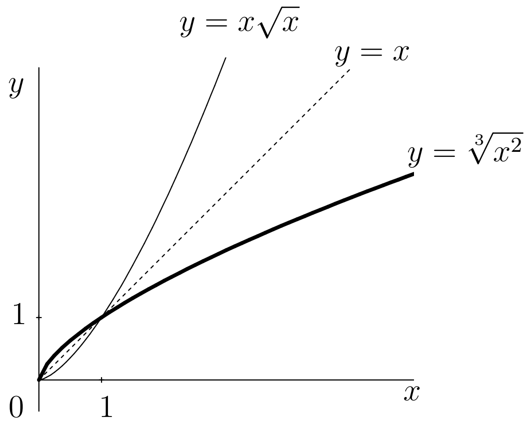
$\Rightarrow f_{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$,

$D\,(f) = \langle -2, 0\rangle = H\,(f_{-1})$,
$H\,(f) = \langle 1, 5\rangle = D\,(f_{-1})$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ má existenční (maximální definiční) obor $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, avšak daná funkce není prostá na $\mathbb{R}$, proto musíme provést zúžení funkce na takový interval, aby byla prostá. Vybereme tedy např. $D(f) = \langle 0, 27\rangle$. Tento výběr zdaleka není jediný. Mohli jsme vybrat kterýkoliv interval $I_1 \subseteq \langle 0, \infty)$ nebo $I_2 \subseteq (-\infty, 0\rangle$.

Nyní na $\langle 0, 27\rangle$ určíme f_{-1}:

$$y = \sqrt[3]{x^2} \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \sqrt[3]{y^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^3 \quad \Rightarrow \quad y = +\sqrt{x^3} = x\sqrt{x} \quad \Rightarrow$$

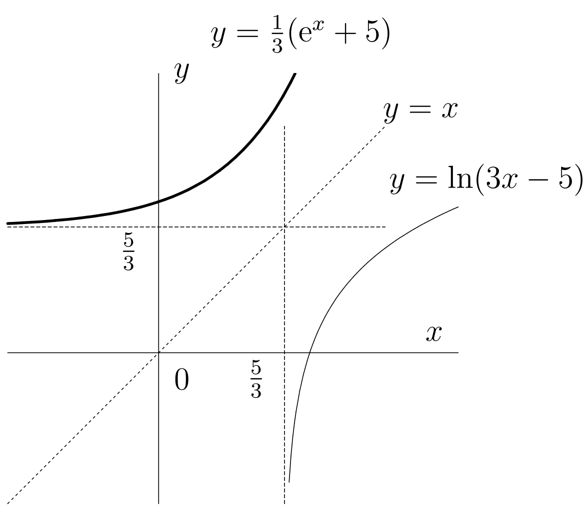


$\Rightarrow f_{-1}(x) = x\sqrt{x}$,

$D(f) = \langle 0, 27\rangle = H(f_{-1})$,
$H(f) = \langle 0, 9\rangle = D(f_{-1})$;

d) $f(x) = \ln(3x-5)$. Definiční obor určíme z nerovnosti $3x - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \dfrac{5}{3}$
$D(f) = \left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$. Daná funkce je všude rostoucí, tedy prostá, a proto existuje inverzní funkce f_{-1} pro všechna $x \in \left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$.

$$y = \ln(3x-5) \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \ln(3y-5) \quad \Rightarrow \quad 3y-5 = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x + 5\right) \quad \Rightarrow$$



$\Rightarrow f_{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^x + 5\right)$,

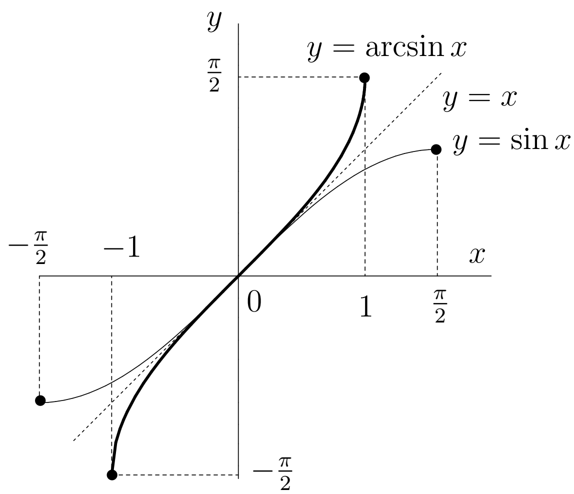
$D(f) = \left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right) = H(f_{-1})$,
$H(f) = (-\infty, +\infty) = D(f_{-1})$.

■

***Příklad* 21**. Definujte a nakreslete grafy **cyklometrických funkcí** jako inverzní funkce ke goniometrickým funkcím.

Řešení: Víme dobře, že goniometrické funkce jsou funkce periodické na svých definičních oborech. Proto u každé z nich musíme provést taková zúžení na vhodný interval $\mathcal{I}$, aby daná funkce byla prostá na $\mathcal{I}$.

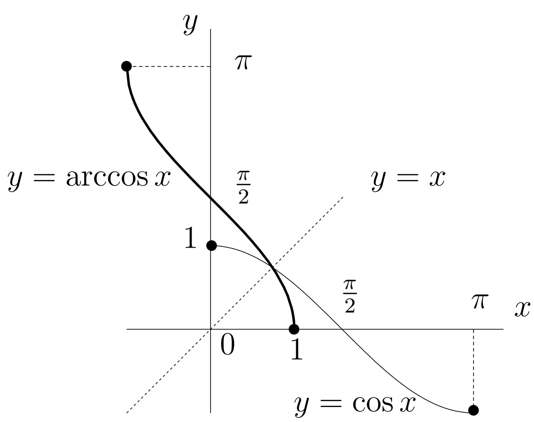
a) $y = f(x) = \sin x \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \sin y \quad \xrightarrow{\text{definujeme}} \quad y = \arcsin x \quad \Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad f_{-1}(x) = \arcsin x,$$

$$D\,(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \Rightarrow H\,(f_{-1}) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$
$$H\,(f) = \langle -1, 1 \rangle \quad \Rightarrow \quad D\,(f_{-1}) = \langle -1, 1 \rangle;$$

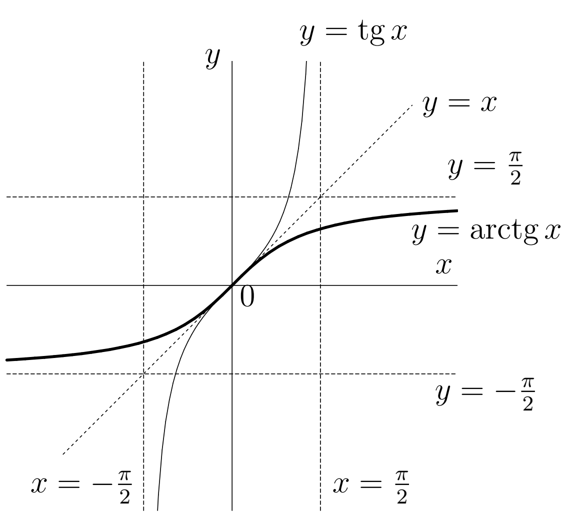
b) $y = f(x) = \cos x \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \cos y \quad \xrightarrow{\text{definujeme}} \quad y = \arccos x \quad \Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad f_{-1}(x) = \arccos x,$$

$$D\,(f) = \langle 0, \pi \rangle = H\,(f_{-1}),$$
$$H\,(f) = \langle -1, 1 \rangle = D\,(f_{-1});$$

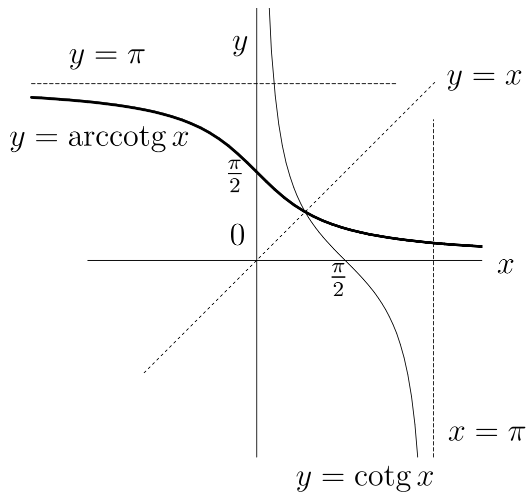
c) $y = f(x) = \operatorname{tg} x \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \operatorname{tg} y \quad \xrightarrow{\text{definujeme}} \quad y = \operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad f_{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$D\,(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) = H\,(f_{-1})$$
$$H\,(f) = (-\infty, +\infty) = D\,(f_{-1});$$

d) $y = f(x) = \operatorname{cotg} x \quad \overset{x \leftrightarrow y}{\Longrightarrow} \quad x = \operatorname{cotg} y \quad \xrightarrow{\text{definujeme}} \quad y = \operatorname{arccotg} x \quad \Rightarrow$



$$\Rightarrow \quad f_{-1}(x) = \operatorname{arccotg} x,$$

$$D(f) = (0, \pi) = H(f_{-1}),$$
$$H(f) = (-\infty, +\infty) = D(f_{-1}).$$

■

***Příklad* 22**. Vypočítejte následující hodnoty

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, $\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\quad \operatorname{arctg}(-1)$, $\quad \operatorname{arccotg}\sqrt{3}$,
$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \arccos\sqrt{3}$, $\quad \operatorname{arctg} 1$, $\quad \operatorname{arccotg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$;

b) $\arcsin(\sin\pi)$, $\quad \sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$, $\quad \arccos\left(\cos\frac{7\pi}{2}\right)$,
$\cos(\arccos 1)$, $\quad \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)$, $\quad \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})\right)$;

c) $\cos(\operatorname{arctg} a)$, $\quad \cos\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$;

d) $\sin(\arccos a), |a| \le 1$, $\quad \sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$.

Řešení:

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \overset{\text{ozn.}}{=} \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \iff \sin\alpha = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{6}$:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6},$$

$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha \in \langle 0, \pi \rangle \iff \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$: $\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$,

$\operatorname{arctg}(-1) = \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \iff \operatorname{tg}\alpha = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}$,

$\operatorname{arccotg}\sqrt{3} = \alpha \in (0, \pi) \iff \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{6}$,

podobně dále $\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$,

$\arccos\sqrt{3}$ neexistuje, protože $\arccos x$ je definován jen pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$,

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\qquad \operatorname{arccotg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

b) $\arcsin\big(\sin\pi\big) = \arcsin 0 = 0, \qquad \sin\Big(\arcsin\dfrac{1}{2}\Big) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2},$

$$\arccos\Big(\cos\frac{7\pi}{2}\Big) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \cos\big(\arccos 1\big) = \cos 0 = 1,$$

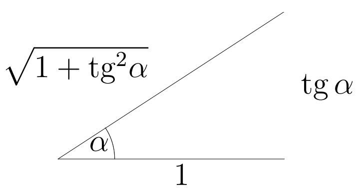
$$\operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\Big) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \qquad \operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}\big(-\sqrt{3}\big)\Big) = \operatorname{tg}\Big(-\frac{\pi}{3}\Big) = -\sqrt{3};$$

Poznámka: $\arcsin(\sin x) \left\langle \begin{array}{ll} = x & \text{pro} \quad x \in \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \\ \neq x & \text{pro} \quad x \notin \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \end{array} \right.,$

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{pro } x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Čtenář si může rozmyslet a dopsat vztahy, které platí pro $\arccos(\cos x)$, $\cos(\arccos x)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$, $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x)$, $\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg} x)$.

c) Označme $\cos\big(\operatorname{arctg} a\big) = b$, kde $b \in (0, 1\rangle$, protože $\alpha = \operatorname{arctg} a \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$.



Z pravoúhlého trojúhelníka vyjádříme

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$, kde dosadíme $\alpha = \operatorname{arctg} a$

a dopočítáme $\quad \cos(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\big(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)\big)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}.$

Tento výsledek použijeme pro $\dfrac{4}{3}$: $\cos\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\Big) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\Big(\dfrac{4}{3}\Big)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{3}{5};$

d) Označme $\sin\big(\arccos a\big) = b$, $\arccos a = \alpha$, $\sin\alpha = b$, kde $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$, $b \in \langle 0, 1\rangle$.
Vyjádříme $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ a po dosazení obdržíme $\sin\big(\arccos a\big) =$

$= \sqrt{1-\Big[\cos(\arccos a)\Big]^2} = \sqrt{1-a^2}$. Potom aplikujeme pro $a = -\dfrac{5}{13}$:

$$\sin\Big(\arccos\big(-\frac{5}{13}\big)\Big) = \sqrt{1-\Big(-\frac{5}{13}\Big)^2} = \sqrt{\frac{169-25}{13^2}} = \frac{12}{13}.$$

■

23. Určete definiční obory daných funkcí:

a) $y = \sqrt{5\ln x - \ln^2 x}$; **b)** $y = \dfrac{1}{\log_5(x-4)}$; **c)** $y = \arcsin\Big(3 - \dfrac{x}{2}\Big)$;

d) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}}$; e) $y = \ln\dfrac{3x-5}{3-x}$; **f)** $y = \arccos(\ln x)$;

$\Big[$**a)** $\langle 1, \mathrm{e}^5\rangle$; **b)** $(4,5)\cup(5,+\infty)$; **c)** $\langle 4, 8\rangle$; **d)** $\langle 2, +\infty)$; e) $\Big(\dfrac{5}{3}, 3\Big)$; **f)** $\Big\langle\dfrac{1}{\mathrm{e}}, \mathrm{e}\Big\rangle\Big]$

24. Rozhodněte z definice, zda následující funkce jsou sudé nebo liché:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}$; **b)** $f(x) = \mathrm{e}^{ax} - \mathrm{e}^{-ax}$; **c)** $f(x) = \operatorname{cotg}\ x + \dfrac{\pi}{2}$;

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 3x^5$; e) $f(x) = x^3 \sin 2x$; **f)** $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 4x$.

[**a)** sudá; **b)** lichá; **c)** ani sudá ani lichá; **d)** lichá; e) sudá; **f)** lichá]

25. Které z následujících funkcí jsou periodické a s jakou primitivní periodou:

a) $f(x) = \sin x + \cos 3x$; **b)** $f(x) = \sin(\arcsin x)$;

c) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; **d)** $f(x) = \operatorname{tg}(2x + 1)$;

$\left[\textbf{a)}\ \text{ano},\ 2\pi;\ \textbf{b)}\ \text{ne};\ \textbf{c)}\ \text{ano},\ 2\pi;\ \textbf{d)}\ \text{ano},\ \frac{\pi}{2}\right]$

26. Sestavte složené funkce $f \circ g$ a $g \circ f$, jestliže

a) $f(x) = (x + 1)^2$, $g(x) = \sin 2x$;

b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $g(x) = \ln x,\ x > 0$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, $g(x) = \arcsin(x + 1),\ x \in \langle -2, 0\rangle$.

$\left[\textbf{a)}\ (\sin 2x + 1)^2,\ \sin 2(x + 1)^2\ ;\ \textbf{b)}\ \ln^2 x + 3\ln x + 2,\ \ln(x^2 + 3x + 2);\ \textbf{c)}\ \mathrm{e}^{\left(\arcsin(x+1)\right)^2},\ \arcsin\left(\mathrm{e}^{x^2} + 1\right)\right]$

27. Určete maximální intervaly, na kterých je daná funkce f ryze monotónní (tj. prostá) a najděte k ní inverzní funkce. Stanovte též definiční obor příslušné inverzní funkce:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{3x+2}$; **b)** $f(x) = (x - 3)^2 + 2$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$; **d)** $f(x) = 2^x + 4$.

a)	$D(f) = (-\infty, +\infty)$,	$f_{-1}(x) = \frac{1}{3}(\ln x - 2)$,	$D(f_{-1}) = (0, +\infty)$;
b)	buď $D(f) = \langle 3, +\infty)$,	$f_{-1}(x) = 3 + \sqrt{x - 2}$,	$D(f_{-1}) = \langle 2, +\infty)$;
	nebo $D(f) = (-\infty, 3\rangle$,	$f_{-1}(x) = 3 - \sqrt{x - 2}$,	$D(f_{-1}) = \langle 2, +\infty)$;
c)	např.$D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$,	$f_{-1}(x) = \arcsin\frac{1}{x}$,	$D(f_{-1}) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$;
d)	$D(f) = (-\infty, +\infty)$,	$f_{-1}(x) = \log_2(x - 4)$,	$D(f_{-1}) = (4, +\infty)$

28. Spočítejte

a) $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$, $\operatorname{arccotg} 0$,

$\arcsin\dfrac{1}{2}$, $\arccos 0$, $\operatorname{arctg} 0$, $\operatorname{arccotg}(-1)$;

b) $\arcsin\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\arccos\left(\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$, $\arcsin\left(\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{6}\right)$,

$\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2\pi)$.

$\left[\textbf{a)}\ -\frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{3\pi}{4};\ \textbf{b)}\ \frac{\pi}{6},\ \text{neexistuje},\ \text{neexistuje},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 5,\ 0\right]$

3. Limita a spojitost funkce

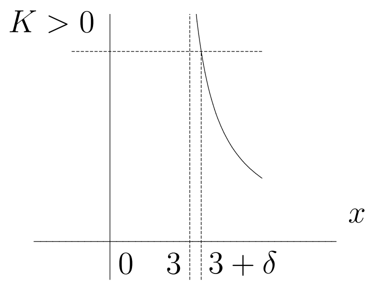
***Příklad* 29**. Dokažte přímo z definice limity:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty;$ **b)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$

Řešení:

a) Připomeňme si definici jednostranné limity a načrtněme graf v okolí bodu x_0:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \iff \forall\, K\ \exists\, \delta > 0\ \ \forall\, x : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow\ f(x) > K.$$



V daném příkladě $x_0 = 3$ a máme tedy dokázat:

$$\forall\ K\ \exists\, \delta > 0\ \ \forall x:\ 0 < x - 3 < \delta \Rightarrow \frac{1}{x-3} > K.$$

Začneme od poslední nerovnosti, ve které zvolíme $K > 0$ a pak dostaneme

$$\frac{1}{x-3} > K \overset{x-3>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{K} > x - 3 \ \Rightarrow\ x - 3 < \frac{1}{K} \quad \text{a též} \quad x - 3 < \delta \ \Rightarrow\ \delta = \frac{1}{K}.$$

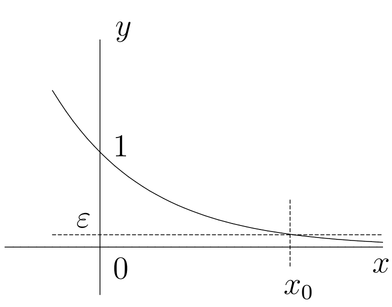
Dokázali jsme, že ke každému zvolenému $K > 0$ vždy existuje $\delta > 0$ tak, že platí $\forall\ 0 < x - 3 < \delta :\ \dfrac{1}{x-3} > K$. Zvolme např. $K_1 = 100$, $K_2 = 1500$ pak

$$K_1 = 100 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \frac{1}{100} :\ \forall\ 0 < x - 3 < \frac{1}{100} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x-3} > 100,$$

$$K_2 = 1500 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \frac{1}{1500} :\ \forall\ 0 < x - 3 < \frac{1}{1500} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x-3} > 1500.$$

Tím jsme dokázali, že $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty.$

b) Napišme definici $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$, kde $A = 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ a připojme příslušný graf:



$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\, x_0 \in \mathbb{R}\ \ \forall\ x > x_0 :\ \frac{1}{\mathrm{e}^x} < \varepsilon \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{e}^x > \frac{1}{\varepsilon} \ \Rightarrow\ x > \ln\frac{1}{\varepsilon}, \quad x > x_0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x_0 = \ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Např. pro $\varepsilon_1 = 0.01 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln 100 :\ \forall\ x > \ln 100\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} < 0.01,$

pro $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{20}} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \ln \mathrm{e}^{20} = 20 :\ \forall\ x > 20\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{20}}.$

Tím jsme dokázali, že $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$

■

***Příklad* 30**. Ilustrujte na obrázcích následující tvrzení a zvolte příklad odpovídající zadání:

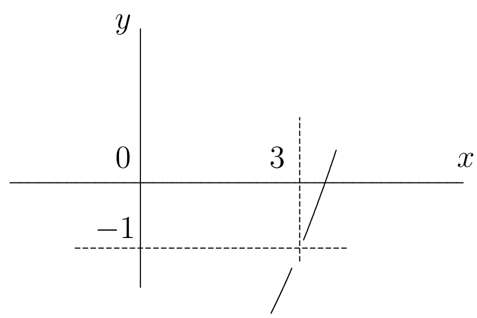
a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$;

c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

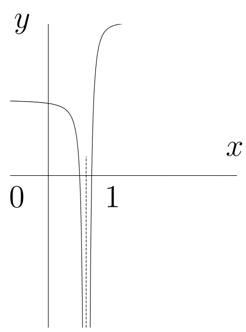
Řešení:

a) Je-li $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -1$, pak též $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -1$.



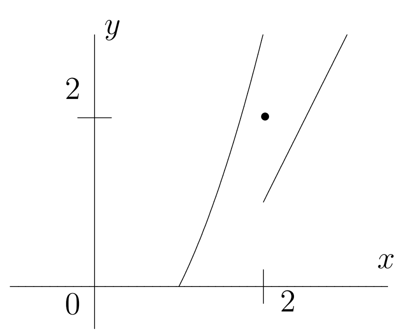
Např. $f(x) = x^2 - 10$,
$\lim\limits_{x\to 3} x^2 - 10 = -1$.

b)



Např. $f(x) = \dfrac{x-2}{(x-1)^2}$,
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{(x-1)^2} = -\infty$.

c) Je-li $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ neexistuje.

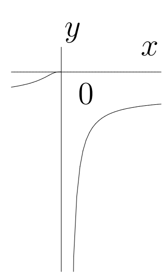


Např. $f(x) = \begin{cases} 2\,x - 3, & x > 2 \\ 2, & x = 2 \\ x^2 - 1, & x < 2 \end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2\,x - 3) = 1$,

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2 - 1) = 3$.

d)



Např. $f(x) = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\mathrm{e}^{-\infty} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\infty}} = 0$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\mathrm{e}^{+\infty} = -\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0} -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ neexistuje.

■

***Příklad* 31**. Spočítejte následující limity:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to1}\frac{x^2+5\,x-2}{x+3};\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+5\,x-14};$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}-2};\qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1},\quad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}.$$

Řešení:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to1}\frac{x^2+5\,x-2}{x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}x^2+\lim\limits_{x\to1}5\,x-2}{\lim\limits_{x\to1}x+3}=\frac{1+5-2}{1+3}=1;$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+5\,x-14}=\left|\begin{array}{c}\text{Po dosazení } x=2 \text{ dostáváme neurčitý výraz } \frac{0}{0},\text{ proto}\\ \text{rozložíme polynomy čitatele a jmenovatele na kořenové činitele.}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2\,x+4)}{(x-2)(x+7)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2\,x+4}{x+7}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3};$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{2+x}-2}=\left|\begin{array}{c}\text{Opět máme neurčitý výraz } \frac{0}{0},\text{ avšak jmenovatel není}\\ \text{polynom, proto celý zlomek rozšíříme.}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}{(\sqrt{2+x}-2)(\sqrt{2+x}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}{2+x-4}=$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(\sqrt{2+x}+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\left(\sqrt{2+x}+2\right)=4;$$

$$\textbf{d)}\ \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}x}{\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)}=\frac{1}{0^+}=+\infty,\qquad \lim_{x\to1^-}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty.$$

■

***Příklad* 32**. Spočítejte následující limity:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2\,x+1}{2-x^2};\qquad \textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^4(3\,x-1)^5}{(2\,x+1)^2(1-4\,x)^7};$$

$$\textbf{c)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{3\,x^2+1}-\frac{2\,x^2}{1+6\,x}\right);\qquad \textbf{d)}\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right);$$

$$\textbf{e)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}.$$

Řešení:

$$\textbf{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-2\,x+1}{2-x^2}=\left|\begin{array}{c}\text{Máme neurčitý výraz typu } \frac{\infty}{\infty},\text{ limitu vypočítáme podobně}\\ \text{jako limity posloupnosti. Tušíme, že bude } -\infty.\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x^2}-1}=\frac{\infty-0+0}{0-1}=-\infty;$$

$$\textbf{b)}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+3)^4(3\,x-1)^5}{(2\,x+1)^2(1-4\,x)^7}=\left|\begin{array}{c}\frac{\infty}{\infty}\ \text{ čitatel a jmenovatel jsou polynomy 9. stupně,}\\ \text{proto se limita bude rovnat podílu koeficientů u } x^9.\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1^4\cdot3^5}{2^2\cdot(-4)^7}=\frac{3^5}{-4\cdot4^7}=-\frac{3^5}{4^8}=-\frac{243}{65536};$$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{3\,x^2+1}-\dfrac{2\,x^2}{1+6\,x}\right)=\left|\,\text{Zde jde o }-\infty+\infty,\text{ proto zlomky sečteme.}\right|=$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\,(1+6\,x)-2\,x^2\,(3\,x^2+1)}{(3\,x^2+1)(1+6\,x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+6\,x^4-6\,x^4-2\,x^2}{18\,x^3+3\,x^2+6\,x+1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2\,x^2}{18\,x^3+3\,x^2+6\,x+1}=\left|\,\tfrac{\infty}{\infty}\,\right|=\frac{1}{18};$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\left|\begin{array}{c}\infty-\infty\text{ pro větší přehlednost použijeme substituci}\\ y=-x,\text{ pak pro }x\Rightarrow-\infty\text{ dostáváme }y\Rightarrow\infty\end{array}\right|=$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=\left|\,\text{výraz rozšíříme}\,\right|=\lim_{y\to+\infty}\frac{(\sqrt{y^2+1}-y)(\sqrt{y^2+1}+y)}{\sqrt{y^2+1}+y}=$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^2+1-y^2}{\sqrt{y^2+1}+y}=\frac{1}{\infty}=0;$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x^2}=\dfrac{\operatorname{arctg}(+\infty)}{+\infty}=\dfrac{\pi/2}{+\infty}=0.$

■

***Příklad* 33**. Vypočítejte dané limity použitím známé limity $\boxed{\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin a\,x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin a\,x}{\sin b\,x}$; c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3\,x+2\,x}{\sin 5\,x-7\,x}$;

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$; e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\,x^2-5\,x}{\sin 4\,x}$; f) $\lim\limits_{x\to0}x\cdot\operatorname{cotg}\,ax,\ a>0$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\,\sin\dfrac{x}{2^n},\ x\neq0.$

Řešení:

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin a\,x}{x}=\left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cdot\sin a\,x}{a\cdot x}=\left|\begin{array}{c}\text{substituce }\ y=a\,x\\ x\Rightarrow0\ \Rightarrow\ y\Rightarrow0\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to0}a\cdot\dfrac{\sin y}{y}=a\cdot1=a;$

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin a\,x}{\sin b\,x}=\left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin a\,x}{x}}{\frac{\sin b\,x}{x}}=\left|\,\text{viz }\mathbf{a)}\,\right|=\dfrac{a}{b};$

c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3\,x+2\,x}{\sin 5\,x-7\,x}=\left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin 3\,x}{x}+\frac{2\,x}{x}}{\frac{\sin 5\,x}{x}-\frac{7\,x}{x}}=\dfrac{3+2}{5-7}=-\dfrac{5}{2};$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\left|\begin{array}{c}\tfrac{0}{0}\text{ zlomek rozšíříme}\\ \text{výrazem }\sqrt{1+\cos x}\end{array}\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{(1-\cos x)(1+\cos x)}}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\sqrt{2};$$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\,x^2-5\,x}{\sin 4\,x}=\left|\,\tfrac{0}{0}\,\right|=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,(2\,x-5)}{\sin 4\,x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\,x-5}{\frac{\sin 4\,x}{x}}=-\dfrac{5}{4};$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{cotg} ax = |\ 0\cdot\infty\ | = \lim\limits_{x\to 0} x\cdot \dfrac{\cos a\,x}{\sin a\,x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos a\,x}{\dfrac{\sin a\,x}{x}} = \dfrac{1}{a};$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\dfrac{x}{2^n} = \left|\ \text{neurčitý výraz typu } \infty\cdot 0 \text{ upravíme na } \tfrac{0}{0}\ \right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}} =$

$$= \left|\begin{array}{c} \text{položíme } \dfrac{1}{2^n} = y \\ n\Rightarrow\infty \ \Rightarrow\ y\Rightarrow 0\end{array}\right| = \lim_{y\to 0}\frac{\sin x\,y}{y} = x.$$

■

***Příklad* 34**. Použitím známého vzorce $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}}$ dokažte vzorce:

a) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+x\Big)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e};}$ b) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1;}$ c) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1.}$

Řešení:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+x\Big)^{\frac{1}{x}} = \left|\begin{array}{c}\text{neurčitý výraz } 1^\infty\\ \text{použijeme substituci } x=\dfrac{1}{y}\\ x\Rightarrow 0\ \Rightarrow\ y\Rightarrow\pm\infty\end{array}\right| = \lim\limits_{y\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = \mathrm{e};$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = |\ \tfrac{0}{0}\ | = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = |\text{ podle } \mathbf{a)}| = \ln\mathrm{e} = 1;$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \left|\begin{array}{c}\tfrac{0}{0}\ \Rightarrow \text{použijeme}\\ \text{substituci } x=\ln(y+1)\\ x\Rightarrow 0\ \Rightarrow\ y\Rightarrow 0\end{array}\right| = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\ln(y+1)}-1}{\ln(y+1)} = |\mathrm{e}^{\ln a} = a\ | =$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y+1-1}{\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(y+1)} = |\text{ podle } \mathbf{b)}| = 1.$$

■

***Příklad* 35**. Použitím vzorců uvedených v příkladech **33** a **34** vypočítejte následující limity:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1-2\,x\Big)^{\frac{1}{x}};$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+\operatorname{tg}^2 x\Big)^{\operatorname{cotg}^2 x};$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2\,x}-\mathrm{e}^{-2\,x}}{x};$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2\,x}-1}{\sin 3\,x};$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right);$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-4\,x)}{x}.$

Řešení:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1-2\,x\Big)^{\frac{1}{x}} = |1^\infty| = \lim\limits_{x\to 0}\Big(1+(-2\,x)\Big)^{\frac{1}{(-2\,x)}\cdot(-2)} = \left|\begin{array}{c}\text{položíme}\\ y=-2\,x,\ y\Rightarrow 0\end{array}\right| =$

$$= \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}\cdot(-2)} = \lim_{y\to 0}\Big[(1+y)^{\frac{1}{y}}\Big]^{-2} = \mathrm{e}^{-2};$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(1+\operatorname{tg}^2 x\Big)^{\operatorname{cotg}^2 x} = \left|\begin{array}{c}1^\infty,\ \text{položíme } \operatorname{tg}^2 x = y,\\ y\Rightarrow 0,\ \operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\end{array}\right| = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e};$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{x} = |\tfrac{0}{0}| = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}\left(\mathrm{e}^{4x}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{x\cdot\mathrm{e}^{2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{4x}-1}{4x}\cdot\dfrac{4}{\mathrm{e}^{2x}} =$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \;\; y = 4x \\ x \Rightarrow 0, \;\; y \Rightarrow 0 \end{array} \right| = 1 \cdot \frac{4}{1} = 4;$$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\sin 3x} = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \frac{\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}}{\frac{\sin 3x}{x}} = \frac{2}{3};$$

e) $$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right) = |\,\infty \cdot 0\,| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ \frac{1}{x} = y, \;\; y \Rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{\mathrm{e}^{y}-1}{y} = 1;$$

f) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-4x)}{x} = |\,\tfrac{0}{0}\,| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+(-4x)\big)}{x} = \left| \begin{array}{c} \text{substituce} \\ y = -4x, \;\; y \Rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{-\frac{1}{4}\cdot y} =$$

$$= -4.$$

■

***Příklad* 36**. Stanovte maximální intervaly, v nichž jsou dané funkce spojité. Výsledky znázorněte grafem.

a) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2}$; **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & \text{pro } x \neq 2 \\ 12, & \text{pro } x = 2 \end{cases}$;

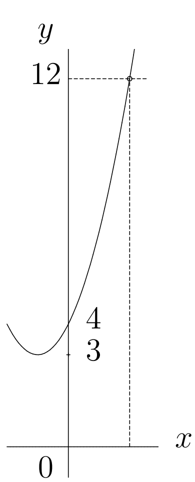
c) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$; **d)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x}, & \text{pro } x \neq 0 \\ 1, & \text{pro } x = 0 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & \text{pro } x \neq 0 \\ 0, & \text{pro } x = 0 \end{cases}$; **f)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{pro } x \in \langle -1, 0) \\ 1, & \text{pro } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{pro } x \in (0, 3\rangle \end{cases}$.

Řešení: Budeme vycházet z následující definice: *Funkci $f(x)$ nazýváme* ***spojitou v bodě*** *$x_0 \in D(f)$, jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

a) $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} \quad \Rightarrow \quad$ Daná funkce je spojitá v intervalech $(-\infty, 2)$ a $(2, +\infty)$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$,

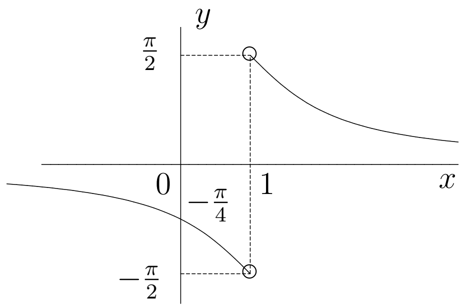


$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = |\,\tfrac{0}{0}\,| = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2\,x+4)}{x-2} =$$
$$= \lim_{x\to 2} (x^2+2\,x+4) = 12 = f(2).$$

Daná funkce je spojitá pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$.

c) $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$, $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Zkusme určit chování funkce v okolí bodu $x_0 = 1$.



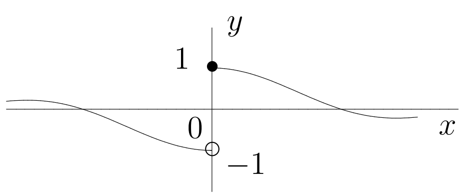
$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2};$$
$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1} = \operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}.$$

Daná funkce v bodě $x_0 = 1$ "skáče"z hodnoty $-\dfrac{\pi}{2}$ na hodnotu $+\dfrac{\pi}{2}$.

Maximální intervaly spojitosti jsou $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$.

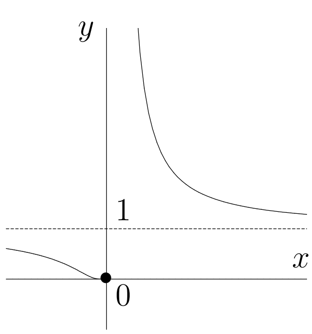
d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x}, & \text{pro } x \neq 0 \\ 1, & \text{pro } x = 0 \end{cases}$; $\qquad D(f) = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0),$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1 \neq f(0).$$



Funkce je spojitá na intervalech $(-\infty, 0)$ a $\langle 0, +\infty)$. V bodě 0 je spojitá zprava.

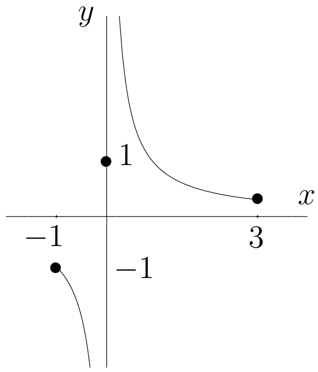
e) $D(f) = \mathbb{R}$,



$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{+\infty} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{-\infty} = \frac{1}{\mathrm{e}^{+\infty}} = 0 = f(0).$$

Maximální intervaly spojitosti jsou $(-\infty, 0\rangle$ a $(0, +\infty)$. V bodě 0 je funkce spojitá zleva.

f) $D(f) = \langle -1, 3 \rangle$,



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Funkce je spojitá na intervalech $\langle -1, 0)$ a $(0, 3\rangle$.

■

***Příklad* 37**. Určete hodnotu parametru a tak, aby funkce $f(x)$ byla spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin a\,x}{x}, & \text{pro } x \in (-\infty, 0\rangle \\ 2, & \text{pro } x \in (0, +\infty) \end{cases}$;

b) $f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + 2, & \text{pro } x \in (-\infty, 1\rangle \\ 2\,a - x, & \text{pro } x \in (1, +\infty) \end{cases}$.

Řešení: Parametr a spočítáme z podmínky $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

a) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin a\,x}{x} = a = \lim\limits_{x\to 0^+} 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 2}$;

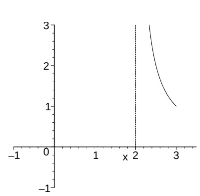
b) $\lim\limits_{x\to 1^-} (a\,x^2 + 2) = a + 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} (2\,a - x) = 2\,a - 1 \quad \Rightarrow \quad a + 2 = 2\,a - 1 \Rightarrow \underline{a = 3}$.

■

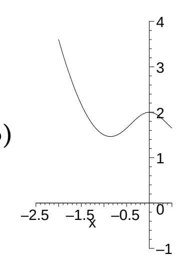
38. Dokažte užitím definice:
a) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x - 1) = -\infty$.

39. Ilustrujte na obrázcích následující tvrzení a zvolte příklad odpovídající zadání:
a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$; **b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$;
c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty \;\wedge\; \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 2$.

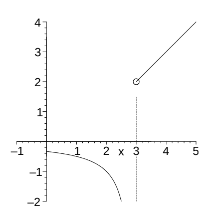
a)



b)



c)



např. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

např. $f(x) = \dfrac{x^4 + 2}{x^2 - 1}$

např. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 3} & \text{pro } x < 3 \\ x - 1 & \text{pro } x > 3 \end{cases}$

40. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2+3x}$; **b**) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+x^2-2x-1}{x^2+4x-5}$; **c**) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2\sqrt{x}}{x^2-16}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}-1}$; e) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$; **f**) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{x^2-x-2}{x^2+4x+3}\right)^3$.

[**a**) 0; **b**) 1; **c**) $\frac{1}{16}$; **d**) -4; e) -1; **f**) $-\frac{27}{8}$]

41. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{e^x-1}$; **b**) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{e^x-1}$; **c**) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x+5}$; **d**) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1}(x+1)\arcsin\dfrac{x}{2}$; **f**) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)$; **g**) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$.

[**a**) $+\infty$; **b**) $-\infty$; **c**) 0; **d**) neexistuje; e) $\frac{\pi}{3}$; **f**) 0; **g**) $\frac{3}{2}$]

42. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{x}$; **b**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; **c**) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x+\sin 5x}{4x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^2}$; **f**) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{cotg} x-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

[**a**) a; **b**) $\frac{1}{2}$; **c**) 0; **d**) 2; e) neexistuje; **f**) 0]

43. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$; **b**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{4x}$; **c**) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+x}{3x-\ln(1+x)}$; **f**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x\sin 2x}$.

[**a**) 1; **b**) $\frac{1}{4}$; **c**) e^{-1}; **d**) 2; e) 1; **f**) $\frac{1}{2}$]

44. Stanovte maximální intervaly, v nichž jsou dané funkce spojité a zjistěte chování funkcí v bodech případné nespojitosti:

a) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{pro } x\neq 0\\ 0, & \text{pro } x=0\end{cases}$; **b**) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1-4x^2)}{x^2}, & \text{pro } x\neq 0\\ 4, & \text{pro } x=0\end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} 3+x^2, & \text{pro } x\in(-\infty,0\rangle\\ \dfrac{\sin 3x}{|x|}, & \text{pro } x\in(0,+\infty)\end{cases}$; **d**) $f(x)=\dfrac{x^2+5x}{(x-1)^2}$.

[**a**) $(-\infty,+\infty)$; **b**) $\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-4\neq f(2)=4$;
c) $(-\infty,+\infty)$; **d**) $(-\infty,1),(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$]

45. Určete pro jaká k jsou funkce spojité v $\mathbb{R}$.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{kx}-1}{2x}, & \text{pro } x\neq 0\\ 2x+k-2, & \text{pro } x=0\end{cases}$; **b**) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|\sin 9x|}{kx}, & \text{pro } x\in(-\infty,0)\\ x-k, & \text{pro } x\in\langle 0,+\infty)\end{cases}$.

[**a**) $k=4$; **b**) $k_{1,2}=\pm 3$]

4. Derivace funkce - výpočet pomocí základních vzorců a pravidel

***Příklad* 46**. Použitím definice derivace určete $f'(x)$, jestliže

$$\textbf{a)}\ f(x) = \ln x,\ x > 0; \qquad \textbf{b)}\ f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0.$$

Řešení: Podle definice je $\boxed{f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$

$$\textbf{a)}\ (\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\cdot h\right)}{h} = \frac{1}{x},$$

$$\left|\text{použitím } \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(1+ax)}{x} = a\right|;$$

$$\textbf{b)}\ \left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}.$$

■

***Příklad* 47**. Spočítejte derivace $f'(c)$, jestliže

$$\textbf{a)}\ f(x) = 3x^4 - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 10, \qquad c = 1;$$

$$\textbf{b)}\ f(x) = x \ln x + \mathrm{e}^2, \qquad c = \mathrm{e};$$

$$\textbf{c)}\ f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}, \qquad c = 4;$$

$$\textbf{d)}\ f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt{x\sqrt{x}}, \qquad c = 1.$$

Řešení:

$$\textbf{a)}\ f'(x) = 3\left(x^4\right)' - \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + \left(x^{-2}\right)' - 4\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' + (10)' = \left| \begin{array}{l} \text{použijeme vzorec} \\ \boxed{\left(x^\alpha\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}} \end{array} \right| = 3\cdot 4x^3 -$$

$$-\frac{2}{3}\, x^{\frac{2}{3}-1} + (-2)\, x^{-2-1} - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{1}{2}-1} + 0 = 12x^3 - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-3} + 2x^{-\frac{3}{2}} =$$

$$= 12x^3 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x\sqrt{x}}, \qquad f'(1) = 12 - \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{34}{3};$$

$$\textbf{b)}\ f'(x) = (x\ \ln x)' + (\mathrm{e}^2)' = \left| \begin{array}{l} \text{použijeme vzorec} \\ \boxed{(uv)' = u'v + uv'} \end{array} \right| = x' \ln x + x\cdot(\ln x)' + 0 = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \ln x + 1, \qquad f'(\mathrm{e}) = \ln \mathrm{e} + 1 = 2;$$

$$\textbf{c)}\ f'(x) = \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)' = \left| \begin{array}{l} \text{použijeme vzorec} \\ \boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}} \\ (\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{x}\right)'\cdot\left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right)\cdot\left(1+\sqrt{x}\right)'}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{x}\right) - \left(1-\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{-\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-2}{2\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},$$

$$f'(4) = \frac{-1}{2(1+2)^2} = \frac{-1}{18};$$

d) $f'(x) = \left(x + x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{4}}\right)' = 1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}},$

$f'(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$

■

***Příklad* 48**. Užitím věty o derivování složené funkce vypočítejte derivaci a určete její (maximální) definiční obor:

a) $y = \sin(3x^4+5)$; **b)** $y = \sin(3x+5)^4$;
c) $y = \sin^4(3x+5)$; **d)** $y = 2^{\operatorname{tg} x}\cdot \ln \operatorname{tg} x$;
e) $y = \operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$; **f)** $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;
g) $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$; **h)** $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$;
i) $y = \mathrm{e}^x(x^2+3x+4)$; **j)** $y = \mathrm{e}^x \cdot P_n(x)$, kde $P_n(x)$ je polynom $n-$ tého stupně.

Řešení: Dané funkce všech příkladů jsou složené. Budeme je derivovat podle vzorce $\boxed{\left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x).}$ Definiční, tj. existenční obory jednotlivých derivací nebudeme podrobně rozebírat, napíšeme jenom podmínky a výsledek.

a) $y' = \left[\sin(3x^4+5)\right]' = \cos(3x^4+5)\cdot(3x^4+5)' = \cos(3x^4+5)\cdot 12x^3, \qquad x\in\mathbb{R};$

b) $y' = \left[\sin(3x+5)^4\right]' = \cos(3x+5)^4\cdot\left[(3x+5)^4\right]' = \cos(3x+5)^4\cdot 4(3x+5)^3\cdot(3x+5)' =$
$= \cos(3x+5)^4\cdot 4(3x+5)^3\cdot 3 = 12(3x+5)^3\cos(3x+5)^4, \qquad x\in\mathbb{R};$

c) $y' = \left[\sin^4(3x+5)\right]' = 4\sin^3(3x+5)\cdot\left[\sin(3x+5)\right]' = 4\sin^3(3x+5)\cdot\cos(3x+5)\cdot 3 =$
$= 12\sin^3(3x+5)\cdot\cos(3x+5), \qquad x\in\mathbb{R};$

d) $y' = \left[2^{\operatorname{tg} x}\cdot\ln\operatorname{tg} x\right]' = \left(2^{\operatorname{tg} x}\right)'\cdot\ln\operatorname{tg} x + 2^{\operatorname{tg} x}\cdot\left(\ln\operatorname{tg} x\right)' = 2^{\operatorname{tg} x}\cdot\ln 2\cdot\left(\operatorname{tg} x\right)'\cdot\ln\operatorname{tg} x +$
$+2^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\left(\operatorname{tg} x\right)' = 2^{\operatorname{tg} x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln\operatorname{tg} x + 2^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} =$
$= 2^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\left(\ln 2\cdot\ln\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right), \qquad \operatorname{tg} x > 0,\ \cos x \neq 0 \ \Rightarrow\ x\in(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi);$

e) $y' = \left(\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2+(x+1)^2}\cdot\frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} =$
$= \frac{-2}{x^2-2x+1+x^2+2x+1} = \frac{-2}{2x^2+2} = \frac{-1}{x^2+1}, \qquad x\neq 1;$

f) $y' = \left[\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}\right]' = \left|\begin{array}{l}\text{nejdříve zlogaritmujeme druhou odmocninu}\\ \text{a teprve pak budeme derivovat.}\\ \text{Definiční obor se tím nezmění.}\end{array}\right| = \left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}\right]' =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}\cdot\Big(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\Big)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{\cos x(1-\sin x)-(1+\sin x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cos x - \sin x\cos x + \cos x + \sin x\cos x}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{2}\,\frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0,\ 1-\sin x \neq 0,\ \cos x \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

g) $y' = \Big[\arcsin(\sin x - \cos x)\Big]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\sin x - \cos x)^2}}\cdot(\sin x - \cos x)' =$

$$= \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x)}} = \left|\begin{array}{l}\sin^2 x + \cos^2 x = 1\\ 2\sin x\cos x = \sin 2x\end{array}\right| = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1-(1-\sin 2x)}} =$$

$$= \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}}, \qquad -1 < \sin x - \cos x < 1,\ \sin 2x > 0 \quad\Rightarrow\quad x \in (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi);$$

h) $y' = \Big[\ln\big(x+\sqrt{x^2+a}\big)\Big]' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\big(x+\sqrt{x^2+a}\big)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\Big(1+\frac{1}{2}(x^2+a)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x\Big) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\Big(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\Big)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a}+x}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}, \qquad x+\sqrt{x^2+a} > 0,\ x^2+a > 0.$$

Poznámka: Právě spočítaná derivace vede k velmi důležitému vzorci v integrálním počtu, proto jej zopakujeme a zapíšeme i jako integrál

$$\boxed{\Big[\ln\big(x+\sqrt{x^2+a}\big)\Big]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}},} \qquad \boxed{\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\big(x+\sqrt{x^2+a}\big) + C.}$$

i) $y' = \Big[e^x(x^2+3x+4)\Big]' = (e^x)'(x^2+3x+4)+e^x(x^2+3x+4)' = e^x(x^2+3x+4)+e^x(2x+3) =$
$= e^x(x^2+5x+7), \qquad x \in \mathbb{R};$

j) $y' = (e^x)'\cdot P_n(x) + e^x\cdot P_n'(x) = e^x\Big(P_n(x)+P_n'(x)\Big), \qquad x \in \mathbb{R}.$

■

***Příklad* 49**. Vypočtěte derivaci funkce a její definiční obor:

a) $y = x^{\sin x}$; **b)** $y = (\operatorname{cotg} x + 1)^{\frac{2}{x}}$;

c) $y = (x^2+1)^{\cos^2 x}$; **d)** $y = \Big(\ln(x^2+1)\Big)^{2x}$.

Řešení: Uvedené funkce jsou typu $f(x)^{g(x)}$, pro které nemáme přímý vzorec na derivování a proto nejdříve funkce upravíme na tvar vhodný k derivování. K tomu použijeme přepis:

$$\boxed{f(x)^{g(x)} = e^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}, \qquad f(x) > 0.}$$

a) $y = x^{\sin x} = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln x}$,

$$y' = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \Big[\sin x \cdot \ln x\Big]' = \mathrm{e}^{\sin x \cdot \ln x}\Big(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\Big) =$$

$$= x^{\sin x}\Big(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\Big), \qquad x > 0;$$

b) $y = \big(\operatorname{cotg} x + 1\big)^{\frac{2}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{x}\,\ln(\operatorname{cotg} x + 1)}$;

$$y' = \mathrm{e}^{\frac{2}{x}\,\ln(\operatorname{cotg} x+1)} \cdot \Big[\frac{2}{x}\,\ln(\operatorname{cotg} x + 1)\Big]' =$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{2}{x}\,\ln(\operatorname{cotg} x+1)} \cdot \Big(\frac{-2}{x^2}\ln(\operatorname{cotg} x + 1) + \frac{2}{x}\,\frac{1}{\operatorname{cotg} x + 1} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}\Big) =$$

$$= \sqrt[x]{(\operatorname{cotg} x + 1)^2} \cdot \frac{-2}{x} \cdot \Big(\frac{\ln(\operatorname{cotg} x + 1)}{x} + \frac{1}{(\operatorname{cotg} x + 1)\,\sin^2 x}\Big),$$

$$\operatorname{cotg} x + 1 > 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \Big(k\pi, \frac{3}{4}\pi + k\pi\Big);$$

c) $y = (x^2+1)^{\cos^2 x} = \mathrm{e}^{\cos^2 x \cdot \ln(x^2+1)}$,

$$y' = \mathrm{e}^{\cos^2 x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \Big[\cos^2 x \cdot \ln(x^2+1)\Big]' =$$

$$= \mathrm{e}^{\cos^2 x \cdot \ln(x^2+1)} \cdot \Big(2\cos x \cdot (-\sin x) \cdot \ln(x^2+1) + \cos^2 x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\Big) =$$

$$= (x^2+1)^{\cos^2 x} \cdot 2\cos x\Big(\frac{x\,\cos x}{x^2+1} - \sin x \cdot \ln(x^2+1)\Big), \qquad x \in \mathbb{R};$$

d) $y = \Big(\ln(x^2+1)\Big)^{2x} = \mathrm{e}^{2x \cdot \ln\left(\ln(x^2+1)\right)}$,

$$y' = \mathrm{e}^{2x \cdot \ln\left(\ln(x^2+1)\right)} \cdot \Big[2x \cdot \ln\big(\ln(x^2+1)\big)\Big]' = \quad \Big|\ \text{použijeme } \Big[\ln\big(\ln(x^2+1)\big)\Big]' =$$

$$= \frac{1}{\ln(x^2+1)} \cdot \Big[\ln(x^2+1)\Big]' = \frac{1}{\ln(x^2+1)} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot (2x)\ \Big| =$$

$$= \mathrm{e}^{2x \cdot \ln\left(\ln(x^2+1)\right)} \cdot \Big(2\,\ln\big(\ln(x^2+1)\big) + 2x \cdot \frac{1}{\ln(x^2+1)} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\Big) =$$

$$= \Big(\ln(x^2+1)\Big)^{2x} \cdot 2\Big[\ln\big(\ln(x^2+1)\big) + \frac{2x^2}{(x^2+1)\cdot\ln(x^2+1)}\Big],$$

$$\ln(x^2+1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0.$$

■

***Příklad* 50**. Vypočítejte $f'_+(x_0)$ a $f'_-(x_0)$ a rozhodněte, zda existuje $f'(x_0)$, jestliže

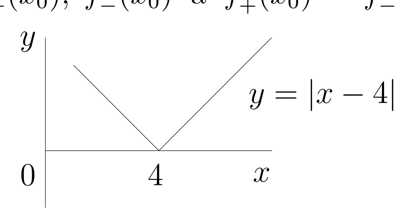
a) $f(x) = |x-4|$, $\qquad x_0 = 4$;

b) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$, $\qquad x_0 = 1$;

c) $f(x) = \big|(x-1)(x-2)^2\big|$, $\qquad x_0 = 2$.

Řešení: Víme, že $f'(x_0)$ existuje právě když existují $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ a $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

a) $f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4, & \text{pro } x \geq 4 \\ -(x-4), & \text{pro } x < 4 \end{cases} \Rightarrow$



$$f'_+(4) = 1 \;\neq\; f'_-(4) = -1 \quad \Rightarrow \quad f'(4) \;\text{ neexistuje.}$$

b) Spočítáme $f'(x)$ v obecném bodě:

$$f'(x) = \left[\arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2-2x^2}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}\cdot(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1+2x^2+x^4-4x^2}\cdot(1+x^2)} =$$

$$= \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{1-2x^2+x^4}(1+x^2)} = \frac{1(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}(1+x^2)} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$$

$$\text{pro} \quad x \Rightarrow 1_+ \quad \text{je} \quad (1-x^2)<0 \quad \text{a} \quad f'_+(1) = \frac{2(1-x^2)}{-(1-x^2)(1+x^2)}\Bigg|_1 = -1,$$

$$\text{pro} \quad x \Rightarrow 1_- \quad \text{je} \quad (1-x^2)>0 \quad \text{a} \quad f'_-(1) = \frac{2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}\Bigg|_1 = 1.$$

Z toho plyne, že $f'(1)$ neexistuje.

c) $f(x) = \left|(x-1)(x-2)^2\right| = \begin{cases} (x-1)(x-2)^2, & \text{pro } x \geq 1 \\ -(x-1)(x-2)^2, & \text{pro } x < 1 \end{cases}$,

$$f'_+(2) = f'_-(2) = \Big[(x-1)(x-2)^2\Big]'_{x=2} = (x-2)^2 + (x-1)\cdot 2(x-2)\Big|_{x=2} = 0,$$

$f'(2)$ existuje a $f'(2) = 0$.

■

***Příklad* 51**. Najděte body, v nichž má funkce nevlastní derivaci, jestliže

a) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x} + x$; **b)** $f(x) = \sqrt{3+x}$.

Řešení: Je-li $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *nevlastní, pak říkáme, že funkce* $f(x)$ *má v bodě* x_0 *nevlastní derivaci.*

V daných příkladech spočítáme $f'(x)$ a určíme, ve kterých bodech bude $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ nekonečná.

a) $f(x) = \sqrt[3]{\sin x} + x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{3}(\sin x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\cos x + 1 = \dfrac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} + 1.$

Hledané body spočítáme z podmínky $\sin x = 0$, ze které dostaneme $x_0 = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

$$\lim_{x\to k\pi}\left(\frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} + 1\right) = \begin{cases} +\infty, \ \text{pro } \ k = 2n \ \ (\text{sudé číslo}) \\ -\infty, \ \text{pro } \ k = 2n+1 \ \ (\text{liché číslo}) \end{cases}.$$

b) $f(x) = \sqrt{3+x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} \quad \Rightarrow \quad 3+x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -3,$

$D(f) = \langle -3, +\infty) \;\neq\; D(f') = (-3, +\infty),$

$f'_+(-3) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{1}{2\sqrt{3+x}} = +\infty, \quad f'_-(-3)$ neexistuje.

■

***Příklad* 52**. Spočítejte $f^{(4)}(x)$, $f^{(n)}(x)$ pro $n > 4$, jestliže

a) $f(x) = \sin x, \qquad x \in \mathbb{R};$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{ax}, \ a \neq 0, \qquad x \in \mathbb{R};$

c) $f(x) = \ln(1+x), \qquad x \in (-1, +\infty);$

d) $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \qquad a_i \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}.$

Řešení:

a) $f(x) = \sin x, \qquad f'(x) = \cos x, \qquad f'''(x) = -\cos x,$

$f''(x) = -\sin x, \qquad f^{(4)}(x) = \sin x = f(x).$

Je dobré si všimnout, že derivace funkce $f(x) = \sin x$ tvoří cykly délky 4. Tak můžeme snadno spočítat libovolnou derivaci např.:

$$\big(\sin x\big)^{(51)} = \Big(\big(\sin x\big)^{(48)}\Big)''' = \Big|\big(\sin x\big)^{(48)} = \sin x\Big| = (\sin x)''' = -\cos x,$$

$$\big(\sin x\big)^{(17)} = (\sin x)' = \cos x, \text{ atd.}$$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{ax}, \qquad f'(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot a, \qquad f'''(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot a^3,$

$f''(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot a^2, \qquad f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot a^4,$

$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{ax} \cdot a^n, \quad$ pro všechna $n \geq 0$.

c) $f(x) = \ln(1+x), \qquad f'(x) = \dfrac{1}{1+x}, \qquad f'''(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{(1+x)^3},$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f^{(4)}(x) = -\dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4},$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad$ pro všechna $n \geq 1$.

d)
$$\begin{aligned}
&f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,\\
&f'(x) = n \cdot x^{n-1} + (n-1)\, a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1},\\
&f''(x) = n(n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)\, a_1 x^{n-3} + \cdots + a_{n-2},\\
&\vdots\\
&f^{(4)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\, a_1 x^{n-5} + \cdots + a_{n-4},\\
&\vdots\\
&f^{(n)}(x) = n!\,.
\end{aligned}$$

■

***Příklad* 53**. K výpočtu n-té derivace funkce $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ použijte **Leibnizův vzorec**

$$\boxed{f^{(n)} = \big(u \cdot v\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}, \ n \geq 1}\text{, jestliže}$$

a) $f(x) = \mathrm{e}^{4x} \cdot (x^2 + 3x), \qquad n = 10;$

b) $f(x) = x^2 \cdot \sin 3x, \qquad n = 20;$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{1+x}, \qquad n = 8.$

Řešení:

a) Použijeme Leibnizův vzorec, kde $u = \mathrm{e}^{4x}$ a $v = x^2 + 3x$:

$$\left[\mathrm{e}^{4x} \cdot (x^2+3x)\right]^{(10)} = \binom{10}{0} \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(10)} (x^2+3x)^{(0)} + \binom{10}{1} \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(9)} (x^2+3x)' +$$

$$+\binom{10}{2} \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(8)} (x^2+3x)'' + \binom{10}{3} \left(\mathrm{e}^{4x}\right)^{(7)} (x^2+3x)''' + \cdots = \mathrm{e}^{4x} \cdot 4^{10} \cdot (x^2+3x) +$$

$$+10 \cdot \mathrm{e}^{4x} \cdot 4^9 \cdot (2x+3) + \frac{10 \cdot 9}{2} \mathrm{e}^{4x} \cdot 4^8 \cdot 2 + 0 + \cdots + 0 = \mathrm{e}^{4x} \cdot 4^8 \Big[4^2 \left(x^2+3x\right) +$$

$$+10 \cdot 4\,(2x+3) + 10 \cdot 9\Big] = \mathrm{e}^{4x} \cdot 4^8 \Big[16x^2 + 128x + 210\Big], \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $$\left[x^2 \cdot \sin 3x\right]^{(20)} = \left| \begin{array}{l} u(x) = \sin 3x \\ v(x) = x^2 \end{array} \right| = \binom{20}{0} (\sin 3x)^{(20)}\, x^2 + \binom{20}{1} (\sin 3x)^{(19)}\, (x^2)' +$$

$$+\binom{20}{2} (\sin 3x)^{(18)}\, (x^2)'' + 0 + \cdots + 0 = \sin 3x \cdot 3^{20} \cdot x^2 + 20 \cdot (-\cos 3x) \cdot 3^{19} \cdot 2x +$$

$$+\frac{20 \cdot 19}{2} (-\sin 3x) \cdot 3^{18} \cdot 2 = 3^{18} \big(9x^2 \sin 3x - 120x \cos 3x - 380 \sin 3x\big), \qquad x \in \mathbb{R};$$

c) $$\left[\frac{x^2+1}{1+x}\right]^{(8)} = \left[\frac{1}{1+x} \cdot (x^2+1)\right]^{(8)} = \left| \begin{array}{l} u(x) = \frac{1}{1+x} \\ v(x) = x^2+1 \end{array} \right| = \binom{8}{0} \Big(\frac{1}{1+x}\Big)^{(8)} (x^2+1) +$$

$$+\binom{8}{1} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(7)} (x^2+1)' + \binom{8}{2} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(6)} (x^2+1)'' + \cdots = \left| \begin{array}{c} \text{z příkladu 52 c) dostaneme} \\ \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{8!}{(1+x)^9} (x^2+1) + 8 \cdot \frac{(-7!)}{(1+x)^8} \cdot 2x + \frac{8 \cdot 7}{2} \frac{6!}{(1+x)^7} \cdot 2 = \frac{8!}{(1+x)^9} \Big(x^2 + 1 - 2x(1+x) +$$

$$+(1+x)^2\Big) = \frac{8! \cdot 2}{(1+x)^9}, \qquad x \neq -1.$$

■

54. Vypočítejte f' a určete pro jaká x je f' definována, jestliže:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{4-x}}$; **b)** $f(x) = \arcsin 2x$; **c)** $f(x) = \ln(4 - 3x - x^2)$;

d) $f(x) = \sqrt{2\cos x + 1}$; e) $f(x) = x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}$; **f)** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

[**a)** $\dfrac{7-x}{2(4-x)\sqrt{4-x}}$, $x \in (-\infty, 4)$; **b)** $\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$;
c) $\dfrac{2x+3}{x^2+3x-4}$, $x \in (-4, 1)$; **d)** $\dfrac{-\sin x}{\sqrt{2\cos x + 1}}$, $x \in \left(-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\right)$;
e) $2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$; **f)** $\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$, $x \in (-3, 3)$]

55. Vypočítejte derivaci a její definiční obor:

a) $y = \ln\Big(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\Big)$; **b)** $y = 10^x + \mathrm{e}^{\cos x}$; **c)** $y = 5 - \sin \mathrm{e}^{-x} \cos \mathrm{e}^{-x}$;

d) $y = x\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \dfrac{x}{2}$; e) $y = \ln\Big(\mathrm{e}^x + \sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 1}\Big)$; **f)** $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$;

g) $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x^2+1}$; **h)** $y = \Big(\log_4 x\Big)^5$.

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a)}\ \dfrac{1}{\sin x},\ x \neq k\pi; & \textbf{b)}\ 10^x \ln 10 - \sin x\, \mathrm{e}^{\cos x},\ x \in \mathbb{R}; \\ \textbf{c)}\ \mathrm{e}^{-x} \cos 2e^{-x},\ x \in \mathbb{R}; & \textbf{d)}\ \dfrac{6-2x^2}{\sqrt{4-x^2}},\ x \in (-2,2); \\ \text{e)}\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}},\ x \in \mathbb{R}; & \textbf{f)}\ \dfrac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1,1); \\ \textbf{g)}\ \dfrac{1-x^2}{x^4+3x^2+1},\ x \in \mathbb{R}; & \textbf{h)}\ \dfrac{5(\log_4 x)^4}{x \cdot \ln 4},\ x > 0 \end{array}\right]$$

56. Vypočítejte f' a $D(f')$, jestliže $y = f(x)$:

a) $y = \Big(\cos x\Big)^x$; **b)** $y = \Big(x^2+5\Big)^{x+4}$; **c)** $y = \sqrt[2x]{\Big(\sin^2 x + 1\Big)^3}$; **d)** $y = x^{\ln x}$.

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a)}\ (\cos x)^x \left(\ln \cos x - \dfrac{x \sin x}{\cos x}\right),\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right); \\ \textbf{b)}\ (x^2+5)^{x+4} \left(\ln(x^2+5) + \dfrac{2x(x+4)}{x^2+5}\right),\ x \in \mathbb{R}; \\ \textbf{c)}\ \sqrt[2x]{(\sin^2 x+1)^3} \left(-\dfrac{3}{2x^2} \ln(\sin^2 x + 1) + \dfrac{3 \sin x \cos x}{x(\sin^2 x+1)}\right),\ x \neq 0; \\ \textbf{d)}\ 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x,\ x \in (0, +\infty) \end{array}\right]$$

57. Určete body, v nichž neexistuje derivace a zdůvodněte proč, jestliže:

a) $f(x) = |\mathrm{e}^x - 1|$; **b)** $f(x) = |1 - 2\cos x|$.

[**a)** $x = 0,\ f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$; **b)** $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, f'_+(x) = \sqrt{3} \neq f'_-(x) = -\sqrt{3}$]

58. Najděte body, v nichž má funkce f aspoň jednu z derivací $f'_+,\ f'_-$ nevlastní:

a) $f(x) = \arcsin x$; **b)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$.

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a)}\ x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ f'_+(-1) = f'_-(1) = +\infty; \\ \textbf{b)}\ x_1 = 2,\ x_2 = -2,\ f'_+(2) = f'_-(2) = +\infty,\ f'_+(-2) = f'_-(-2) = -\infty \end{array}\right]$$

59. Spočítejte n-tou derivaci $f^{(n)}$ funkce f, určete $D\left(f^{(n)}\right)$, jestliže:

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $n = 10$; **b)** $f(x) = \cos 3x$, $n = 15$;

c) $f(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2+2}\Big)$, $n = 2$; **d)** $f(x) = (x+5)^6$, $n = 5$;

e) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $n = 2$; **f)** $f(x) = (2x - 3x^2)\,\mathrm{e}^{3x}$, $n = 12$;

g) $f(x) = (x^2+1)\ln(x+1)$, $n = 8$.

$$\left[\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ \dfrac{10!}{(1-x)^{11}},\ x \neq 1; & \textbf{b)}\ 3^{15} \sin 3x,\ x \in \mathbb{R}; & \textbf{c)}\ \dfrac{-x}{\sqrt{(x^2+2)^3}},\ x \in \mathbb{R}; \\ \textbf{d)}\ 6!(x+5),\ x \in \mathbb{R}; & \text{e)}\ \dfrac{x(3+2x^2)}{\sqrt{(1+x^2)^3}},\ x \in \mathbb{R}; & \textbf{f)}\ -3^{12}\, \mathrm{e}^{3x} (3x^2 + 22x + 36),\ x \in \mathbb{R}; \\ \textbf{g)}\ \dfrac{-7!(x^2+1)}{(x+1)^8} + \dfrac{16 \cdot 6!\, x}{(x+1)^7} - \dfrac{56 \cdot 5!}{(x+1)^6},\ x \neq -1 & & \end{array}\right]$$

5. Užití derivace funkce v geometrii a ve fyzice

***Příklad* 60**. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = (x+1)\sqrt[3]{3-x}$ v bodech **a)** $A = [-1, ?]$; **b)** $B = [2, ?]$; **c)** $C = [3, 0]$;

Řešení: Z definice derivace víme, že $f'(x_0) = k_t$, kde k_t je směrnice tečny v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Potom rovnice tečny a normály v bodě $[x_0, y_0]$, kde $y_0 = f(x_0)$ jsou

$$t: \ y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$
$$n: \ y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

Spočítejme nejdříve derivaci $y' = f'(x) = \sqrt[3]{3-x} + (x+1)\,\dfrac{-1}{3\,\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

a) $A = [-1, ?]$, $\quad f(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = [-1, 0]$, $\quad f'(-1) = \sqrt[3]{4}$

$$t: \ y = \sqrt[3]{4}\,(x+1), \quad n: \ y = \frac{-1}{\sqrt[3]{4}}\,(x+1);$$

b) $B = [2, ?]$, $\quad f(2) = 3 \quad \Rightarrow \quad B = [2, 3]$, $\quad f'(2) = 1 - \dfrac{3}{3} = 0 \quad \Rightarrow$ tečna je rovnoběžná s osou x,

$$t: \ y = 3, \quad n: \ x = 2;$$

c) $C = [3, 0]$, $\quad f'_+(3) = f'_-(3) = -\infty \quad \Rightarrow$ tečna je rovnoběžná s osou y,

$$t: \ x = 3, \quad n: \ y = 0.$$

■

***Příklad* 61**. Ve kterém bodě křivky $f(x) = x\,\ln x$ je její **a)** tečna rovnoběžná s osou x; **b)** normála rovnoběžná s přímkou $p: 3x - 2y = 7$. Napište rovnice tečny z **a)** a normály z **b)**.

Řešení: $f(x) = x\,\ln x$, $\quad f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$, $x > 0$:

a) $t \parallel$ s osou $x \quad \Longleftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = -1 \Rightarrow \quad \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}},\ y_0 = \frac{-1}{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad t: \ y = \frac{-1}{\mathrm{e}};$$

b) $n \parallel p \quad \Longleftrightarrow \quad k_n = k_p \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{1}{f'(x)} = k_p \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{1}{k_p}$, kde k_p přečteme z rovnice přímky p napsané ve směrnicovém tvaru $y = \dfrac{3}{2}\,x - \dfrac{7}{2}$.

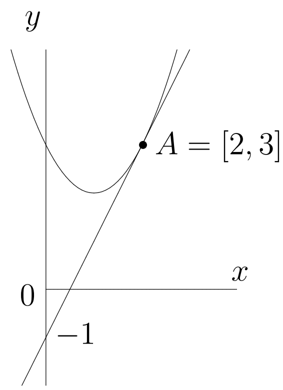
$$k_p = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \ln x + 1 = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \ln x = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x_0 = \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}},$$

$$y_0 = f\left(\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right) = -\frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}, \quad n: \ y + \frac{5}{3}\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}} = \frac{3}{2}\left(x - \mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}\right), \quad y = \frac{3}{2}\,x - \frac{19}{6}\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}.$$

■

***Příklad* 62**. Určete reálné konstanty b a c tak, aby parabola $y = x^2 + b\,x + c$ se dotýkala přímky $y = 2x - 1$ v bodě A, jehož x-ová souřadnice je 2.

Řešení:



Bod A je bodem dané přímky, proto
$y_A = 2x_A - 1 = 4 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad A = [2,3]$.
Vyjdeme z toho, že A je též bodem paraboly.

Po dosazení do rovnice paraboly dostáváme podmínku $3 = 4 + 2b + c$.
Směrnice tečny je 2 a $y' = 2x + b \quad \Rightarrow \quad$ v bodě $A \quad \Rightarrow \quad 2 = 4 + b$.
Z těchto rovnic snadno spočítáme: $\quad b = -2$ a $c = 3$.
Výsledná parabola bude mít vyjádření: $\quad y = x^2 - 2x + 3$.

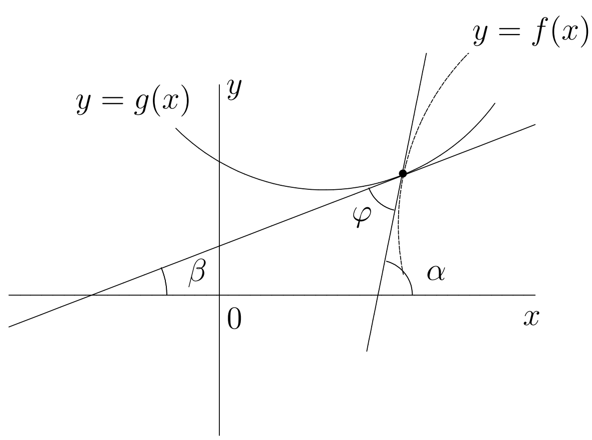
■

***Příklad* 63**. Vypočítejte pod jakým úhlem se protínají grafy následujících funkcí:

a) $f(x) = x^2 + 6x - 12, \quad g(x) = 4x - x^2$;

b) $f(x) = 2\ln x, \quad g(x) = \ln^2 x$.

Řešení: Pod pojmem ***úhel dvou křivek*** *rozumíme úhel* $\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$*, který svírají tečny ve společném bodě.*



Prvním krokem bude nalezení společných bodů obou grafů.
Druhým krokem bude nalezení hledaného úhlu $\quad \varphi = \alpha - \beta$.

a) **1)** $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x - 12 = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 2x - 12 = 0 \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+3)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3,\ x_2 = 2,$
$A = [-3, -21],\ B = [2, 4]$.

2) $\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}(\alpha - \beta)| = \left| \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \right|$, kde $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0),\ \operatorname{tg}\beta = g'(x_0)$.

	A	B
$f'(x) = 2x + 6$	0	10
$g'(x) = 4 - 2x$	10	0

V bodě A dostaneme $\operatorname{tg}\varphi_1 = \left| \dfrac{0 - 10}{1} \right| = 10$
a totéž obdržíme i v bodě B:
$\operatorname{tg}\varphi_2 = \left| \dfrac{10 - 0}{1} \right| = 10$.

Grafy se protínají v obou průsečících A a B pod úhlem $\quad \varphi = \operatorname{arctg} 10$.

b) **1)** $f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad 2\ln x = \ln^2 x \quad \Rightarrow \quad \ln x\,(\ln x - 2) = 0 \quad \Rightarrow$

$$\left\langle \begin{array}{lllll} \ln x = 0 & \Rightarrow & x_1 = 1 & \Rightarrow & A = [1, 0], \\ \ln x = 2 & \Rightarrow & x_2 = \mathrm{e}^2 & \Rightarrow & B = [\mathrm{e}^2, 4] \end{array} \right. .$$

2)

	A	B
$f'(x) = \dfrac{2}{x}$	2	$\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$
$g'(x) = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x}$	0	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$

V bodě A: $\operatorname{tg}\varphi_1 = \left|\dfrac{2-0}{1}\right| = 2 \quad \Rightarrow$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} 2.$$

V bodě B: $\operatorname{tg}\varphi_2 = \left|\dfrac{\dfrac{2}{\mathrm{e}^2} - \dfrac{4}{\mathrm{e}^2}}{1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^2}\cdot\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}}\right| = \dfrac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^4 + 8} \quad \Rightarrow$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{2\,\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^4 + 8}.$$

■

***Příklad* 64**. Hmotný bod se pohybuje po přímce. Závislost jeho dráhy (měřené v metrech) na čase (v sekundách) je popsána funkcí $s(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$;
Určete: **a)** okamžitou rychlost a okamžité zrychlení v čase $t = 0$;
b) časy, v nichž se mění orientace pohybu.

Řešení: Rychlost v pohybu v časovém okamžiku t_0 je definována jako derivace funkce dráhy s podle času t v bodě $t = t_0$. Stručně

$$s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{ds}{dt} = t^2 - 4t + 3.$$

Podobně zrychlení $\quad a(t) = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = 2t - 4.$

a) Okamžitá rychlost v čase $t = 0$ je $v(0) = 3\,[\mathrm{m/s}]$ a okamžité zrychlení je $a(0) = -4\,[\mathrm{m/s^2}]$.

b) Časy, v nichž se mění orientace pohybu budou časy, v nichž rychlost mění zanménko:

$v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-1)(t-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 1[\mathrm{s}]$ a $t_2 = 3[\mathrm{s}]$.

Dopočítejme dráhu a zrychlení v těchto časech:

$$s(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}\,[\mathrm{m}],\ a(1) = 2 - 4 = -2\,[\mathrm{m/s^2}],$$
$$s(3) = 9 - 18 + 9 = 0\,[\mathrm{m}],\ a(3) = 6 - 4 = 2\,[\mathrm{m/s^2}].$$

■

***Příklad* 65**. O nějakém přímočarém pohybu je známo, že jeho rychlost je kvadratickou funkcí času. Stanovte tuto funkci, víte-li, že koncem 6-té sekundy byla rychlost čyřnásobkem rychlosti počáteční, a že v čase $t_1 = 2$ [s] bylo zrychlení pohybu $a_1 = 1\,[\mathrm{m/s^2}]$ a v čase $t_2 = 4\,[\mathrm{s}]$ bylo zrychlení $a_2 = 9\,[\mathrm{m/s^2}]$.

Řešení: Rychlost v zapíšeme pomocí obecné kvadratické funkce času t :

$v(t) = k_2 t^2 + k_1 t + k_0$, kde konstanty $k_0,\ k_1,\ k_2 \in \mathbb{R}$,

$v(6) = 4\,v(0) \quad \Rightarrow \quad 36k_2 + 6k_1 + k_0 = 4k_0,$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2k_2 t + k_1 \quad \left\langle \begin{array}{lll} a(2) = 1 & \Rightarrow & 4k_2 + k_1 = 1, \\ a(4) = 9 & \Rightarrow & 8k_2 + k_1 = 9. \end{array} \right.$$

Tím jsme dostali lineární soustavu pro konstanty k_0, k_1, k_2:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4k_2 & + & k_1 & & & = & 1 \\ 8k_2 & + & k_1 & & & = & 9 \\ 36k_2 & + & 6k_1 & - & 3k_0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

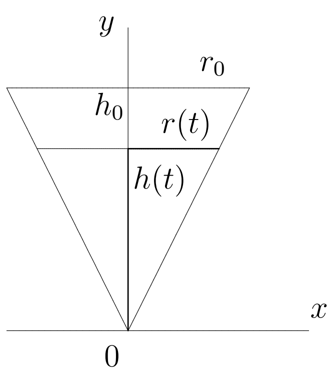
Po odečtení prvních dvou rovnic dostaneme: $4k_2 = 8 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 2$. Potom $k_1 = 1 - 4k_2 = -7$ a nakonec $k_0 = 12k_2 + 2k_1 = 24 - 14 = 10$.

Hledaná rychlost jako funkce času je $v(t) = 2t^2 - 7t + 10$.

■

***Příklad* 66.** Do nádrže tvaru rotačního kuželе o poloměru podstavy $r_0 = 2\,[\mathrm{m}]$ a výšce $h_0 = 3\,[\mathrm{m}]$ přitéká konstantní tok (objemový) $w = 0.004\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$ kapalina. Určete jakou okamžitou rychlostí se zvyšuje hladina kapaliny v nádrži v čase $t = 8\,[\mathrm{s}]$ (čas je měřen od okamžiku, kdy kapalina začala do prázdné nádrže přitékat).

Řešení:



Nejdříve najdeme funkci h, která vyjadřuje závislost výšky hladiny kapaliny v nádrži na čase t; Za t sekund nateče $(wt)\,[\mathrm{m}^3]$ kapaliny. Právě takový objem $V(t)$ má tedy část kužele $w\,t = V(t) = \dfrac{1}{3}\,\pi\,r^2(t)\cdot h(t)$.

Poloměr $r(t)$ vyjádříme z poměru $\dfrac{r(t)}{r_0} = \dfrac{h(t)}{h_0} \quad \Rightarrow \quad r(t) = \dfrac{r_0}{h_0}\cdot h(t)$

a dosadíme do objemu $w\,t = \dfrac{1}{3}\,\pi\left(\dfrac{r_0}{h_0}\cdot h(t)\right)^2\cdot h(t) \quad \Rightarrow \quad h^3(t) = \dfrac{3wth_0^2}{\pi r_0^2} \quad \Rightarrow$

$$h(t) = \sqrt[3]{\frac{3w\,h_0^2}{\pi r_0^2}}\cdot\sqrt[3]{t}.$$

Funkce popisující okamžitou rychlost změny výšky hladiny kapaliny v nádrži je dána derivací $h'(t) = \sqrt[3]{\dfrac{3w\,h_0^2}{\pi r_0^2}}\cdot\dfrac{1}{3}\,t^{-\frac{2}{3}}$.

Nyní dosadíme dané hodnoty $w = 0.004,\ h_0 = 3,\ r_0 = 2$

$$h'(t) = \sqrt[3]{\frac{3\cdot 0.004\cdot 9}{4\,\pi}}\cdot\frac{1}{3}\,t^{-\frac{2}{3}} = \frac{3\cdot 0.1}{\sqrt[3]{\pi}}\cdot\frac{1}{3}\,t^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{10\sqrt[3]{\pi}}\,t^{-\frac{2}{3}},$$

a pak dopočítáme okamžitou rychlost v čase $t = 8\,[\mathrm{s}]$:

$$h'(8) = \frac{1}{10\sqrt[3]{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{40\,\sqrt[3]{\pi}} \doteq 0.017\,[\mathrm{m/s}].$$

■

***Příklad* 67**. Poloha tělesa vrženého z počátku ve vakuu šikmo vzhůru pod úhlem φ rychlostí v_0 je dána souřadnicemi $\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t\, \cos\varphi \\ y(t) = v_0 \cdot t\, \sin\varphi - \dfrac{1}{2}\, g\, t^2 \end{cases}$, kde t je čas a $g \doteq 10\,[\mathrm{m/s^2}]$ gravitační zrychlení. Stanovte:

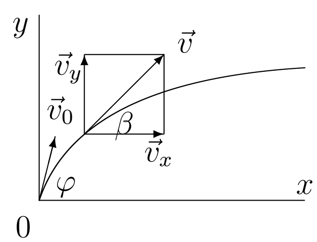
a) složky, směr a velikost rychlosti pohybu,

b) jaké budou souřadnice nejvyššího bodu A tohoto pohybu,

c) dopočítejte polohu bodu A, jestliže $\varphi = \dfrac{\pi}{4}, v_0 = 4\,[\mathrm{m/s}]$.

Řešení:

a) Složky rychlosti získáme jako derivace složek dráhy podle času



$$v_x(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = v_0\, \cos\varphi$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} = v_0\, \sin\varphi - g\, t;$$

Směr celkové rychlosti udaný úhlem β spočítáme jako

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\, \sin\varphi - g\, t}{v_0\, \cos\varphi} = \left| \begin{array}{l} \text{z } x = v_0\, t\, \cos\varphi \text{ vyjádříme } t = \dfrac{x}{v_0\, \cos\varphi} \\ \text{a po dosazení dostaneme } \beta \text{ jako funkci } x\text{-ové souřadnice} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{v_0\, \sin\varphi - g \cdot \dfrac{x}{v_0\, \cos\varphi}}{v_0\, \cos\varphi} = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{g}{v_0^2\, \cos^2\varphi} \cdot x.$$

Velikost rychlosti určíme ze složek v_x a v_y

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2\, \cos^2\varphi + v_0^2\, \sin^2\varphi - 2v_0\, \sin\varphi \cdot gt + g^2t^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0\, g\, \sin\varphi \cdot t + g^2t^2} = \sqrt{v_0^2 - 2g\big(v_0\, t\, \sin\varphi - \tfrac{1}{2}gt^2\big)} = \sqrt{v_0^2 - 2\, g\, y}.$$

b) Bod bude v nejvyšší poloze právě tehdy, když $v_y(t) = 0$, tzn. tečna bude rovnoběžná s osou x. Z této podmínky spočítáme odpovídající t_1 a pak i souřadnice bodu A tj. $x(t_1)$ a $y(t_1)$:

$$v_0\, \sin\varphi - g\, t = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v_0}{g}\, \sin\varphi \quad \Rightarrow$$

$$x(t_1) = v_0 \cdot \frac{v_0\, \sin\varphi}{g}\, \cos\varphi = \frac{v_0^2}{g}\, \sin\varphi\, \cos\varphi,$$

$$y(t_1) = v_0 \cdot \frac{v_0\, \sin\varphi}{g}\, \sin\varphi - \frac{1}{2}\, g \left(\frac{v_0\, \sin\varphi}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g}\, \sin^2\varphi - \frac{1}{2}\, \frac{v_0^2\, \sin^2\varphi}{g} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{v_0^2}{g}\, \sin^2\varphi.$$

c) Bod $A = [x_A, y_A]$ obdržíme z vyjádření $x(t_1)$ a $y(t_1)$, do kterých dosadíme

$$\varphi = \frac{\pi}{4},\ v_0 = 4\,[\mathrm{m/s}],\ g \doteq 10\,[\mathrm{m/s^2}]: \quad x_A = \frac{16}{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{10} = 0.8\,[\mathrm{m}],$$

$$y_A = \frac{1}{2}\, \frac{16}{10} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{4}{10} = 0.4\,[\mathrm{m}].$$

■

***Příklad* 68**. Hmotný bod se pohybuje po přímce. Závislost jeho dráhy s na čase t je dána rovnicí $s(t) = A\,\mathrm{e}^{-kt}(1+kt)$, kde $A,\ k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jsou dané konstanty. Ukažte, že pro okamžitou rychlost v a pro okamžité zrychlení a v libovolném čase platí vztah $a + 2kv + k^2 s = 0$.

Řešení: Použijeme, že $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$ a $a(t) = \dfrac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}(t)$.

Potom se daný vztah může zapsat jako diferenciální rovnice

$$(*)\qquad \ddot{s}(t) + 2\,k\,\dot{s}(t) + k^2\,s(t) = 0.$$

Nyní spočítáme $\dot{s}(t)$ a $\ddot{s}(t)$, které dosadíme do (*):

$$s(t) = A\,\mathrm{e}^{-kt}(1+kt) \quad , \quad \dot{s}(t) = -A\,k\,\mathrm{e}^{-kt}(1+kt) + k\,A\,\mathrm{e}^{-kt} = -A\,k^2\,t\,\mathrm{e}^{-kt},$$

$$\ddot{s}(t) = -A\,k^2\,\mathrm{e}^{-kt} + A\,k^3\,t\,\mathrm{e}^{-kt},$$

$$-A\,k^2\,\mathrm{e}^{-kt} + A\,k^3\,t\,\mathrm{e}^{-kt} + 2k(-A\,k^2\,t\,\mathrm{e}^{-kt}) + k^2\,A\,\mathrm{e}^{-kt}(1+kt) =$$

$$= -A\,k^2\,\mathrm{e}^{-kt} + A\,k^3\,t\,\mathrm{e}^{-kt} - 2A\,k^3\,t\,\mathrm{e}^{-kt} + A\,k^2\,\mathrm{e}^{-kt} + A\,k^3\,t\,\mathrm{e}^{-kt} = 0.$$

Tím jsme dokázali, že funkce $s(t) = A\,\mathrm{e}^{-kt}(1+kt)$ splňuje vztah $a + 2kv + k^2 s = 0$.

Poznámka: Funkce $s(t)$ je řešením diferenciální rovnice $\ddot{s} + 2k\dot{s} + k^2 s = 0$.

■

69. Najděte rovnice tečen a normál křivky k sestrojených v jejich průsečících s přímkou p, jestliže $k:\ y = x^2 + 3x + 1$ a $p:\ x - y + 4 = 0$.

$\left[\begin{array}{ll} t_1:\ 3x + y + 8 = 0, & n_1:\ x - 3y + 6 = 0; \\ t_2:\ 5x - y = 0, & n_2:\ x + 5y - 26 = 0 \end{array}\right]$

70. Určete odchylku φ tečen křivky $y = \dfrac{2x-2}{3x-1}$ sestrojených v bodech $A[0,?]$ a $B = [?,0]$.

$\left[\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right]$

71. Určete velikost úhlu, v němž graf funkce $y = f(x)$ protíná osu y, jestliže **a)** $f(x) = \mathrm{e}^x$; **b)** $f(x) = x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + 1$.

$\left[\textbf{a)}\ \frac{\pi}{4};\ \textbf{b)}\ \frac{\pi}{3}\right]$

72. Určete $b,\ c \in \mathbb{R}$ tak, aby se parabola $y = x^2 + bx + c$ dotýkala přímky $7x - y - 11 = 0$ v bodě $T = [3,?]$.

$[b = 1,\ c = -2]$

73. Najděte bod paraboly $y = x^2 - 4x - 6$, v němž tečna je **a)** rovnoběžná s osou x **b)** rovnoběžná s osou 2.kvadrantu. Napište rovnice tečny a normály v těchto bodech.

$\left[\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ [2,-10], & t:\ y = -10, & n:\ x = 2; \\ \textbf{b)}\ \left[\frac{3}{2}, -\frac{39}{4}\right], & t:\ 4x + 4y + 33 = 0, & n:\ 4x - 4y - 45 = 0 \end{array}\right]$

74. Hmotný bod se pohybuje přímočaře tak, že jeho vzdálenost od výchozího bodu O je kvadratickou funkcí času. Vyjádřete tento pohyb, víte-li, že v čase $t = 0$ [s] se začal bod pohybovat z bodu O s počáteční rychlostí $v_0 = 2$ [m/s] a v čase $t_1 = 10$ [s] byla jeho rychlost $v_1 = 62$ [m/s]. Určete vzdálenost bodu od počáteční polohy v čase $t = 6$ [s].

$[s(t) = 3t^2 + 2t,\ s(6) = 120\,[\mathrm{m}]]$

75. Teplota T určitého tělesa v čase t je vyjádřena vzorcem $T(t) = T_0\,\mathrm{e}^{-kt}$, kde $T_0 = 100\,[^\circ\,\mathrm{C}]$ je počáteční teplota a v čase $t_1 = 2$ [min] je $T(2) = 50\,[^\circ\,\mathrm{C}]$. Určete rychlost ochlazování tělesa v čase $t = 2$ [min].

$\left[T(t) = 100\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}\cdot t},\ T'(2) = -25\,\ln 2\right]$

76. Dokažte, že funkce $f(x) = x^2 \sin x$ splňuje diferenciální rovnici $f''(x) + f(x) = 2\sin x + 4x\cos x$, pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

6. Diferenciál funkce

***Příklad* 77**. Nechť $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 8$ a $x_0 = 3$. Určete:
a) diferenciál $\mathrm{d}f$ v libovolném bodě; **b)** $\mathrm{d}f(x_0)$ - diferenciál v bodě x_0;
c) přírůstek $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ a diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ odpovídající přírůstku nezávislé proměnné Δx, kde: **1)** $\Delta x = 1$; **2)** $\Delta x = 0.1$; **3)** $\Delta x = 0.01$.

Řešení: Daná funkce f je diferencovatelná pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a proto existuje diferenciál $\mathrm{d}f$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

a) $\mathrm{d}f = f'(x)\,dx = (3x^2 - 8x + 1)\,dx$;

b) $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\,dx = f'(3)\,dx = (27 - 24 + 1)\,dx = 4\,dx$;

c) $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(3 + \Delta x) - f(3)$,

1) $\Delta x = 1 \Rightarrow \Delta f(3) = f(4)-f(3) = (64-64+4+8)-(27-36+3+8) = 12-2 = 10$,
$\mathrm{d}f(3) = 4 \cdot dx = 4 \cdot 1 = 4$, kde $dx = \Delta x = 1$;

2) $\Delta x = 0.1 \Rightarrow \Delta f(3) = f(3.1) - f(3) = 2.451 - 2 = 0.451$,
$\mathrm{d}f(3) = 4 \cdot dx = 4 \cdot 0.1 = 0.4$;

3) $\Delta x = 0.01 \Rightarrow \Delta f(3) = f(3.01) - f(3) = 2.040501 - 2 = 0.040501$,
$\mathrm{d}f(3) = 4 \cdot dx = 4 \cdot 0.01 = 0.04$.

■

POZNÁMKA: Vidíme, že čím menší (v absolutní hodnotě) je přírůstek Δx nezávislé proměnné, tím méně se liší přibližný přírůstek vypočítaný diferenciálem od skutečného přírůstku funkce. Proto pro "malé" Δx často používáme přibližný vzorec:

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \doteq f'(x_0) \cdot \Delta x = \mathrm{d}f(x_0)},$$

který platí s uspokojivou přesností.

***Příklad* 78**. Užitím diferenciálu vypočítejte přibližně:

$$\textbf{a)}\quad \sqrt[5]{\mathrm{e}};\qquad \textbf{b)}\quad \sqrt[3]{\frac{2.97^2 - 1}{2.97^2 - 8}};\qquad \textbf{c)}\quad \operatorname{arctg} 1.02.$$

Řešení: K přibližnému výpočtu použijeme vzorec

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0).}$$

V jednotlivých příkladech budeme postupovat následovně:
1) sestavíme funkci $f(x)$,
2) zvolíme "šikovný" bod x_0 blízko daného čísla x a určíme $\Delta x = x - x_0$,
3) spočítáme $f(x_0)$, $f'(x_0)$ a dopočítáme žádanou hodnotu $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$.

a) $\sqrt[5]{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$,

$x_0 = 0$, $\Delta x = \dfrac{1}{5} - 0 = \dfrac{1}{5} = 0.2$, $f(x_0) = \mathrm{e}^0 = 1$, $f'(x_0) = \mathrm{e}^0 = 1$,

$\sqrt[5]{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{5}} \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 1 + 1 \cdot 0.2 = 1.2$.

Chybu výsledku zatím neumíme odhadnout.

b) $\sqrt[3]{\dfrac{2.97^2-1}{2.97^2-8}} \quad\Rightarrow\quad f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x^2-8}} \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2-8}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2x\,(x^2-8)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-8)^2}=\frac{1}{3}\left(\frac{x^2-1}{x^2-8}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{(-14x)}{(x^2-8)^2},$$

$$x_0=3,\ \Delta x=2.97-3=-0.03,\ f(3)=\sqrt[3]{\frac{9-1}{9-8}}=2,\ f'(3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{-42}{1}=-\frac{7}{2},$$

$$\sqrt[3]{\frac{2.97^2-1}{2.97^2-8}}\doteq f(3)+f'(3)\cdot\Delta x=2-\frac{7}{2}\cdot(-0.03)=2+0.105=2.105;$$

c) $\operatorname{arctg} 1.02 \quad\Rightarrow\quad f(x)=\operatorname{arctg} x \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2},$

$$x_0=1,\ \Delta x=1.02-1=0.02,\ f(x_0)=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4},\ f'(x_0)=\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{arctg} 1.02\doteq f(1)+f'(1)\cdot\Delta x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot 0.02=0.785+0.01=0.795.$$

■

79. Vypočítejte $\mathrm{d}f$ a $\mathrm{d}f(x_0)$, jestliže

a) $f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x},\quad x_0=2;$ **b)** $f(x)=\dfrac{1}{(\operatorname{tg} x+1)^2},\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a)}\ \mathrm{d}f=\dfrac{-dx}{x\sqrt{x^2-1}}, & \mathrm{d}f(2)=-\dfrac{dx}{2\sqrt{3}}; \\ \textbf{b)}\ \mathrm{d}f=\dfrac{-2dx}{(\operatorname{tg} x+1)^3\cos^2 x}, & \mathrm{d}f(\pi/4)=-\dfrac{dx}{2} \end{array}\right]$$

80. Vypočítejte přírůstek $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ a diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ a navzájem je porovnejte, jestliže

a) $f(x)=x^2-x,\quad x_0=5,\quad \Delta x=-0.2$ resp. $\Delta x=0.02;$

b) $f(x)=\sqrt{x},\quad x_0=9,\quad \Delta x=0.3$ resp. $\Delta x=-0.03.$

$$\left[\begin{array}{llll} \textbf{a)} & \Delta x=-0.2: & \Delta f(5)=-1.76, & \mathrm{d}f(5)=-1.8, \\ & \Delta x=0.02: & \Delta f(5)=0.1804, & \mathrm{d}f(5)=0.18; \\ \textbf{b)} & \Delta x=0.3: & \Delta f(9)=0.049, & \mathrm{d}f(5)=0.05, \\ & \Delta x=-0.03: & \Delta f(9)=-0.005004, & \mathrm{d}f(5)=-0.005 \end{array}\right]$$

81. Užitím diferenciálu vypočítejte přibližně:

a) 1.03^4; **b)** $\sqrt[10]{1000}$; **c)** $\arccos 0.2$.

[**a)** 1.12; **b)** 1.99531; **c)** 1.37]

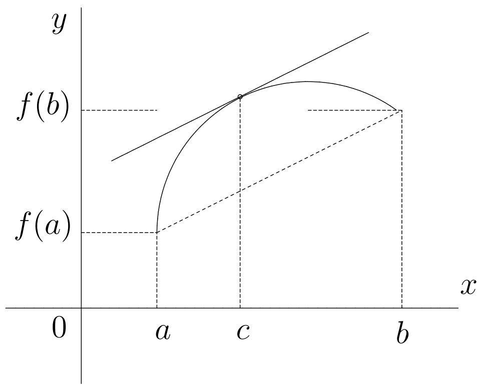
7*. Lagrangeova věta o střední hodnotě a věta Rolleova

***Příklad* 82**. Užitím Lagrangeovy věty o střední hodnotě dokažte, že platí:

a) $|\sin b - \sin a| \le |b-a|$ pro všechna $a,\ b \in \mathbb{R}$;

b) $\dfrac{b-a}{b} < \ln\dfrac{b}{a} < \dfrac{b-a}{a}$ pro $0 < a < b$; $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Řešení: **Lagrangeova věta o střední hodnotě**: *Je-li f funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, a má-li derivaci v intervalu (a,b), pak existuje alespoň jedno $c \in (a,b)$ takové, že*



$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Geometrická interpretace:

tečna v bodě $[c, f(c)]$ je rovnoběžná se sečnou spojující body $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$.

a) Budeme vyšetřovat funkci $f(x) = \sin x$, která je spojitá všude v $\mathbb{R}$ a má derivaci všude v $\mathbb{R}$. Zvolme interval $\langle a, b\rangle$, $a < b$; $a,\ b \in \mathbb{R}$. Podle citované věty existuje číslo $c \in (a,b)$ takové, že

$$\frac{\sin b - \sin a}{b-a} = \cos c \quad \Rightarrow \quad \frac{|\sin b - \sin a|}{|b-a|} = |\cos c| \le 1 \quad \Rightarrow \quad |\sin b - \sin a| \le |b-a|.$$

b) Uvažovaná funkce bude $f(x) = \ln x$, $x \in \langle a, b\rangle$, $0 < a < b$, která je spojitá pro všechna $x > 0$ a má derivaci $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ pro $x > 0$. Proto existuje $c \in (a,b)$ tak, že

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}, \quad 0 < a < c < b,\ \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}.$$

Nerovnici vynásobíme číslem $b - a > 0$ a současně použijeme vztah

$$\ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$ Tím jsme získali žádanou nerovnost.

■

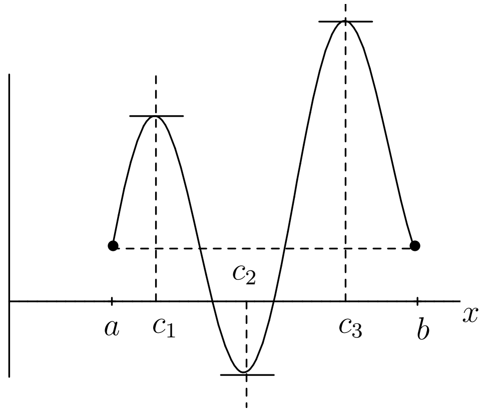
***Příklad* 83**.* Rozhodněte, zda funkce f splňuje na intervalu $\langle a, b\rangle$ předpoklady Rolleovy věty. Pokud ano, najděte příslušné $c \in (a,b)$, jestliže:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$, $a = -1,\ b = 3$;

b) $f(x) = 5 - \sqrt[3]{x^2}$, $a = -1,\ b = 1$;

c) $f(x) = |\sin x|$, $a = \pi,\ b = 2\pi$.

Řešení: **Rolleova věta** je věta o střední hodnotě *s jedním předpokladem navíc, a sice, že $f(a) = f(b)$. Potom existuje aspoň jedno $c \in (a,b)$ takové, že $f'(c) = 0$.*



Geometricky to znamená, že v bodě $[c, f(c)]$ je tečna rovnoběžná s osou x.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$ je spojitá v $\langle -1, 3\rangle$, $\quad f'(x) = 2x - 2$ existuje v $(-1, 3)$ a $f(-1) = -5 = f(3)$. Předpoklady věty Rolleovy jsou splněny, proto existuje $c \in (-1, 3)$ tak, že $f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1$.

b) $f(x) = 5 - 2\sqrt[3]{x^2}$ je spojitá v $\langle -1, 1\rangle$, $\quad f'(x) = -2 \cdot \dfrac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{-4}{3\sqrt[3]{x}}$ neexistuje v bodě $0 \in (-1, 1)$, a proto nelze použít Rolleovu větu.
Poznamenejme, že $f(-1) = f(1) = 3$.

c) $f(x) = |\sin x| = -\sin x$, pro $x \in \langle \pi, 2\pi\rangle$, $\quad f'(x) = -\cos x$.
Funkce $f(x)$ je spojitá v $\langle \pi, 2\pi\rangle$, $\quad f'(x)$ existuje v $(\pi, 2\pi)$ a $f(\pi) = f(2\pi) = 0$.
Všechny předpoklady věty Rolleovy jsou splněny a proto existuje $c \in (\pi, 2\pi)$ tak, že

$$f'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3\pi}{2}.$$

■

84. Pomocí Lagrangeovy věty o střední hodnotě
a) dokažte nerovnost $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leq |a - b|, \quad a, b \in \mathbb{R}$;
b) najděte bod $C = [c, ?]$ na křivce $y = x^3$, v němž je tečna rovnoběžná se sečnou spojující body $A = [-1, -1]$ a $B = [2, 8]$.

[**b**) $C = [1, 1]$]

85.* Rozhodněte, zda funkce f splňuje předpoklady Rolleovy věty na intervalu $\langle a, b\rangle$ a v kladném případě určete $c \in (a, b)$:
a) $f(x) = |x - 1|,\ a = -2,\ b = 4$; **b)** $f(x) = \operatorname{tg} x,\ a = -\dfrac{\pi}{2},\ b = \dfrac{\pi}{2}$;
c) $f(x) = x^2 + 5x + 3,\ a = -2,\ b = 1$; **d)** $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2,\ a = -2,\ b = 2$.

[**a)** ne, f' neexistuje na (-2,4);
b) ne, f není spojitá na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$;
c) ne, $f(-2) \neq f(1)$;
d) ano, $c = 0$]

8. L'Hospitalovo pravidlo

Nechť limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ *a* $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, $c \in \mathbb{R}^*$ *existují a jsou buď obě nulové nebo obě nekonečné. Potom platí* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, *jestliže limita vpravo existuje.*

Stejné tvrzení platí i pro limity zleva nebo zprava. L'Hospitalovo pravidlo lze použít při výpočtu limit neurčitých výrazů typu $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$. V ostatních případech ($0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$) provádíme vhodné úpravy.

$$\underline{0\cdot\infty} : \lim_{x\to c} f(x)\cdot g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{0}{0} \\[2ex] \lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty} \end{cases}$$

$$\underline{\infty-\infty} : \lim_{x\to c} \Big(f(x) - g(x)\Big) = \lim_{x\to c} f(x)\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right),$$

kde nejdříve spočítáme $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$, $f(x)>0$ některý z typů $1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$, pak za použití přepisu

$$\underline{\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}} = \lim_{x\to c} \mathrm{e}^{\ln\left(f(x)^{g(x)}\right)} = \underline{\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to c} g(x)\cdot\ln f(x)}} = \mathrm{e}^L \text{ dostáváme}$$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)}$	1^∞	∞^0	0^0
L=$\lim\limits_{x\to c} g(x)\cdot\ln f(x)$	$\infty\cdot 0$	$0\cdot\infty$	$0\cdot\infty$

***Příklad* 86**. Spočítejte následující limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$;

d) $\lim\limits_{x\to a} (a^2-x^2)\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$; e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$; **f)** $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Řešení:

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \left|\tfrac{0}{0}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3};$$

b) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0;$

c) $\displaystyle \lim_{x\to 0} x^2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = |\infty\cdot 0| = \left\langle \begin{array}{lll} \mathbf{1)} & \left|\frac{0}{0}\right| & \Rightarrow \\ \mathbf{2)} & \left|\frac{\infty}{\infty}\right| & \Rightarrow \end{array}\right.$

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(\dfrac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}};$

tento přepis nevede k cíli, proto použijeme další možnost ;

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x^2}} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\dfrac{2}{x^3}\right)}{-\dfrac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = +\infty;$

d) $\displaystyle \lim_{x\to a} (a^2 - x^2)\cdot \operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a} = |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to a} \frac{a^2-x^2}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}}} = \left| \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha \right| = \lim_{x\to a} \frac{a^2-x^2}{\operatorname{cotg}\dfrac{\pi x}{2a}} =$

$\displaystyle = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to a} \frac{-2x}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2a}} \cdot \dfrac{\pi}{2a}} = \frac{-2a}{-1\cdot\dfrac{\pi}{2a}} = \frac{4a^2}{\pi};$

e) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{-2}{1+x^2}}{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{1+x^2}}{\dfrac{1}{x^2+x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x^2+x)}{1+x^2} = 2;$

f) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = |\infty - \infty| = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}} =$

$\displaystyle = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x} - 1}{\ln x + 1 - \dfrac{1}{x}} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}.$

■

***Příklad* 87**. Spočítejte

a) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\mathrm{e}^x + x\right)^{\frac{1}{x}};$ **b)** $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi};$ **c)** $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \left(\sin x\right)^{\frac{2}{\ln x}};$

d) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{x^2}.$

Řešení:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+x\right)^{\frac{1}{x}} = \left|1^\infty\right| = \lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\mathrm{e}^x+x\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{L}}$, kde

$$\mathrm{L}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\mathrm{e}^x+x\right) = |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\mathrm{e}^x+x\right)}{x} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+x}\cdot\left(\mathrm{e}^x+1\right)}{1} =$$

$$= 2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{L}} = \mathrm{e}^2;$$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi} = |\infty^0| = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\mathrm{e}^{(2x-\pi)\,\ln\operatorname{tg}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{L}}$, kde

$$\mathrm{L}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\cdot\ln\operatorname{tg}x = |0\cdot\infty| = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\dfrac{1}{2x-\pi}} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{-\dfrac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot 2} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{-2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{(2x-\pi)^2}{-\sin 2x} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2(2x-\pi)\cdot 2}{-\cos 2x\cdot 2} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{L}} = \mathrm{e}^0 = 1;$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sin x\right)^{\frac{2}{\ln x}} = |0^0| = \lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{2}{\ln x}\cdot\ln\sin x} = \mathrm{e}^{\mathrm{L}}$, kde

$$\mathrm{L}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln\sin x}{\ln x} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{2}{\sin x}\cdot\cos x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}2\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{L}} = \mathrm{e}^2;$$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x^2} = |1^\infty| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x\right]^x = \left|\begin{array}{c}\text{použijeme}\\ \text{příkladu } \mathbf{8d)}\end{array}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^2\right)^x = +\infty.$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít též přepisem

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2\cdot\ln\frac{x+2}{x}} = \mathrm{e}^{\mathrm{L}}, \text{ kde}$$

$$\mathrm{L}=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\ln\frac{x+2}{x} = |\infty\cdot 0| = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+2)-\ln x}{\dfrac{1}{x^2}} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x^3}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}\right)\right] = |\infty\cdot 0| = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2}\cdot\frac{x-x-2}{(x+2)x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x(x+2)} = +\infty$$

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{L}} = +\infty.$$

■

***Příklad* 88**. Určete rovnice asymptot daných funkcí $y=f(x)$:

a) $y = xe^{\frac{2}{x}}+1$; **b)** $y = 3x-\operatorname{arctg}x$; **c)** $y = \dfrac{2x^3}{x-4}$;

d) $y = x\,\ln(x-\mathrm{e})$.

*Řešení: Přímka $y = kx + q$ je **šikmou asymptotou** pro $x \to +\infty$ grafu funkce f právě tehdy, když současně*

$$\boxed{k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx), \quad k,\ q \in \mathbb{R}.}$$

Jestliže některá z těchto limit neexistuje nebo je nekonečná, pak asymptota funkce f pro $x \to +\infty$ neexistuje. Totéž platí pro $x \to -\infty$.

*Přímka $x = c$ je **svislou asymptotou** grafu funkce f, jestliže f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou nekonečnou limitu.*

a) 1) Hledáme šikmé asymptoty $y = kx + q$:

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{xe^{\frac{2}{x}}+1}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{x}\right) = \mathrm{e}^0 + 0 = \boxed{1},$$

$$q = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \big(xe^{\frac{2}{x}} + 1 - \boxed{1}\cdot x\big) = 1 + \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x\left(\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} - 1\right) =$$

$$|\infty\cdot 0| = 1 + \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \left|\tfrac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=} 1 + \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 1 + \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} 2e^{\frac{2}{x}} = 1 + 2e^0 = 3.$$

Šikmá asymptota pro $x \to +\infty$ a pro $x \to -\infty$ je přímka $y = x + 3$.

2) Hledáme svislé asymptoty $x = c$.

Funkce f je spojitá pro $x \in (-\infty, 0)$ a pro $x \in (0, +\infty)$. Svislou asymptotou může být jedině přímka $x = 0$.

Vypočítáme jednostranné limity:

$$\lim_{x\to0^+} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1\right) = 1 + \lim_{x\to0^+} xe^{\frac{2}{x}} = |0\cdot\infty| = 1 + \lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} 1 + \lim_{x\to0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 1 + \lim_{x\to0^+} 2\cdot\mathrm{e}^{\frac{2}{x}} = 1 + 2\cdot\mathrm{e}^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0^-} \left(xe^{\frac{2}{x}} + 1\right) = 0\cdot\mathrm{e}^{-\infty} + 1 = 0\cdot 0 + 1 = +1 \neq \pm\infty.$$

Přímka $x = 0$ je svislou asymptotou jen pro $x \to 0^+$. Přesněji

$x = 0: \quad x \to 0^+,\ y \to +\infty;$
$\qquad\qquad x \to 0^-,\ y \to 1.$

b) 1) $y = kx + q, \qquad f(x) = 3x - \operatorname{arctg} x,$

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \frac{3x - \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} \left(3 - \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 3 - 0 = 3,$$

$$q = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (3x - \operatorname{arctg} x - 3x) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (-\operatorname{arctg} x) =$$

$$q = \left\langle \begin{array}{ll} \lim\limits_{x\to+\infty} (-\operatorname{arctg} x) = & -\dfrac{\pi}{2}, \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-\operatorname{arctg} x) = & \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Dostali jsme dvě rovnoběžné asymptoty: $y = 3x - \dfrac{\pi}{2}$ pro $x \to +\infty$,

$y = 3x + \dfrac{\pi}{2}$ pro $x \to -\infty$.

2) Svislá asymptota neexistuje, protože pro všechna konečná čísla c jsou limity $\lim\limits_{x\to c^+} (3x - \operatorname{arctg} x) \neq \pm\infty \neq \lim\limits_{x\to c^-} (3x - \operatorname{arctg} x)$.

c) 1) $y = kx + q, \quad f(x) = \dfrac{2x^3}{x-4}$,

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{2x^3}{x(x-4)} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \text{šikmá asymptota neexistuje.}$$

2) Svislou asymptotu očekáváme pro $x = 4$. Abychom mohli rozhodnout, zda bude či ne, spočítáme limity

$$\lim_{x\to4^+} \frac{2x^3}{x-4} = \frac{2\cdot4^3}{0^+} = +\infty, \qquad \lim_{x\to4^-} \frac{2x^3}{x-4} = \frac{2\cdot4^3}{0^-} = -\infty.$$

Přímka $x = 4$ je svislou asymptotou:

$x = 4: \quad x \to 4^+,\ y \to +\infty;$
$\qquad\qquad x \to 4^-,\ y \to -\infty.$

d) 1) $y = kx + q, \quad f(x) = x \ln(x - \mathrm{e}),\ x \in (\mathrm{e}, +\infty)$,

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \ln(x-\mathrm{e})}{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x-\mathrm{e}) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{šikmá asymptota neexistuje.}$$

2) Svislá asymptota může být jedině v bodě e. Spočítáme limitu zprava, zleva funkce není definována: $\lim\limits_{x\to\mathrm{e}^+} x \ln(x-\mathrm{e}) = \mathrm{e}\cdot(-\infty) = -\infty$

Přímka $x = \mathrm{e}$ je svislou asymptotou: $x \to \mathrm{e}^+,\ y \to -\infty$.

■

89. Spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{\cos x - 1}$; **b)** $\lim\limits_{x\to1} \left(\dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)$; **c)** $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x$;

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} \dfrac{x^2+1}{x+1}}{x^2+1}$.

[**a)** -2; **b)** $-\frac{1}{2}$; **c)** 0 ; **d)** 0]

90. Spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (2x)^{\frac{3}{\ln x}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$; **d)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\sin 2x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{\sin 2x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

[**a)** e^3; **b)** $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$; **c)** e; **d)** 1; e) 0]

91. Spočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cos(x^2+1)}{x^2+1}$;

d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2+5^{x+1}}{2-3\cdot 5^x}$.

$\left[\right.$**a)** 0; **b)** $\dfrac{2}{\pi}$; **c)** 0; **d)** $-\dfrac{5}{3}\left.\right]$

92. Určete rovnice asymptot funkce $y = f(x)$:

a) $y = 4x - \dfrac{1}{x-1}$; **b)** $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; **c)** $y = \ln(9-x^2)$; **d)** $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x-2}}$.

a)	$y = 4x,\ x \to \pm\infty$	
	$x = 1,\ x \to 1^+,\ y \to -\infty,$	$x \to 1^-,\ y \to +\infty$
b)	$y = 0,\ x \to \pm\infty$	svislá asymptota neexistuje
c)	$x = -3,\ x \to -3^+,\ y \to -\infty$	šikmá asymptota neexistuje
	$x = 3,\ x \to 3^-,\ y \to -\infty$	
d)	$x = 2,\ x \to 2^+,\ y \to +\infty$	šikmá asymptota neexistuje

9. Užití první a druhé derivace k vyšetřování vlastností funkce (monotónnost, konvexnost, konkávnost)

***Příklad* 93**. Rozhodněte užitím derivace, zda funkce f je rostoucí nebo klesající v okolí bodu c, jestliže:

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x, \qquad c = 2;$

b) $f(x) = x \operatorname{arctg} x, \qquad c_1 = -1,\ c_2 = \sqrt{3}.$

Řešení: Je-li $f'(c) \left\langle \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array}\right.$, pak funkce $f(x)$ je $\left\langle \begin{array}{c} \textbf{rostoucí} \\ \textbf{klesající} \end{array} \right\rangle$ **v okolí bodu** c.

Spočítáme $f'(c)$ a podle znaménka usoudíme, co nastane.

a) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x + 5 \quad \Rightarrow$
$f'(2) = 32 + 36 - 8 + 5 > 0 \quad \Rightarrow$ funkce f je v okolí bodu $x = 2$ rostoucí;

b) $f(x) = x \operatorname{arctg} x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \operatorname{arctg} x + \dfrac{x}{1+x^2} \quad \Rightarrow$

$f'(-1) = \operatorname{arctg}(-1) + \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} < 0 \Rightarrow f$ je v okolí bodu $x = -1$ klesající,

$f'(\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} > 0 \Rightarrow f$ je v okolí bodu $x = \sqrt{3}$ rostoucí.

■

***Příklad* 94**. Najděte intervaly ryzí monotónnosti funkce f a určete, zda na nich funkce roste či klesá:

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 6;$ **b)** $f(x) = 2\sin x + \cos 2x;$

c) $f(x) = \sqrt{3x - x^2};$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}.$

Řešení: Připomeňme si, že funkce $f(x)$ se nazývá ***ryze monotónní na intervalu*** I, *je-li na I rostoucí nebo klesající. Nechť $f(x)$ je spojitá funkce na $\langle a, b\rangle$. Je-li* $f'(x) \left\langle \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\rangle$ *pro všechna $x \in (a, b)$, pak $f(x)$ je* $\left\langle \begin{array}{c} \textbf{\textit{rostoucí}} \\ \textbf{\textit{klesající}} \end{array} \right\rangle$ na $\langle a, b\rangle$.

a) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 6, \quad D(f) = \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 3x^2 + 8x - 3 \left\langle \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array}\right. .$

K vyřešení nerovnice potřebujeme určit kořeny kvadratické rovnice $3x^2+8x-3 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6} = \left\langle \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ -3 \end{array}\right. .$$

$$f'(x) = 3\Big(x - \frac{1}{3}\Big)(x+3) \left\langle \begin{array}{lcl} > 0 & \Rightarrow & x \in (-\infty, -3) \text{ a } \Big(\frac{1}{3}, +\infty\Big), \\ < 0 & \Rightarrow & x \in \Big(-3, \frac{1}{3}\Big). \end{array}\right.$$

Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalech $(-\infty,\,-3\rangle$ a $\left\langle\dfrac{1}{3},\,+\infty\right)$ a je klesající na intervalu $\left\langle -3,\,\dfrac{1}{3}\right\rangle$.

b) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x, \quad D(f) = \mathbb{R}.$

Funkce je periodická s primitivní periodou 2π, proto se omezíme na interval $\langle 0, 2\pi\rangle$.

$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x = 2(\cos x - 2\sin x\cos x) = 2\cos x(1 - 2\sin x),$

$$\cos x = 0 \quad\Rightarrow\quad x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2},$$

$$1 - 2\sin x = 0 \quad\Rightarrow\quad \sin x = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x_3 = \frac{\pi}{6},\ x_4 = \frac{5\pi}{6}.$$

Znaménko součinu $\cos x(1 - 2\sin x)$ vyšetříme pomocí tabulky:

x	0 – $\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$ – $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ – $\frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$ – $\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$ – 2π
$\cos x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$1 - 2\sin x$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x) = 2\cos x(1 - 2\sin x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\text{Funkce } f(x) \text{ je } \left\langle \begin{array}{l} \text{rostoucí na } \left\langle 0,\,\dfrac{\pi}{6}\right\rangle;\ \left\langle\dfrac{\pi}{2},\,\dfrac{5\pi}{6}\right\rangle;\ \left\langle\dfrac{3\pi}{2},\,2\pi\right\rangle \\ \text{klesající na } \left\langle\dfrac{\pi}{6},\,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle;\ \left\langle\dfrac{5\pi}{6},\,\dfrac{3\pi}{2}\right\rangle \end{array}\right. .$$

c) $f(x) = \sqrt{3x - x^2} \quad\Rightarrow\quad 3x - x^2 \geq 0 \quad\Rightarrow\quad x(3 - x) \geq 0 \quad\Rightarrow\quad D(f) = \langle 0, 3\rangle,$

$$f'(x) = \frac{3 - 2x}{2\sqrt{3x - x^2}} \left\langle \begin{array}{l} > 0 \quad\Rightarrow\quad 3 - 2x > 0 \quad\Rightarrow\quad x < \dfrac{3}{2} \\ < 0 \quad\Rightarrow\quad 3 - 2x < 0 \quad\Rightarrow\quad x > \dfrac{3}{2} \end{array}\right. , \quad D(f') = (0, 3),$$

$$\text{Funkce } f(x) \text{ je } \left\langle \begin{array}{l} \text{rostoucí na } \left\langle 0,\,\dfrac{3}{2}\right\rangle \\ \text{klesající na } \left\langle\dfrac{3}{2},\,3\right\rangle \end{array}\right. .$$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x} \quad\Rightarrow\quad \ln x \neq 0 \ \wedge\ x > 0 \quad\Rightarrow\quad x \neq 1 \ \wedge\ x > 0 \quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow\quad D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty),$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot\ln x - x^2\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x\cdot\ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x},$$

$$\frac{x(2\ln x - 1)}{\ln^2 x} \left\langle \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad 2\ln x - 1 \left\langle \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \ln x \gtrless \frac{1}{2} \quad\Rightarrow$$

$|$použili jsme, že $x > 0$ a $\ln^2 x > 0\,|$ $\quad\Rightarrow\quad x \gtrless \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}.$

Funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ je $\left\langle \begin{array}{l} \text{rostoucí na } \langle\sqrt{\mathrm{e}},\, +\infty) \\ \text{klesající na } (0,1) \text{ a na } (1,\, \sqrt{\mathrm{e}}\rangle \end{array} \right.$.

■

***Příklad* 95**. Rozhodněte, zda funkce f je ryze konvexní nebo ryze konkávní v okolí bodu c, jestliže:

a) $f(x) = x^5 + x^3 \ln x - 10x, \qquad c = 2;$

b) $f(x) = 3\sin 2x + \cos x, \qquad c_1 = \dfrac{\pi}{6},\ c_2 = \pi;$

c) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x, \qquad c_1 = 1,\ c_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Řešení: Je-li $f''(c) \left\langle \begin{array}{c} >0 \\ <0 \end{array} \right.$*, pak* $f(x)$ *je* ***ryze*** $\left\langle \begin{array}{c} \textbf{\textit{konvexní}} \\ \textbf{\textit{konkávní}} \end{array} \right\rangle$ ***v okolí bodu*** $x = c$.

Podobně: *Je-li* $f(x)$ *spojitá na* $\langle a,b\rangle$ *a je-li* $f''(c) \left\langle \begin{array}{c} >0 \\ <0 \end{array} \right\rangle$ *pro všechna* $x \in (a,b)$ *, pak funkce* $f(x)$ *je* ***ryze*** $\left\langle \begin{array}{c} \textbf{\textit{konvexní}} \\ \textbf{\textit{konkávní}} \end{array} \right\rangle$ *na intervalu* $\langle a,b\rangle$.

a) $f(x) = x^5 + x^3 \ln x - 10x,$

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} - 10 = 5x^4 + 3x^2 \cdot \ln x + x^2 - 10,$$

$$f''(x) = 20x^3 + 6x \cdot \ln x + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x = 20x^3 + 6x \cdot \ln x + 5x,$$

$$f''(2) = 160 + 12 \cdot \ln 2 + 10 > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ je v okolí bodu } x = 2 \text{ ryze konvexní.}$$

b) $f(x) = 3\sin 2x + \cos x,$

$$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 2x - \sin x = 6\cos 2x - \sin x, \qquad f''(x) = -12\sin 2x - \cos x,$$

$$f''\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = -12 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} = -12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

$$f''(\pi) = -12\sin 2\pi - \cos\pi = 0 + 1 > 0,$$

$$\text{funkce je v okolí bodu } \left\langle \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{6} \\ x = \pi \end{array} \right. \text{ ryze } \left\langle \begin{array}{l} \text{konkávní} \\ \text{konvexní} \end{array} \right. .$$

c) $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arctg} x,$

$$f'(x) = 2\,x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 2\,x \cdot \operatorname{arctg} x + 1, \qquad f''(x) = 2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2},$$

$$f''(1) = 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 + \frac{2}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 > 0,$$

$$f''\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) = 2 \cdot \operatorname{arctg}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) + \frac{2\Big(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Big)}{1+\dfrac{1}{3}} = 2 \cdot \Big(-\frac{\pi}{6}\Big) - \frac{2\sqrt{3}}{4} < 0,$$

$$\text{funkce je v okolí bodu } \left\langle \begin{array}{c} x = 1 \\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right. \text{ ryze } \left\langle \begin{array}{l} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right. .$$

■

***Příklad* 96**. Najděte intervaly, na nichž je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, jestliže:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x + 5$; **b)** $f(x) = x - \ln(x^2 - 9)$;

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$, $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Řešení:

a) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 7x + 5 \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 7,$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24 = 12(x^2 - x - 2) \ \left\langle \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right. .$$

K vyřešení nerovnosti určíme kořeny kvadratické rovnice

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 2 \quad \Rightarrow$$

$$f''(x) \ \left\langle \begin{array}{ll} > 0 & \text{pro} \ \ x \in (-\infty, -1) \text{ a } x \in (2, +\infty) \\ < 0 & \text{pro} \ \ x \in (-1, 2) \end{array} \right. .$$

$$\text{Funkce } f \text{ je ryze } \left\langle \begin{array}{l} \text{konvexní na intervalu } \ (-\infty,\, -1\rangle \text{ a } \langle 2,\, +\infty) \\ \text{konkávní na intervalu } \ \langle -1,\, 2\rangle \end{array} \right. .$$

b) $f(x) = x - \ln(x^2 - 9) \quad \Rightarrow \quad D(f) = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty), \qquad f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{x^2 - 9},$

$$f''(x) = -\frac{2(x^2-9) - 2x \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = -\frac{-2x^2 - 18}{(x^2-9)^2} = \frac{2(x^2+9)}{(x^2-9)^2} > 0 \text{ pro všechna } \ x \in D(f)\ .$$

Funkce f je na intervalech $(-\infty,\, -3)$ a $(3,\, +\infty)$ ryze konvexní.

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$, $x \in \langle 0,\, 2\pi\rangle$,

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x \cdot (-\sin x)}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(2+\cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2+\cos x)^2},$$

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(2+\cos x)^2 - (2\cos x + 1)\cdot 2(2+\cos x)\cdot(-\sin x)}{(2+\cos x)^4} =$$

$$= \frac{-2\sin x(2+\cos x) + 2(2\cos x + 1)\cdot \sin x}{(2+\cos x)^3} = \frac{2\sin x(-2 - \cos x + 2\cos x + 1)}{(2+\cos x)^3} =$$

$$= \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2+\cos x)^3} \ \left\langle \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \sin x(\cos x - 1) \ \left\langle \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{použili jsme:} \\ 2 + \cos x > 0 \\ \text{pro všechna } \ \ x \in \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin x \ \left\langle \begin{array}{l} < 0 \\ > 0 \end{array} \right. \left(\begin{array}{l} \text{použili jsme:} \\ \cos x - 1 < 0 \ \Rightarrow \ \cos x < 1 \\ \text{pro všechna } \ \ x \neq 2k\pi \end{array} \right), \qquad \begin{array}{ll} \sin x < 0 & \text{pro } x \in (\pi,\, 2\pi) \\ \sin x > 0 & \text{pro } x \in (0,\, \pi) \end{array} .$$

$$\text{Funkce } f \text{ je ryze } \left\langle \begin{array}{l} \text{konvexní na intervalu } \ \langle \pi,\, 2\pi\rangle \\ \text{konkávní na intervalu } \ \langle 0,\, \pi\rangle \end{array} \right. .$$

■

97. Rozhodněte, zda funkce f je rostoucí nebo klesající, ryze konvexní nebo ryze konkávní v bodech c_1 a c_2 :

a) $f(x) = \sin x + 3\cos x,\ c_1 = \dfrac{\pi}{3},\ c_2 = -\dfrac{\pi}{2};$

b) $f(x) = x^3 + 5x^2 - \dfrac{3}{x} + 4,\ c_1 = 1,\ c_2 = -\dfrac{1}{2};$

c) $f(x) = (x^2 + x)\ln x,\ c_1 = \mathrm{e}^{-2},\ c_2 = 1.$

[**a)** $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ je klesající a konkávní, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ je rostoucí a konvexní;
b) $f(1)$ je rostoucí a konvexní, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ je rostoucí a konvexní;
c) $f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$ je klesající a konvexní, $f(1)$ je rostoucí a konvexní]

98. Najděte intervaly, v nichž je funkce f rostoucí, a intervaly, v nichž je klesající:

a) $f(x) = 12x - x^3$; **b)** $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$; **c)** $f(x) = x - \ln(1 + x)$;

d) $f(x) = x + 2\cos x,\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle$

[**a)** na $\langle -2,\ 2\rangle$ roste, na $(-\infty,\ -2\rangle$ a $\langle 2,\ +\infty)$ klesá;
b) na $\langle 0,\ 2\rangle$ roste, na $(-\infty,\ 0\rangle$ a $\langle 2,\ +\infty)$ klesá;
c) $D(f) = (-1,\ +\infty)$: na $\langle -1,\ 0\rangle$ klesá, na $\langle 0,\ +\infty)$ roste;
d) na $\left\langle 0,\ \frac{\pi}{6}\right\rangle$ a $\left\langle \frac{5\pi}{6},\ 2\pi\right\rangle$ roste, na $\left\langle \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right\rangle$ klesá]

99. Najděte intervaly, v nichž je funkce f ryze konvexní nebo v nichž je ryze konkávní:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} x + 3x - \dfrac{\pi}{2}$; **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln(1 - x)$

[**a)** na $(-\infty,\ 0\rangle$ je konvexní, na $\langle 0,\ +\infty)$ je konkávní;
b) $D(f) = (-\infty, 1)$: na $(-\infty,\ 0\rangle$ je konvexní, na $\langle 0,\ 1)$ je konkávní]

10. Lokální a globální extrémy, inflexe

***Příklad* 100**. Stanovte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; **b)** $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x$;

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$; **d)** $f(x) = |\mathrm{e}^x - 1|$.

*Řešení: Funkce f může mít v bodě c **lokální extrém** pouze když $f'(c) = 0$ nebo když $f'(c)$ neexistuje.*

a) $D(f) = \mathbb{R}$ a $D(f') = \mathbb{R}$, proto lokální extrémy budou jedině v bodech, kde je

$$f'(x) = 0:$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Nyní podle znaménka $f''(1)$ a $f''(3)$ zpřesníme, jaké lokální extrémy to budou:

$\boxed{x = 1}$:

$f''(x) = 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je konkávní v bodě 1 čili v tomto bodě má funkce lokální maximum, jehož hodnotu dopočítáme dosazením do $f(x)$:

$$f_{\max}(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0;$$

$\boxed{x = 3}$:

$f''(3) = 18 - 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ v bodě 3 je f konvexní a má tedy lokální minimum

$$f_{\min}(3) = 27 - 54 + 27 - 4 = -4.$$

b) $f(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos 2x \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R}$,

$f'(x) = -\sin x - \sin 2x \quad \Rightarrow \quad D(f') = \mathbb{R}$,

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sin x - 2\sin x\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x(1 + 2\cos x) = 0 \quad \Rightarrow$

buď $\quad \sin x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$

nebo $\quad \cos x = -\dfrac{1}{2} \quad \left\langle \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad x_2 = \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \Longrightarrow \quad x_3 = \dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

$f''(x) = -\cos x - 2\cos 2x.$

$f''(x_1) = f''(n\pi) \quad \left\langle \begin{array}{l} f''\big(2k\pi\big) = -1 - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokální maximum}, \\ f''\big((2k+1)\pi\big) = 1 - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{lokální maximum}, \end{array} \right.$

$f''(x_2) = f''\Big(\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi\Big) = \dfrac{1}{2} - 2\cdot\Big(-\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{3}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokální minimum,

$f''(x_3) = f''\Big(\dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi\Big) = \dfrac{1}{2} - 2\cdot\Big(-\dfrac{1}{2}\Big) = \dfrac{3}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad$ lokální minimum.

<u>Závěr</u> :

$f_{\max}\big(2k\pi\big) = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}, \qquad f_{\min}\Big(\dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi\Big) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\Big(-\dfrac{1}{2}\Big) = -\dfrac{3}{4},$

$f_{\max}\big((2k+1)\pi\big) = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}, \qquad f_{\min}\Big(\dfrac{4}{3}\pi + 2k\pi\Big) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\Big(-\dfrac{1}{2}\Big) = -\dfrac{3}{4}.$

c) $f(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad D(f) = \mathbb{R},$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1-x}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad D(f') = \mathbb{R},$

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1-x}{1+x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,$

$f''(x) = \dfrac{-(1+x^2)-(1-x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(1) = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} < 0.$

V bodě $x = 1$ nastává lokální maximum; $f_{\max}(1) = \operatorname{arctg} 1 - \dfrac{1}{2}\ln 2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2.$

d) $f(x) = |\mathrm{e}^x - 1| \left\langle \begin{array}{ll} = \mathrm{e}^x - 1 & \text{pro } x \in \langle 0, +\infty) \\ = 1 - \mathrm{e}^x & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \end{array}\right. ;$

$f'(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \mathrm{e}^x & \text{pro } x \in (0, +\infty) \\ -\mathrm{e}^x & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad f'(0^+) = 1 \neq f'(0^-) = -1.$

$f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a v bodě 0 $f'(0)$ neexistuje. Proto lokální extrém nastane jedině v bodě 0 a bude to lokální minimum, protože platí $f(x) > f(0)$ pro všechna $x \neq 0$ a $f_{\min}(0) = 0.$

■

***Příklad* 101.** Rozhodněte, zda má funkce f v intervalu I globální extrémy. V kladném případě nalezněte body, ve kterých nastávají a určete hodnoty extrémů.

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5, \qquad I = \langle -3, 3\rangle;$

b) $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x} - 10, \qquad I = \langle 1, 4\rangle;$

c) $f(x) = |x^2 + x - 2|, \qquad I = \langle -3, 3\rangle;$

d) $f(x) = \operatorname{tg} x - 4x, \qquad I = \left\langle -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right);$

Řešení: Funkce f definovaná v intervalu I může nabývat svých ***globálních extrémů***

1) *v bodech intervalu I, ve kterých je $f'(x) = 0$,*

2) *v bodech intervalu I, ve kterých $f'(x)$ neexistuje,*

3) *v krajních bodech intervalu I, pokud krajní body patří do I.*

a) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 5, \quad I = \langle -3, 3\rangle$, krajní body intervalu patří do I;

$f'(x) = 4x^3 - 16x$ existuje na celém I: $4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x^2-4) = 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 0 \in I,\ x_2 = -2 \in I,\ x_3 = 2 \in I.$

Nyní spočítáme hodnoty funkce v bodech $0, -2, 2, -3, 3$ a pak vybereme největší, resp. nejmenší hodnotu.

$f(0) = -5,\ f(-2) = f(2) = 16 - 32 - 5 = -21,\ f(-3) = f(3) = 81 - 72 - 5 = 4.$

Globální maximum nastává v krajních bodech intervalu $f(-3) = f(3) = 4.$

Globální minimum nastává v bodech $x = -2$ a $x = 2$, $f(-2) = f(2) = -21.$

b) $f(x) = x^2 - \dfrac{2}{x} - 10, \quad x \in \langle 1, 4\rangle,$

$f'(x) = 2x + \dfrac{2}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^3+1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \notin \langle 1, 4\rangle.$

$f'(x)$ existuje pro všechna $x \in \langle 1,4\rangle$ a v žádném bodě intervalu se nerovná 0. Proto globální extrémy nastanou jedině v krajních bodech daného intervalu, tedy

$$f(1) = 1-2-10 = -11 \quad \Rightarrow \quad \text{globální minimum},$$
$$f(4) = 16 - \frac{1}{2} - 10 = \frac{11}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{globální maximum}.$$

c) $f(x) = |x^2+x-2| = |(x+2)(x-1)| = \Big\langle \begin{array}{l} (x+2)(x-1) \text{ pro } x \in \langle -3,-2\rangle \text{ a } x \in \langle 1,3\rangle, \\ -(x+2)(x-1) \text{ pro } x \in (-2,1), \end{array}$

$$f'(x) = \Big\langle \begin{array}{r} 2x+1=0 \\ -(2x+1)=0 \end{array}, \quad x_1 = -\frac{1}{2} \in (-2,1).$$

$f'(x)$ neexistuje v bodech -2 a 1. Proto globální extrémy budeme vybírat z hodnot:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4},\ f(-2) = f(1) = 0,\ f(-3) = 4,\ f(3) = 10.$$

Tak jsme obdrželi globální maximum $f(3) = 10$ a globální minimum $f(-2) = = f(1) = 0$.

d) $f(x) = \operatorname{tg} x - 4x, \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = I;$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \Big\langle \begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2} \ \Rightarrow \ x_1 = \frac{\pi}{3} \in I, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \ \Rightarrow \ x_2 = \pm\frac{2}{3}\pi \notin I, \end{array}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - 4\cdot\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \doteq 1.73 - 4.19 = -2.46,$$
$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cdot\frac{\pi}{4} = -1 + \pi \doteq 2.14.$$

Jelikož $\frac{\pi}{2} \notin I$, spočítáme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x - 4x) = +\infty.$

Globální minimum nastává v bodě $\frac{\pi}{3}$ a $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2.46$ a globální maximum neexistuje.

■

***Příklad* 102**. Určete inflexní body funkce

a) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$; **b)** $f(x) = 3x + \operatorname{arccotg} 2x$.

Řešení: Použijeme větu : *Je-li $f''(c) = 0$ a $f'''(c) \neq 0$, pak bod $[c, f(c)]$ je **inflexním** bodem grafu funkce $y = f(x)$.*

a) $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x, \quad D(f) = \mathbb{R};$

$$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4, \qquad f''(x) = 20x^3 - 30x, \qquad f'''(x) = 60x^2 - 30,$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10x(2x^2-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}},\ x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$f'''(0) = -30 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ bod $[0,0]$ je inflexním bodem

$$f'''\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = 60\cdot\frac{3}{2} - 30 \neq 0, \qquad f\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 - 5\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 +$$

$$+4\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{9}{4} - 5\cdot\frac{3}{2} + 4\right) = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}\left(-\frac{5}{4}\right) = \mp\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{body} \ \left[\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right],\ \left[-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \frac{5}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right] \ \text{jsou též inflexní.}$$

b) $f(x) = 3x + \operatorname{arccotg} 2x, \quad D(f) = \mathbb{R};$

$$f'(x) = 3 - \frac{2}{1+4x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2\cdot 8x}{(1+4x^2)^2} = 16\,\frac{x}{(1+4x^2)^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0;$$

$$f'''(x) = 16\,\frac{(1+4x^2)^2 - x\cdot 2(1+4x^2)\cdot 8x}{(1+4x^2)^4} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = +16 \neq 0.$$

$$f(0) = 0 + \operatorname{arccotg} 0 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{bod } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ je inflexním bodem.}$$

■

***Příklad* 103**. Stanovte parametry a, b tak, aby funkce **a)** $f(x) = x\ln x + ax$ měla lokální extrém v bodě $x = \mathrm{e}^{-2}$. Jaký je to extrém? **b)** $f(x) = ax^3 + bx^2$ měla inflexi v bodě $[1, 3]$.

Řešení:

a) Parametr a spočítáme z podmínky $f'\big(\mathrm{e}^{-2}\big) = 0$. Potom podle znaménka $f''\big(\mathrm{e}^{-2}\big)$ určíme o jaký lokální extrém jde:

$$f(x) = x\ln x + ax, \qquad f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a,$$

$$f'\big(\mathrm{e}^{-2}\big) = \ln \mathrm{e}^{-2} + 1 + a = -2 + 1 + a \quad \Rightarrow \quad a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1;$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''\big(\mathrm{e}^{-2}\big) = \mathrm{e}^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{v bodě } \mathrm{e}^{-2} \text{ nastává lokální minimum a}$$

$$f\big(\mathrm{e}^{-2}\big) = \mathrm{e}^{-2}\ln \mathrm{e}^{-2} + 1\cdot \mathrm{e}^{-2} = -2e^{-2} + \mathrm{e}^{-2} = -\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$$

Hledaná funkce je $f(x) = x\,\ln x + x$ a bod $[\mathrm{e}^{-2}, -\mathrm{e}^{-2}]$ je jejím lokálním minimem.

b) Bod $[1,3]$ musí být bodem grafu dané funkce $f(x) = ax^3 + bx^2$ tj. $f(1) = 3 \Rightarrow$ $\underline{a + b = 3}$. Navíc $[1,3]$ má být inflexním bodem čili $f''(1) = 0$ a $f'''(1) \neq 0$.

$f'(x) = 3\,ax^2 + 2\,bx$, $f''(x) = 6\,ax + 2\,b$, $f''(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{6\,a + 2\,b = 0}$, $f'''(x) = 6\,a$.

Pro a a b jsme dostali soustavu

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 3\,a + b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -2\,a = 3 \ \Rightarrow \ a = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \ b = -3\,a = \frac{9}{2},\ f'''(1) = -9 \neq 0.$$

Hledaná funkce je $f(x) = -\dfrac{3}{2}\,x^3 + \dfrac{9}{2}\,x^2$ a bod $[1,3]$ je jejím inflexním bodem.

■

***Příklad* 104**.* Určete lokální extrémy a inflexní body následujících funkcí:
a) $f(x) = (x-1)^4 + 3$; **b)** $f(x) = (x+2)^5$.

Řešení: Obě úlohy budeme počítat paralelně:

a) $f'(x) = 4(x-1)^3 \;\Rightarrow\; f'(1) = 0,$
$f''(x) = 12(x-1)^2 \;\Rightarrow\; f''(1) = 0,$
$f'''(x) = 24(x-1) \;\Rightarrow\; f'''(1) = 0,$
$f^{(4)}(x) = 24 \neq 0.$

b) $f'(x) = 5(x+2)^4 \;\Rightarrow\; f'(-2) = 0,$
$f''(x) = 20(x+2)^3 \;\Rightarrow\; f''(-2) = 0,$
$f'''(x) = 60(x+2)^2 \;\Rightarrow\; f'''(-2) = 0,$
$f^{(4)}(x) = 120(x+2) \;\Rightarrow\; f^{(4)}(-2) = 0,$
$f^{(5)}(x) = 120 \neq 0.$

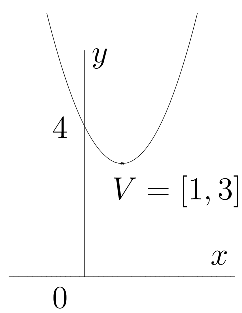
V obou případech použijeme zobecněnou větu o extrémech a inflexi:
Nechť $f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$ *a* $f^{(n)}(c) \neq 0$. *Je-li* n *číslo sudé*

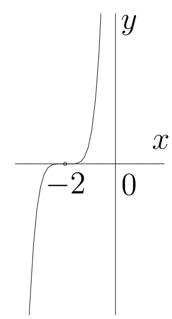
$$a \left\langle \begin{array}{l} f^{(n)}(c) > 0 \\ f^{(n)}(c) < 0 \end{array}\right. , \text{ pak funkce } f \text{ má v bodě } c \text{ lokální } \left\langle \begin{array}{l} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{array}\right. ;$$

je-li n *číslo liché, pak funkce* f *má v bodě* c *inflexní bod.*

a) $f^{(4)}(1) > 0$
$n = 4$ je sudé číslo $\Rightarrow$
f má v bodě 1
lokální minimum, $f(1) = 3$;
Totéž je vidět z grafu.

b) $f^{(5)}(-2) = 120 \neq 0$
$n = 5$ je liché číslo $\Rightarrow$
f má v bodě -2
inflexní bod, $f(-2) = 0$;
Opět z grafu je vše jasné.

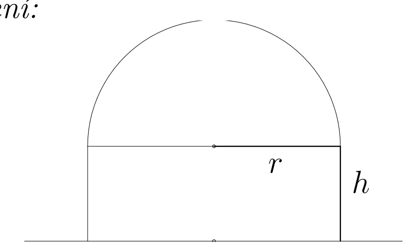




■

***Příklad* 105.** Průřez tunelem má tvar obdélníka zakončeného půlkružnicí. Obvod průřezu je a metrů. Jaký musí být poloměr kružnice, aby plošný obsah průřezu byl největší?

Řešení:



Nejdříve sestavíme funkci, jejíž maximum nás zajímá. Jde o plošný obsah
$P = 2r \cdot h + \dfrac{1}{2}\pi r^2.$

Známe obvod průřezu $a = 2r + 2h + \pi r$, ze kterého vyjádříme h pomocí r.
Plošný obsah bude funkcí r:

$2h = a - 2r - \pi r \quad \Rightarrow \quad P(r) = r \cdot (a - 2r - \pi r) + \dfrac{1}{2}\pi r^2$ a po úpravě

$P(r) = ar - 2r^2 - \pi r^2 + \dfrac{1}{2}\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad P(r) = ar - r^2\left(2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Nyní

$$P'(r) = a - 2r\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad P'(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{a}{2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{a}{4 + \pi},$$

$$P''(r) = -2\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

Největší plošný obsah bude

$$P\left(\frac{a}{4+\pi}\right) = a\cdot\frac{a}{4+\pi} - \frac{a^2}{(4+\pi)^2}\cdot\frac{4+\pi}{2} = \frac{a^2}{4+\pi} - \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{4+\pi} = \frac{a^2}{2(4+\pi)}.$$

Nejmenší plošný obsah může být jedině roven 0 a to bude ve dvou případech:

$$P(r=0) = P\Big(r = \frac{2a}{\pi+4}\Big) = 0.$$

Získaný poloměr maximálního obsahu je $r = \dfrac{a}{\pi+4} \in \Big\langle 0,\ \dfrac{2a}{\pi+4}\Big\rangle$.

■

***Příklad* 106**. Číslo a rozdělte na dvě čísla tak, aby součet jejich druhých mocnin byl nejmenší.

Řešení: První číslo označme x, druhé pak bude $a-x$. Uvažovaná funkce bude

$$f(x) = x^2 + (a-x)^2, \text{ kde } x\in\langle 0,a\rangle.$$

Hledáme globální minimum funkce $f(x)$ na daném intervalu $I=\langle 0,a\rangle$:

$f'(x) = 2x + 2(a-x)\cdot(-1) = 4x - 2a = 0 \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{a}{2}.$

Nyní z funkčních hodnot v bodech $\dfrac{a}{2}$, 0, a vybereme nejmenší:

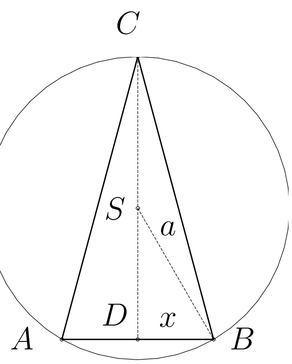
$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2},\ f(0) = a^2,\ f(a) = a^2.$$

Globální minimum nastává pro $x = \dfrac{a}{2}$, tedy obě čísla x a $a-x$ jsou stejná a součet jejich kvadrátů je minimální.

■

***Příklad* 107**. Do koule o poloměru a vepište rotační kužel největšího objemu a stanovte jeho objem.

Řešení:



Napíšeme nejdříve objem kužele s poloměrem podstavy x a výškou o délce h

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2\cdot h.$$

Nyní použijeme toho, že kužel je vepsaný do koule a vyjádříme h pomocí x a a:

$h = DC = CS + SD = a + \sqrt{a^2-x^2}$. Po dosazení do V obdržíme funkci:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

Hledáme globální maximum funkce $V(x)$, kde $x\in\langle 0,a\rangle$.

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi\left(2x\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right) + x^2\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right) \quad\Rightarrow$$

$$V'(x) = 0: \quad 2x\left(a+\sqrt{a^2-x^2}\right) - \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0, \quad \text{kde } x\neq 0,\ x\neq a.$$

Vydělíme jedním x a upravíme

$2\left(a\sqrt{a^2-x^2} + (a^2-x^2)\right) - x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 2\left(a\sqrt{a^2-x^2} + a^2 - x^2\right) - x^2 = 0 \quad\Rightarrow$

$2a\sqrt{a^2-x^2} + 2a^2 - 2x^2 - x^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 2a\sqrt{a^2-x^2} = 3x^2 - 2a^2.$

Umocníme obě strany rovnice

$4a^2(a^2-x^2) = 9x^4 - 12a^2x^2 + 4a^4 \quad \Rightarrow \quad 4a^4 - 4a^2x^2 = 9x^4 - 12a^2x^2 + 4a^4 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \; 9x^4 - 8a^2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \dfrac{8a^2}{9} \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{2\sqrt{2}\,a}{3}.$

Nyní vybereme největší z funkčních hodnot:

$$V\left(\frac{2\sqrt{2}\,a}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\,\frac{8a^2}{9}\left(a + \sqrt{a^2 - \frac{8}{9}a^2}\right) = \frac{8}{27}\pi a^2\left(a + \frac{a}{3}\right) = \frac{32\,\pi a^3}{81},$$

$V(0) = 0,\ V(a) = \dfrac{1}{3}\pi a^3.$ Největší objem bude $V\left(\dfrac{2\sqrt{2}\,a}{3}\right) = \dfrac{32\,\pi a^3}{81}.$ ■

108. Stanovte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x) = 3x - x^3$; **b)** $f(x) = 2e^{|x|}$;

c) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$; **d)** $f(x) = \ln(-x^2 + 5x - 6)$.

[**a)** lokální minimum $f(-1) = -2$, lokální maximum $f(1) = 2$;
b) lokální minimum $f(0) = 2$, pozor $f' \neq 0$!;
c) lokální maximum $f(4) = 4$;
d) lokální maximum $f\left(\frac{5}{2}\right) = -\ln 4$]

109. Stanovte globální extrémy daných funkcí na intervalech I:

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5,\ x \in \langle -3, 3\rangle$; **b)** $f(x) = x^2 - 2\ln x,\ x \in \left\langle \dfrac{1}{e}, e^2 \right\rangle$;

c) $f(x) = x + \sin x,\ x \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2}\right\rangle$; **d)** $f(x) = \ln(2x - x^2),\ x \in (0, 1\rangle$;

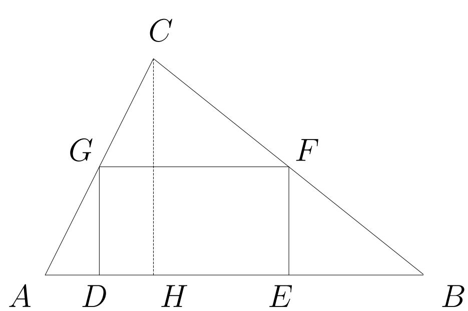
e) $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x^2},\ x \in \langle -1, 1\rangle$.

[**a)** globální maximum $f(3) = 50$, globální minimum $f(1) = -2$;
b) globální maximum $f(e^2) = e^4 - 4$, globální minimum $f(1) = 1$;
c) globální maximum $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2$, globální minimum $f(0) = 0$;
d) globální maximum $f(1) = 0$, globální minimum neexistuje $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$;
e) globální maximum $f(1) = 4$, globální minimum $f(0) = 0$.]

110. Je dána funkce $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x$. Určete a a b tak, aby funkce měla extrém v bodě $A = [1, ?]$ a inflexi v bodě $B = [2, ?]$. Zjistěte o jaký extrém jde a doplňte y-ové souřadnice obou bodů.

[$a = -6,\ b = 9,\ A = [1, 4]$ lokální maximum, $B = [2, 2]$ inflexní bod]

111. Vypočtěte největší plošný obsah obdélníka vepsaného do trojúhelníka o základně 10 cm a výšce 8 cm (viz obrázek).



$|AB| = 10\,\text{cm},\ |CH| = 8\,\text{cm}$

[$|DE| = \frac{1}{2}|AB| = 5\,\text{cm},\ |EF| = \frac{1}{2}|CH| = 4\,\text{cm};\ P_{\max} = 20\,\text{cm}^2$]

112. Najděte největší objem válce, jehož obvod osového řezu je a [m].

[$V_{\max} = \dfrac{\pi a^3}{216}$]

113. Číslo 10 rozdělte na dvě čísla tak, aby součet jejich druhých mocnin byl největší.

[5; 5]

11. Průběh funkce

Při vyšetřování průběhu funkce $f(x)$ budeme postupovat podle následujících pokynů:

1 Pro danou funkci

a) určíme definiční obor $D(f)$,

b) zjistíme, zda funkce je či není sudá, lichá, periodická,

c) určíme průsečíky s osami souřadnic (pokud existují),

d) vypočteme jednostranné limity funkce v krajních bodech definičního oboru.

2 Spočítáme a vyšetříme $f'(x)$:

$$f'(x) \begin{cases} \bullet \quad > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ je rostoucí,} \\ \bullet \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ je klesající,} \\ \bullet \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{stacionární body a možnost existence lokálních extrémů.} \end{cases}$$

3 Spočítáme a vyšetříme $f''(x)$:

$$f''(x) \begin{cases} \bullet \quad > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ je ryze konvexní,} \\ \bullet \quad < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ je ryze konkávní,} \\ \bullet \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{možnost existence inflexních bodů.} \end{cases}$$

4 Najdeme rovnice asymptot.

5 Sestavíme tabulku nejdůležitějších údajů a nakreslíme graf.

***Příklad* 114**. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

Řešení:

1 **a)** Definiční obor určíme z podmínky: $1-x>0 \quad \to \ x<1 \ \Rightarrow \quad D(f) = (-\infty, 1)$,

b) funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická,

c) průsečík $\left\langle \begin{array}{l} \text{s osou } y \text{ označíme } Y = [0,\ \ ], \\ \text{s osou } x \text{ označíme } X = [\ \ ,0], \end{array} \right.$

kde zbývající souřadnice spočítáme přímým dosazením do zadání:

$$y = \frac{\ln(1-0)}{0-1} = 0 \quad \longrightarrow \quad X = Y = [0,0].$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{x-1} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = 0,$

$\displaystyle\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{\ln(1-x)}{x-1} = \left|\tfrac{-\infty}{0^-}\right| = +\infty.$

2 $$y' = \frac{\frac{-1}{1-x}\cdot(x-1) - \ln(1-x)}{(x-1)^2} = \frac{1-\ln(1-x)}{(x-1)^2} \begin{cases} >0 \\ <0 \\ =0 \end{cases} \iff$$

$$1-\ln(1-x)\left\{\begin{array}{c}>\\<\\=\end{array}\right. 0 \Leftrightarrow 1\left\{\begin{array}{c}>\\<\\=\end{array}\right. \ln(1-x) \Leftrightarrow \mathrm{e}\left\{\begin{array}{c}>\\<\\=\end{array}\right. 1-x \Leftrightarrow x\left\{\begin{array}{c}>\\<\\=\end{array}\right. 1-\mathrm{e}.$$

Pro $x \in \langle 1-\mathrm{e}, 1)$ je $f(x)$ rostoucí, pro $x \in (-\infty, 1-\mathrm{e}\rangle$ je $f(x)$ klesající, pro $x_1 = 1-\mathrm{e}$ nastane lokální minimum v $M = \left[1-\mathrm{e}, -\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, protože zleva je funkce klesající a zprava rostoucí.

3 $$y'' = \frac{\frac{1}{1-x}\cdot(x-1)^2 - \big[1-\ln(1-x)\big]\cdot 2\,(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-1-2+2\ln(1-x)}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{-3+2\ln(1-x)}{(x-1)^3} \begin{array}{c}>\\<\\=\end{array} 0 \;\left|\; \begin{array}{c}\text{použijeme, že}\\ (x-1)^3 < 0\\ \text{pro všechna } x \in D(f)\end{array}\right| \;\Leftrightarrow\; -3+2\ln(1-x) \lesseqqgtr 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\ln(1-x)\left\{\begin{array}{c}<\\>\\=\end{array}\right. \frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 1-x\left\{\begin{array}{c}<\\>\\=\end{array}\right. \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad 1-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{c}<\\>\\=\end{array}\right. x.$$

Pro $x \in \langle 1-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, 1)$ je $f(x)$ ryze konvexní, pro $x \in (-\infty, 1-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\rangle$ je $f(x)$ ryze konkávní, pro $x_2 = 1-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$ dostáváme inflexní bod $I = \left[1-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right]$.

4 Z limity $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ plyne, že přímka $x = 1$ je svislou asymptotou.

Hledejme tedy šikmou asymptotu $y = kx + q$ pro $x \to -\infty$,

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x(x-1)} = \left|\tfrac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-1}{1-x}}{2x-1} = 0,$$

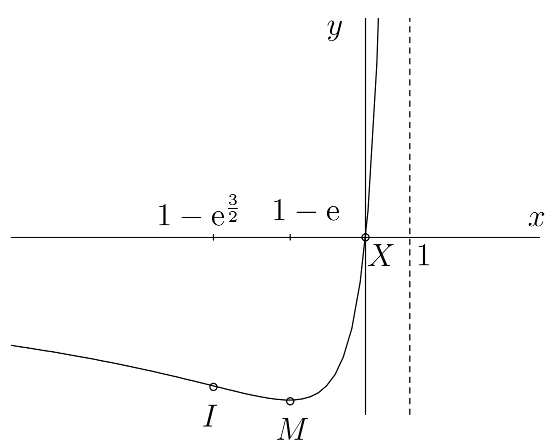
$$q = \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx\big) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1-x)}{x-1} = 0.$$

Přímka $y = 0$ je asymptotou pro $x \to -\infty$.

5 Na základě provedených vyšetření můžeme sestavit následující tabulku popisující chování vyšetřované funkce a následně graf:

x	$-\infty$		$1-\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$		$1-\mathrm{e}$		1
y	0		$-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		$-\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$y' \Rightarrow$			$\searrow$			$\nearrow$	
$y'' \Rightarrow$		$\frown$			$\smile$		
	$y = 0$ as.		I infl. b.		M lok. min.		$x = 1$ as.

$X = Y = [0, 0]$



■

***Příklad* 115**. Vyšetřete průběh funkce $y = (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Řešení:

1 **a)** $D(f) = (-\infty,\, 0) \cup (0,\, +\infty)$,

b) funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická,

c) průsečík s osou y neexistuje
průsečík s osou x je bod $X = [-2,\, 0]$,

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\infty, \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty,$

$\lim\limits_{x\to 0^-} (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0, \qquad \lim\limits_{x\to 0^+} (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty.$

2 $$y' = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + (x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, \frac{x^2-x-2}{x^2} \;\begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad (x+1)(x-2) \begin{Bmatrix} > \\ < \\ = \end{Bmatrix} 0;$$

$f(x)$ je rostoucí pro $x \in (-\infty,\, -1\rangle$ a $x \in \langle 2,\, +\infty)$,
$f(x)$ je klesající pro $x \in \langle -1,\, 0)$ a $x \in (0,\, 2\rangle$,
bod $M_1 = \left[-1, \mathrm{e}^{-1}\right]$ je lokálním maximem a bod $M_2 = \left[2, 4e^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\right]$ lokálním minimum.

3 $$y'' = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{x^2-x-2}{x^2} + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, \frac{(2x-1)x^2 - (x^2-x-2)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, \frac{-x^2+x+2+2x^3-x^2-2x^3+2x^2+4x}{x^4} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\, \frac{5x+2}{x^4} \;\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}\; 0 \iff$$

$$\iff \quad 5x+2 \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} 0 \quad \iff \quad x \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} -\frac{2}{5};$$

$f(x)$ je ryze konvexní pro $x \in \left\langle -\frac{2}{5},\, 0\right)$ a pro $x \in (0, +\infty)$,

$f(x)$ je ryze konkávní pro $x \in \left(-\infty,\, -\frac{2}{5}\right\rangle$,

bod $I = \left[-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}\,\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}\right]$ je inflexním bodem.

4 Přímka $x = 0$ je svislou asymptotou zprava (viz **1d)**), tedy $x \to 0^+$, $y \to +\infty$.

Nyní spočítáme šikmou asymptotu $y = kx + q$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1 \cdot \mathrm{e}^0 = \boxed{1},$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \left[(x+2)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \boxed{1} \cdot x\right] = |\infty - \infty| = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \left[\frac{x+2}{x}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right] =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1\right] = |\infty \cdot 0| = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{0}{0}\right| \overset{l'H}{=}$$

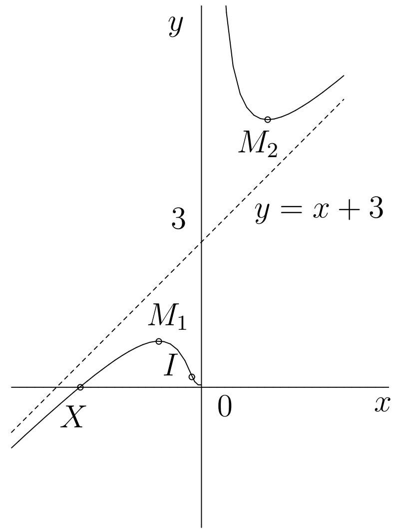
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{2}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{2}{x}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \left(1+\frac{2}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1} = 3.$$

Přímka $y = x + 3$ je asymptotou pro $x \to +\infty$ a pro $x \to -\infty$.

(5) Sestavíme tabulku chování funkce a znázorníme graf funkce:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{5}$		0		2		$+\infty$
y	$-\infty$		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$\frac{8}{5}\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}$		$0 \mid +\infty$		$4\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$y' \Rightarrow$		$\nearrow$			$\searrow$			$\searrow$		$\nearrow$	
$y'' \Rightarrow$			$\frown$			$\smile$			$\smile$		
	$y = x + 3$ as.		M_1 lok. max.		I infl. b.		$x = 0$ as.		M_2 lok. min.		$y = x + 3$ as.

$X = [-2, 0]$



■

***Příklad* 116**. Vyšetřete průběh funkce $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-x}$.

Řešení:

(1) **a)** $D(f) = (-\infty, +\infty)$,

b) funkce není ani sudá, ani lichá,

c) průsečík s osami je jediný $X = Y = [0, 0]$,

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-x} = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} \cdot \mathrm{e}^{-x} = |\infty \cdot 0| = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\mathrm{e}^x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

(2) $y' = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} \cdot \mathrm{e}^{-x} - \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}^x\,\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{3} - x\right)$;

$$D(f') = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty.$$

Znaménko derivace určíme pomocí tabulky:

x	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$ … $+\infty$
$\sqrt[3]{x}$	$-$	$+$	$+$
$\frac{2}{3} - x$	$+$	$+$	$-$
y'	$-$	$+$	$-$

Funkce je rostoucí pro $x \in \left\langle 0, \frac{2}{3}\right\rangle$ a

klesající pro $x \in (-\infty, 0\rangle$ a $x \in \left\langle\frac{2}{3}, +\infty\right)$,

$$f'\left(\frac{2}{3}\right)=0 \;\Rightarrow\; f\left(\frac{2}{3}\right)=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}} \doteq 0.3918,\;\text{ bod }\; M=\left[\frac{2}{3},0.39\right]\;\text{ je lok. maximem.}$$

3 $y''=-\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)+\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}-\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\left(\frac{2}{9}\,x^{-\frac{4}{3}}+\frac{4}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)=$

$$=\frac{-x^{-\frac{1}{3}}}{\mathrm{e}^{x}}\left(\frac{2}{9x}+\frac{4}{3}-x\right)=\frac{-1}{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{e}^{x}}\cdot\frac{-9x^2+12x+2}{9x}=\frac{9x^2-12x-2}{9\sqrt[3]{x^4}\,\mathrm{e}^{x}}.$$

Určíme kořeny kvadratické rovnice $9x^2-12x-2=0$ a potom i znaménko druhé derivace.

$$x_{1,2}=\frac{+12\pm\sqrt{144+72}}{18}=\frac{12\pm 6\sqrt{6}}{18}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{3}\doteq \Big\langle \begin{array}{c}1.48\\ -0.15\end{array},$$

$$y''\begin{cases} >0 \text{ pro } x\in(-\infty,\,-0.15) \quad\text{a}\quad x\in(1.48,\,+\infty) \quad\Rightarrow\; f(x) \text{ je ryze konvexní} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{na } (-\infty,\,-0.15\rangle \quad\text{a}\quad \langle 1.48,\,+\infty), \\ <0 \text{ pro } x\in(-0.15,\,0) \quad\text{a}\quad x\in(0,\,1.48) \quad\Rightarrow\; f(x) \text{ je ryze konkávní,} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{na } \langle -0.15,\,0\rangle \quad\text{a}\quad \langle 0,\,1.48\rangle, \\ =0 \text{ pro } x_1=-0.15 \;\text{ a }\; x_2=1.48 \;\Rightarrow\; \text{inflexní body :} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I_1=[-0.15,\;0.34],\; I_2=[1.48,\;0.29]. \end{cases}$$

4 Svislá asymptota neexistuje, zbývá šikmá $y=kx+q$:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x}\,\mathrm{e}^{x}}=0,$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[3]{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|\overset{l'H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}=\;-\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;\text{ pro } x\to-\infty \;\text{ asymptota neexistuje,}$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{e}^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\mathrm{e}^{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|\overset{l'H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}}{\mathrm{e}^{x}}=0.$$

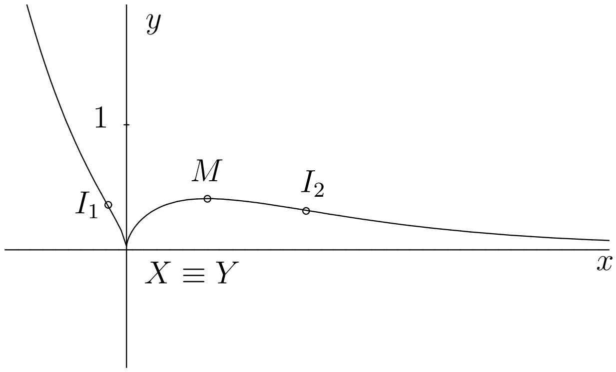
Přímka $y=0$ je asymptotou pro $x\to+\infty$.

5

x	$-\infty$		-0.15		0		$\frac{2}{3}$		1.48		$+\infty$
y	$+\infty$		0.34		0		0.39		0.29		0
$y'\Rightarrow$			$\searrow$	$-\infty$		∞ $\nearrow$			$\searrow$		
$y''\Rightarrow$		$\smile$		$\frown$			$\frown$			$\smile$	
			I_1		$X=Y$		M		I_2		$y=0$
							lok. max.				as.
			infl. b.						infl. b.		

$X=Y=[0,0]$

Nyní vše znázorníme grafem funkce:



■

***Příklad* 117**. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

Řešení:

1 **a)** $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$,

b) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ funkce je sudá, tedy její graf bude souměrný podle osy y. Proto se budeme zabývat jen vyšetřováním chování funkce na množině $\langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$.

c) Průsečík s osou y je bod $Y = [0, -1]$ a s osou x neexistuje, protože $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \neq 0$ pro všechna uvažovaná $x \in D(f)$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 1,$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty.$$

2 $$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} < 0 \quad \text{pro všechna } x > 0 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow$ na množinách $\langle 0, 1)$, $(1, +\infty)$ je funkce klesající,

$y'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad$ bod $M = [0, -1]$ bude lokálním maximem.

3 $$y'' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}.$$

Pro všechna uvažovaná x je $y'' \neq 0 \quad \Rightarrow \quad$ inflexní bod neexistuje.

$$y'' \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-1)^3 \gtrless 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \gtrless 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x| \gtrless 1.$$

Pro $x \in (1, +\infty)$ je funkce ryze konvexní, pro $x \in \langle 0, 1)$ je ryze konkávní.

4 Z bodu **1d)** plyne, že přímka $x = 1$ je svislou asymptotou.

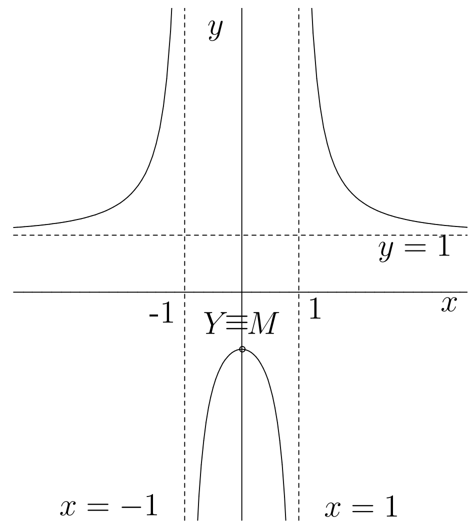
Nyní zjistíme, zda existuje šikmá asymptota $y = kx + q$:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2-1)x} = 0, \qquad q = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2-1} = 1.$$

Přímka $y = 1$ je šikmou asymptotou.

⑤ Při znázornění grafu využijeme symetrii podle osy y:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y	$\cdots$	-1		$-\infty$ $\vert$ $+\infty$		1
$y' \Rightarrow$	$\cdots$		$\searrow$		$\searrow$	
$y'' \Rightarrow$	$\cdots$		$\frown$		$\smile$	
		$Y\equiv M$		$x=1$		$y=1$
		lok. max.		as.		as.



■

***Příklad* 118**. Vyšetřete průběh funkce $y = 2x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

Řešení:

① **a)** $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

b) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ funkce je lichá, tedy její graf bude souměrný podle počátku a proto se omezíme při vyšetřování funkce na interval $(0, +\infty)$.

c) průsečíky s osami neexistují,

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

② $y' = 2 + \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2 - \dfrac{1}{x^2+1} > 0$ pro všechna $x \in (0, +\infty)$,

protože $\dfrac{1}{x^2+1} < 2$, dokonce $\dfrac{1}{x^2+1} < 1$. Funkce je rostoucí pro $x \in (0, +\infty)$ a lokální extrémy neexistují.

③ $y'' = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} > 0$ pro všechna $x \in (0, +\infty) \Rightarrow$ funkce je ryze konvexní pro všechna $x \in (0, +\infty)$ a nemá inflexní body.

④ Svislá asymptota neexistuje (viz **1d)**), zbývá asymptota typu $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x}\right) = 2,$$

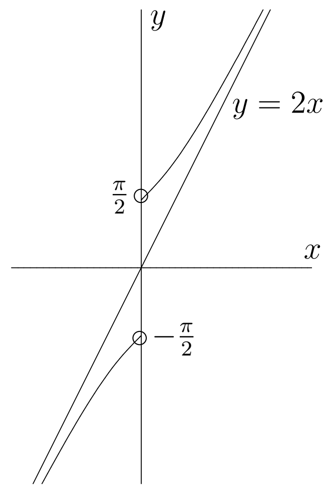
$$q = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(2x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} - 2x\right) = 0.$$

Přímka $y = 2x$ je asymptotou pro $x \to +\infty$.

⑤ Při znázornění grafu využijeme symetrii podle počátku:

x		0 $\qquad$ $+\infty$
y	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $+\infty$
$y' \Rightarrow$	$\cdots$	$\nearrow$
$y'' \Rightarrow$	$\cdots$	$\smile$

$y = 2x$
asympt.



■

***Příklad* 119**. Vyšetřete průběh funkce $y = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x}$.

Řešení:

① **a)** $D(f) = (-\infty, +\infty)$,

b) Funkce není ani sudá, ani lichá, ale je periodická s primitivní periodou 2π, neboť $f(x + 2\pi) = \dfrac{\cos(x + 2\pi)}{2 + \sin(x + 2\pi)} = \dfrac{\cos x}{2 + \sin x} = f(x)$, proto stačí, když funkci vyšetříme na intervalu délky 2π. Vybereme si např. interval $\langle -\pi, \pi \rangle$.

c) Průsečík s osou y je bod $Y = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

Průsečíky s osou x spočítáme z rovnice

$$\frac{\cos x}{2 + \sin x} = 0 \quad \to \quad \cos x = 0 \quad \to \quad x_{1,2} = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Dostali jsme body $X_1 = \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ a $X_2 = \left[\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$.

d) $f(-\pi) = f(\pi) = \dfrac{\cos \pi}{2 + \sin \pi} = -\dfrac{1}{2}$.

2) $$y' = \frac{-\sin x\,(2 + \sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^2} =$$

$$= \frac{-2\sin x - 1}{(2 + \sin x)^2} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \iff \quad -2\sin x - 1 \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} 0 \iff \quad \sin x \begin{cases} < \\ > \\ = \end{cases} -\frac{1}{2},$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{5}{6}\pi \ \text{ a } \ x_2 = -\frac{\pi}{6},$$

$y' > 0$ je pro $x \in \left(-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je rostoucí na $\left\langle -\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6} \right\rangle$,

$y' < 0$ je pro $x \in \left(-\pi, \dfrac{-5\pi}{6}\right)$ a $x \in \left(\dfrac{-\pi}{6}, \pi\right) \Rightarrow f(x)$ je klesající na $\left\langle -\pi, \dfrac{-5\pi}{6} \right\rangle$ a na $\left\langle \dfrac{-\pi}{6}, \pi \right\rangle$,

$$f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{bod} \;\; M_1 = \left[-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \text{ je lokálním minimem,}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad \text{bod} \;\; M_2 = \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \text{ je lokálním maximem.}$$

3 $y'' = \dfrac{-2\cos x\,(2+\sin x)^2 + (2\sin x + 1)\cdot 2\,(2+\sin x)\cdot\cos x}{(2+\sin x)^4} =$

$$= \frac{-2\cos x\,(2+\sin x) + 2\cos x\,(2\sin x+1)}{(2+\sin x)^3} = \frac{2\cos x\,(\sin x - 1)}{(2+\sin x)^3},$$

$$y'' \left\{ \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \right. 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\cos x\,(\sin x - 1) \left\{ \begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix} \right. 0 \;\; \left| \begin{matrix} \text{použili jsme, že} \\ 2+\sin x > 0 \end{matrix} \right|,$$

$$y'' = 0 : \;\; \cos x\,(\sin x - 1) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{lll} \cos x = 0 & \Rightarrow & x_{1,2} = \pm\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \sin x = 1 & \Rightarrow & x_3 = \dfrac{\pi}{2}. \end{array} \right.$$

Znaménko y'' určíme pomocí tabulky:

x	$-\pi$ … $-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$ … $\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$ … π
$\cos x$	$-$	$+$	$-$
$\sin x - 1$	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	$-$	$+$

$$y'' > 0 \;\text{ pro }\; x \in \left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \; x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle \quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ je ryze konvexní}$$

$$\text{na } \left\langle -\pi, -\frac{\pi}{2}\right\rangle \text{ a na } \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle,$$

$$y'' < 0 \;\text{ pro }\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \;\Rightarrow\; f(x) \text{ je ryze konkávní na } \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle,$$

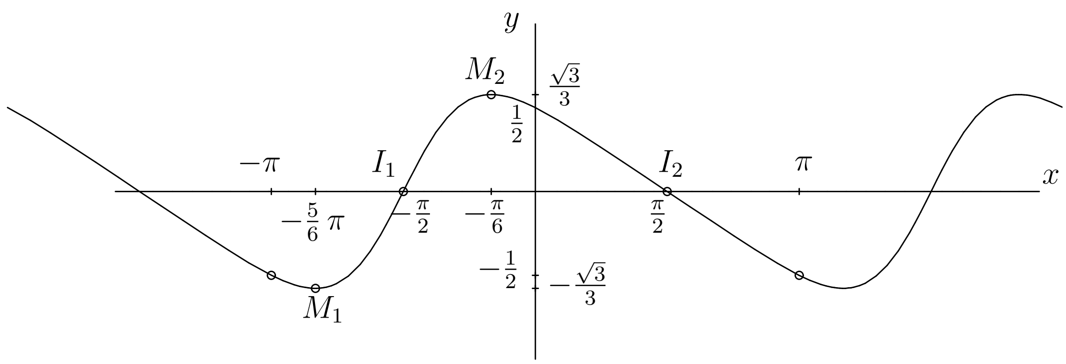
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \text{body } \; I_1 = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] = X_1 \;\text{ a }\; I_2 = \left[\frac{\pi}{2}, 0\right] = X_2 \text{ jsou}$$

$$\text{inflexní.}$$

4 Funkce nemá žádné asymptoty.

5

x	…	$-\pi$		$-\frac{5}{6}\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		π	…
y		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$-\frac{1}{2}$	
$y' \Rightarrow$			$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		
$y'' \Rightarrow$			$\smile$		$\smile$		$\frown$		$\frown$		$\smile$		
				M_1		I_1		M_2		I_2			
						infl. b.				infl. b.			
				lok. min.				lok. max.					



■

***Příklad* 120**. Vyšetřete průběh funkce $y = |x-2|\,(x+3)$.

Řešení:

① **a)** $D(f) = (-\infty, +\infty)$,

b) funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická,

c) průsečík s osou y je bod $Y = [0, 6]$,
průsečíky s osou x jsou body $X_1 = [2, 0]$, $X_2 = [-3, 0]$,

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x-2|\,(x+3) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} |x-2|\,(x+3) = +\infty$.

②

Označme $y = \left\langle \begin{array}{ll} (x-2)(x+3) = x^2+x+6 & \text{pro } x \in \langle 2, +\infty) \\ -(x-2)(x+3) = -(x^2+x+6) & \text{pro } x \in (-\infty, 2) \end{array} \right.$.

Potom pro

$\underline{x \in \langle 2, +\infty)}: \ y' = 2x+1 \begin{cases} > 0, & x \in \langle 2, +\infty),\ f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0 & \emptyset \\ = 0 & x = -\dfrac{1}{2} \notin \langle 2, +\infty) \end{cases}$,

$\underline{x \in (-\infty, 2)}: \ y' = -(2x+1) \begin{cases} > 0, & x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right),\ f(x) \text{ je rostoucí na } \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right\rangle \\ < 0 & x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 2\right),\ f(x) \text{ je klesající na } \left\langle -\dfrac{1}{2}, 2\right\rangle \\ = 0 & x = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$,

bod $M = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{4}\right]$ je lokálním maximem, $y'(2^+) = 5$, $y'(2^-) = -5$.

③ Pro $x \in \langle 2, +\infty)$ je $y'' = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je ryze konvexní na $\langle 2, +\infty)$,
pro $x \in (-\infty, 2)$ je $y'' = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je ryze konkávní na $(-\infty, 2\rangle$.

④ Svislá asymptota neexistuje.
Nyní vyšetříme, zda existuje asymptota šikmá $y = kx + q$:

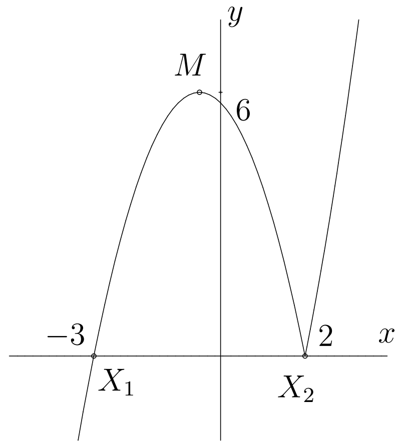
$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{|x-2|(x+3)}{x} = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ šikmá asymptota též neexistuje.

⑤

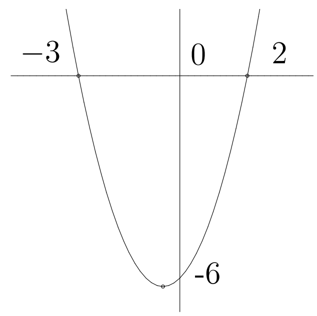
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
y	$-\infty$		$\frac{25}{4}$		0		$+\infty$
$y' \Rightarrow$		$\nearrow$		$\searrow$	$-5 \mid 5$	$\nearrow$	
$y'' \Rightarrow$			$\frown$			$\smile$	
			M		X_2		

lok. max.

$Y = [0, 6],\ X_1 = [-3, 0],\ X_2 = [2, 0]$



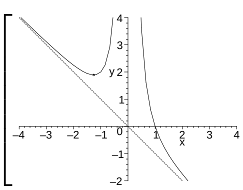
Kdybychom měli funkci $y = (x-2)(x+3)$, pak by grafem byla parabola. (Srovnejte s předchozím grafem.)



■

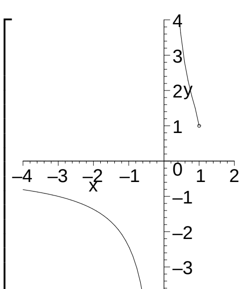
• Vyšetřete průběhy následujících funkcí:

121. $y = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$



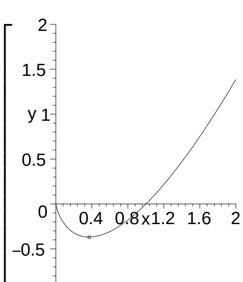
$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$M = \left[-\sqrt[3]{2},\ \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right]$ lok. minimum
asym. y=-x

122. $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{1 - x}}$



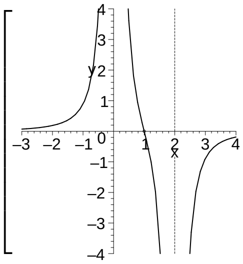
$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

123. $y = x \ln x$



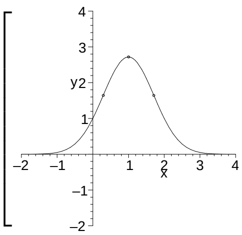
$D(f) = (0, +\infty)$
$M = \left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\ -\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ lok. minimum

124. $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}$



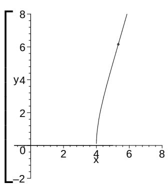
$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$
$I = [1, 0]$ infl. bod

125. $y = \mathrm{e}^{2x - x^2}$



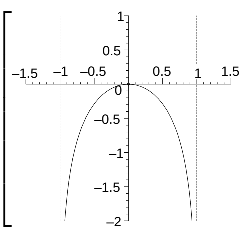
$D(f) = (-\infty, +\infty)$
$M = [1, \mathrm{e}]$ lok. max.
$I_1 = \left[1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$,
$I_2 = \left[1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right]$
jsou inflexní body

126. $y = x\sqrt{x - 4}$



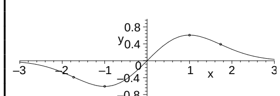
$D(f) = \langle 4, +\infty)$
lok. extrémy neexistují
$I = \left[\dfrac{16}{3}, \dfrac{32}{3\sqrt{3}}\right]$ infl. bod

127. $y = \ln(1 - x^2)$



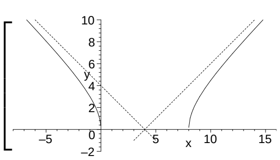
$D(f) = (-1, 1)$
sudá funkce
$M = [0, 0]$ lok. max.

128. $y = x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$



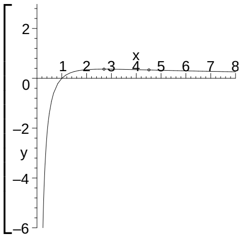
$D(f) = (-\infty, +\infty)$
lichá funkce
$M_1 = \left[-1, -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]$ lok. min.
$M_2 = \left[1, \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right]$ lok. max.
$I_1 = \left[-\sqrt{3}, -\sqrt{\dfrac{3}{\mathrm{e}^3}}\right]$,
$I_2 = \left[\sqrt{3}, \sqrt{\dfrac{3}{\mathrm{e}^3}}\right]$,
$I_3 = [0, 0]$ inflexní body

129. $y = \sqrt{x^2 - 8x}$



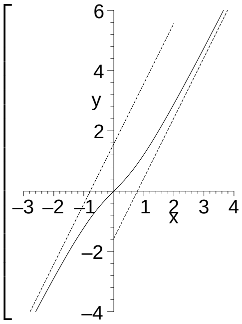
$D(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 8, \infty)$
Asymptoty: $y = x - 4,\ x \to +\infty$
$y = -x + 4,\ x \to -\infty$

130. $y = \dfrac{\ln x}{x}$



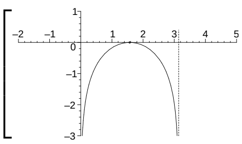
$D(f) = (0, +\infty)$
$M = \left[\mathrm{e}, \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ lok. max.
$I = \left[\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}\right]$ infl. b.

131. $y = 2x - \operatorname{arctg} x$



$D(f) = (-\infty, +\infty)$, lichá funkce
Asymptoty: $y = 2x - \dfrac{\pi}{2},\ x \to +\infty$
$y = 2x + \dfrac{\pi}{2},\ x \to -\infty$
[0,0] inflexní bod

132. $y = \ln \sin x$



$D(f) = (2k\pi, (2k+1)\pi)$
perioda 2π
$M = \left[\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ lok. max. na $(0, \pi)$

12. Taylorova věta, styk dvou křivek

***Příklad* 133**. Rozviňte funkci $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$ v mocninách $(x+2)$ a výsledek využijte k výpočtu $f(-1.9)$.

Řešení: Má-li funkce $f(x)$ derivace až do řádu $(n+1)$ na intervalu (a,b), obsahující bod x_0, pak pro všechna $x \in (a,b)$ platí **Taylorův vzorec**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1},$$

kde $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ a bod ξ je mezi body x a x_0. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem** n-tého stupně v bodě x_0 nebo polynomem v mocninách $(x-x_0)$. Výraz $R_{n+1}(x)$ se nazývá **Lagrangeův tvar zbytku**.

V daném příkladě $f(x)$ je polynom 4. stupně, a to znamená, že $f^{n+1}(x) = 0$ pro všechna $n \geq 4$ $(R_{n+1} = 0)$. Nyní spočítáme všechny nenulové derivace v bodě $x_0 = -2$ a pak je dosadíme do uvedeného vzorce:

	$x_0 = -2$
$f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 1$	-33
$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 10x + 2$	26
$f''(x) = 12x^2 + 18x - 10$	2
$f'''(x) = 24x + 18$	-30
$f^4(x) = 24$	24

$$f(x) = -33 + 26(x+2) + \frac{2}{2!}(x+2)^2 - \frac{30}{3!}(x+2)^3 + \frac{24}{4!}(x+2)^4 =$$
$$= -33 + 26\,(x+2) + (x+2)^2 - 5\,(x+2)^3 + (x+2)^4.$$

Nyní velmi lehce spočítáme $f(-1.9)$, protože závorka $(x+2)$ po dosazení nám dá 0.1, a tu snadno umocníme:

$$f(-1.9) = -33 + 26 \cdot 0.1 + 0.1^2 - 5 \cdot 0.1^3 + 0.1^4 = -33 + 2.6 + 0.01 - 0.005 + 0.0001 =$$
$$= -30.3949.$$

■

***Příklad* 134**. Sestavte Taylorův polynom 4. stupně $T_4(x)$ funkce $f(x) = \ln x$ v bodě $x_0 = 3$. Napište zbytek R_5 v Lagrangeově tvaru.

Řešení :

	$x_0 = 3$
$f(x) = \ln x$	$\ln 3$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{3}$
$f''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{9}$

	$x_0 = 3$
$f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$	$\dfrac{2}{27}$
$f^{(4)}(x) = \dfrac{-6}{x^4}$	$-\dfrac{2}{27}$
$f^{(5)}(x) = \dfrac{24}{x^5}$	

$$T_4(x) = \ln 3 + \frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{9\cdot 2!}(x-3)^2 + \frac{2}{27\cdot 3!}(x-3)^3 - \frac{2}{27\cdot 4!}(x-3)^4 =$$
$$= \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \frac{(x-3)^3}{81} - \frac{(x-3)^4}{324}.$$

Zbytek hledáme ve tvaru $R_{n+1} = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, kde ξ je mezi x a x_0.

$R_5 = \dfrac{\frac{24}{\xi^5}}{5!}(x-3)^5 = \dfrac{(x-3)^5}{5\cdot\xi^5}$, kde buď $\xi \in (x,3)$ nebo $\xi \in (3,x)$.

■

***Příklad* 135**. Napište Taylorův polynom 8. stupně funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Máme dvě možnosti, jak tuto úlohu vyřešit. První, jako v předcházejících příkladech, spočívá ve výpočtu všech derivací od nultého až po osmého řádu, což by bylo dost pracné. Proto použijeme druhou možnost, a to známý vzorec

$\mathrm{e}^x \doteq 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^8}{8!}$. Odtud plyne

$$x^2\,\mathrm{e}^x \doteq x^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\right).$$

Po vynásobení se omezíme na členy až do 8. stupně. Tak dostaneme hledaný polynom:

$$T_8(x) = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \frac{x^6}{4!} + \frac{x^7}{5!} + \frac{x^8}{6!}.$$

Poznámka: Taylorův polynom v bodě $x_0 = 0$ se také nazývá **MacLaurinův**.

■

***Příklad* 136**. Napište Taylorův polynom 10. stupně funkce $f(x) = \ln(1+x^2)$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Opět nebudeme 10× derivovat, ale použijeme známý Taylorův polynom funkce

$\ln(1+z) \doteq z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \dfrac{z^5}{5} + \cdots$ v bodě $z_0 = 0$,

do kterého dosadíme $z = x^2$ a obdržíme hledaný vzorec:

$$\ln(1+x^2) \doteq x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} = T_{10}(x).$$

■

***Příklad* 137**. Napište Taylorův polynom 7. stupně funkce $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Užijeme vzorec $2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$ a potom známý Taylorův polynom pro $\sin z \doteq z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!}$, do kterého dosadíme $z = 2x$. Nyní

$$f(x) = \sin x\cdot\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x \doteq \frac{1}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!}\right) =$$
$$= x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} = T_7(x).$$

■

***Příklad* 138**. Napište $T_4(x)$ funkce $f(x) = \mathrm{e}^x\cos x$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: V tomto příkladě použijeme známé Taylorovy polynomy pro

$$\mathrm{e}^x \doteq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad \cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

které vynásobíme navzájem a omezíme se jen na členy až do 4. stupně:

$$f(x) \doteq \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right) \doteq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^4}{4!} =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} = T_4(x).$$

■

Poznámka: V dalších třech příkladech budeme počítat přibližně číselné výrazy pomocí vhodného Taylorova polynomu. Přesnost výsledku bude tím větší, čím blíž bude bod x bodu x_0 a čím větší bude n.
Zkráceně: údaje R_{n+1}, n, $|x-x_0|$ se navzájem ovlivňují. Pokaždé budeme znát dva z těchto údajů a budeme hledat třetí z nich.

***Příklad* 139**. Dokažte, že při výpočtu hodnot funkce e^x pro $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ pomocí přibližného vzorce $\mathrm{e}^x \doteq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ se dopustíme chyby menší než 0.01. Vypočtěte $\sqrt{\mathrm{e}}$ a $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$.

Řešení: Jde o polynom 3. stupně, $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ čili známe n, známe $|x - x_0|$, určíme R_{n+1}. Proto si sestavíme zbytek R_4 pro $f(x) = \mathrm{e}^x$ a $x_0 = 0$:

$$\Big|R_4(x)\Big| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,(x - x_0)^4\right| = \frac{\mathrm{e}^\xi}{24}\cdot x^4.$$

Nyní provedeme odhad R_4 použitím předpokladů $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right\rangle$ a $\xi \in (0, x) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$:

$$\Big|R_4(x)\Big| = \frac{\mathrm{e}^\xi}{24}\cdot x^4 \leq \frac{\mathrm{e}^\xi}{24}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{\mathrm{e}^\xi}{24\cdot 16} < \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}{24\cdot 16} < \frac{2}{24\cdot 16} = \frac{1}{192} < 0.01.$$

Tím jsme dokázali, že nabídnutý vzorec zaručuje přesnost lepší než 0.01.

Spočítáme $\sqrt{\mathrm{e}}$ a $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$:

$$\sqrt{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} = \frac{79}{48} \doteq 1.64;$$

$$\sqrt[3]{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}} \doteq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} = \frac{226}{162} \doteq 1.39.$$

■

***Příklad* 140**. Spočítejte $\ln 1.1$ s chybou menší než 0.0001.

Řešení: Budeme vycházet z Taylorova polynomu funkce $f(x) = \ln(1 + x)$, kde $x_0 = 0$, $x = 0.1$. Nyní známe $|x - x_0|$, známe požadovanou přesnost, ale nevíme, kolik členů Taylorova polynomu budeme k tomu potřebovat. Sestavme si obecný zbytek:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}, \qquad \text{pro } f(x) = \ln(1 + x).$$

V příkladu **52 c)** jsme odvodili n-tou derivaci $\quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \; n \geq 1,$

ze které obdržíme $(n+1)$-ní derivaci $\quad f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(-1)^n \, n!}{(1+x)^{n+1}},$

a tu dosadíme do $R_{n+1}(x)$. Po úpravě dostaneme nerovnost pro n:

$$\left|R_{n+1}(x)\right| = \left|\frac{(-1)^n \, n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\begin{array}{l} x \in (0,\, 0.1\rangle \\ \xi \in (0,\, 0.1) \end{array}\right| =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1} \cdot (n+1)} \leq \frac{0.1^{n+1}}{(1+\xi)\,(n+1)} < \underline{\frac{0.1^{n+1}}{n+1} \leq 0.0001.}$$

Poslední nerovnice se nedá vyřešit přesně, ale nás zajímají jako řešení jen přirozená n.

Proto zkusíme

$n = 2: \; \dfrac{0.1^3}{3} \doteq 0.000333 \not\leq 0.0001,$

vidíme, že $n = 2$ nevyhovuje, a proto vezmeme další číslo

$n = 3: \; \dfrac{0.1^4}{4} \doteq 0.000025 \leq 0.0001.$

Nyní je nerovnost splněna. Z toho plyne, že $n = 3$ je nejmenší číslo splňující požadovanou nerovnost, všechna větší čísla též splňují tu nerovnost, ale my se omezíme na minimální počet členů v Taylorově polynomu, který zaručuje předepsanou přesnost, a sice

$$\ln(x+1) \doteq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \; \Big(= T_3(x)\Big).$$

Použitím tohoto vzorce dopočítáme číselnou hodnotu

$\ln(1.1) = f(0.1) \doteq 0.1 - \dfrac{0.1^2}{2} + \dfrac{0.1^3}{3} = 0.1 - 0.005 + 0.0003 = 0.0953.$

■

***Příklad* 141**. Pro které hodnoty x se při použití přibližné formule $\cos x \doteq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ nedopustíme větší chyby než 0.0001?

Řešení: V tomto příkladu známe počet členů v Taylorově polynomu, známe též přesnost, ale neznáme $|x - x_0| = |x|$, protože $x_0 = 0$. Jako obvykle budeme vycházet ze zbytku

$R_{2n+2}(x) = (-1)^{n+1} \cos\xi \cdot \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \quad$ pro $n = 1$,

$$|R_4(x)| = \left|(-1)^2 \cos\xi \cdot \frac{x^4}{4!}\right| < \frac{x^4}{24} < 0.0001.$$

Poslední nerovnici vyřešíme vzhledem k x:

$x^4 < 0.0024 \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt[4]{0.0024} = 0.2213 \quad \Rightarrow \quad x \in (-0.2213,\, 0.2213).$

■

POZNÁMKA: V odstavci 6. jsme též počítali číselné výrazy přibližně, avšak pomocí diferenciálu, což nebylo nic jiného než Taylorův polynom 1. stupně, u kterého jsme neurčovali přesnost.

***Příklad* 142**. Vypočítejte s přesností 10^{-5} přibližnou hodnotu čísla $\sqrt[3]{66}$.

Řešení: Příklad se podobá příkladu **140**, ale Taylorův polynom, který použijeme, se zatím nevyskytl v předcházejících příkladech. Proto prvním krokem bude sestavení vhodného Taylorova polynomu. Všimneme si, že hodnota $\sqrt[3]{66}$ je blízko hodnoty $\sqrt[3]{64}$ a tu známe ($\sqrt[3]{64} = 4$). Tak tedy

$\sqrt[3]{66} = \sqrt[3]{64+2} = \sqrt[3]{64\left(1+\dfrac{2}{64}\right)} = 4\cdot\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{32}} = 4\cdot\left(1+\dfrac{1}{32}\right)^{\frac{1}{3}}$ a nyní uvažovaná funkce bude $f(x) = 4\cdot\left(1+x\right)^{\frac{1}{3}}$, kde $x_0 = 0, x = \dfrac{1}{32}$. Dále můžeme spočítat určitý počet derivací $f^{(n)}(0)$ a sestavit Taylorův polynom n-tého stupně se zbytkem $R_{n+1}(x)$, ze kterého zjistíme, které nejmenší n bude splňovat podmínku $|R_{n+1}(x)| < 10^{-5}$. Avšak zde se nabízí další možnost a to použití zobecněné binomické věty:

$$f(x) = 4\,(1+x)^r = 4\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{r}{k}x^k + R_{n+1}(x)\right] =$$

$$= 4\left[1+\binom{r}{1}x+\binom{r}{2}x^2\cdots+\binom{r}{n}x^n+R_{n+1}(x)\right],\ \text{kde}\quad R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,x^{n+1}.$$

Derivace uvažované funkce se dají snadno spočítat:

$f'(x) = r\,(1+x)^{r-1},\ f''(x) = r\,(r-1)\,(1+x)^{r-2},\ \dots\ ,$

$f^{(n)}(x) = r\,(r-1)\dots(r-n+1)\,(1+x)^{r-n},\ f^{(n+1)}(x) = r\,(r-1)\dots(r-n)\,(1+x)^{r-n-1}$

a po jejich dosazení dostaneme

$$R_{n+1}(x) = \frac{r\,(r-1)\dots(r-n)\,(1+\xi)^{r-n-1}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \binom{r}{n+1}(1+\xi)^{r-n-1}\cdot x^{n+1}.$$

V našem příkladu je $r = \dfrac{1}{3},\ x \in \left\langle 0, \dfrac{1}{32}\right\rangle,\ \xi \in \left(0, \dfrac{1}{32}\right)$, tedy

$$\left|4\,R_{n+1}(x)\right| = \left|4\binom{\frac{1}{3}}{n+1}(1+\xi)^{\frac{1}{3}-n-1}\cdot x^{n+1}\right| =$$

$$= \left|4\binom{\frac{1}{3}}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+\frac{2}{3}}}\cdot x^{n+1}\right| < \left|4\binom{\frac{1}{3}}{n+1}\cdot 1\cdot\frac{1}{32^{n+1}}\right| < 10^{-5}.$$

Řešení pro n dostaneme opět jako v příkladu **140** postupným dosazením za $n = 2,\ n = 3,\ \dots$

$$n = 2:\ \left|4\binom{\frac{1}{3}}{3}\cdot\frac{1}{32^3}\right| = \left|\frac{4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 32^3}\right| = \frac{40}{3^6\cdot 6\cdot 32^3} < 10^{-5}.$$

Nerovnost je splněna a to znamená, že přibližný vzorec

$$f(x) = 4\,(1+x)^{\frac{1}{3}} \doteq 4\left(1+\frac{1}{3}\,x+\binom{\frac{1}{3}}{2}x^2\right) = 4\left(1+\frac{1}{3}\,x-\frac{1}{9}\,x^2\right)$$

zaručuje žádanou přesnost. Nyní dopočítáme

$$\sqrt[3]{66} = f\left(\frac{1}{32}\right) \doteq 4\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{32}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{32^2}\right) = \frac{4\,(9\cdot 1024+96-1)}{9\cdot 1024} = 4.04123.$$

■

Poznámka: V tomto příkladu jsme mohli použít i Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v okolí bodu $x_0 = 64$, avšak k docílení přesnosti 10^{-5} bychom určitě potřebovali polynom vyššího stupně než druhého, jelikož $x - x_0 = 2$, a my měli $x - x_0 = \dfrac{1}{32}$.

***Příklad* 143**. Určete řád styku křivky $y = f(x) = \cos x$ s křivkou $y = g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení: Křivky $y = f(x)$ a $y = g(x)$ mají v bodě x_0 ***styk:***

a) ***aspoň*** n***-tého řádu****, právě když platí $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ pro všechna $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;*

b) ***právě*** n***-tého řádu****, právě když platí $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$ pro všechna $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, a navíc $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$.*

Použijeme-li Taylorovy polynomy obou funkcí v bodě x_0, pak předchozí definice se dají vyslovit takto:

Grafy funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ mají v bodě x_0 ***styk:***

a) ***aspoň*** n***-tého řádu****, právě když platí $T_n(x)_{f(x)} = T_n(x)_{g(x)}$;*

b) ***právě*** n***-tého řádu****, právě když platí $T_n(x)_{f(x)} = T_n(x)_{g(x)}$, a též $T_{n+1}(x)_{f(x)} \neq T_{n+1}(x)_{g(x)}$.*

Při řešení daného příkladu použijeme známé Taylorovy polynomy obou funkcí:

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \qquad \mathrm{e}^z \doteq 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots .$$

Položíme-li $z = -\dfrac{x^2}{2}$, pak

$$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots .$$

Nyní porovnáním vzorců pro $\cos x$ a $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ dostáváme, že $T_3(x)_{f(x)} = T_3(x)_{g(x)}$, ale $T_4(x)_{f(x)} \neq T_4(x)_{g(x)}$, z čehož plyne, že obě křivky mají styk právě 3. řádu.

■

Poznámka: Geometrický význam styku dvou křivek $y = f(x)$, $y = g(x)$ v bodě x_0 je následující:

1) styk 0. řádu: obě křivky mají společný bod $[x_0,\ f(x_0)] = [x_0,\ g(x_0)]$;

2) styk 1. řádu: obě křivky mají společnou tečnu ve společném bodě;

3) styk 2. řádu: kromě společné tečny mají též společnou oskulační kružnici ve společném bodě, tedy i stejnou křivost.

***Příklad* 144**. Určete konstanty a, b a bod x_0 tak, aby přímka $y = ax + b$ měla s křivkou $y = x^3 - 3x^2 + 2$ v bodě x_0 styk aspoň 2. řádu. Může být tento styk též 3. řádu ?

Řešení: Příklad vyřešíme pomocí rovnosti jednotlivých derivací. Označme přímku $y = f(x) = ax + b$ a křivku $y = g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Pro styk 2. řádu musí platit:

$$\begin{array}{lllc}
f(x) = ax + b, & g(x) = x^3 - 3x^2 + 2 & \Rightarrow & ax_0 + b = x_0^3 - 3x_0^2 + 2, \\
f'(x) = a, & g'(x) = 3x^2 - 6x & \Rightarrow & a = 3x_0^2 - 6x_0, \\
f''(x) = 0, & g''(x) = 6x - 6 & \Rightarrow & 0 = 6x_0 - 6.
\end{array}$$

Z poslední rovnice dostáváme $x_0 = 1$, potom z prostřední $a = -3$ a nakonec $b = 3$.

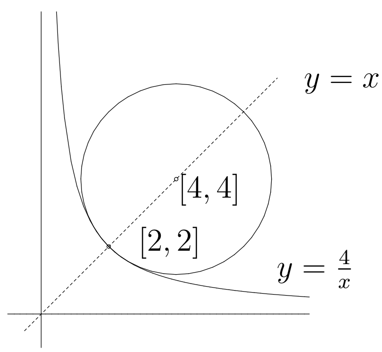
Dále si můžeme všimnout, že $f'''(x) = 0 \neq g'''(x) = 6$.

Závěr zní: Přímka $y = -3x + 3$ má s křivkou $y = x^3 - 3x^2 + 2$ v bodě $x_0 = 1$ styk právě 2. řádu. ∎

***Příklad* 145**. Použitím definice styku 2. řádu napište rovnici oskulační kružnice křivky $y = \dfrac{4}{x}$ v bodě $A = [2, 2]$. Nakreslete obrázek.

Řešení: Daná křivka a zatím libovolná oskulační kružnice musí procházet společným bodem A a musí mít stejné 1. derivace i 2. derivace v bodě A. Proto zderivujeme rovnici dané křivky i rovnici oskulační kružnice v bodě A.

	A	
$y = \dfrac{4}{x}$	2	$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \overset{A}{\Longrightarrow} (2-m)^2 + (2-n)^2 = r^2,$
$y' = -\dfrac{4}{x^2}$	-1	$2(x-m) + 2(y-n)\cdot y' = 0 \overset{A}{\Longrightarrow} (2-m) + (2-n)\cdot(-1) = 0,$
$y'' = \dfrac{8}{x^3}$	1	$1 + (y')^2 + (y-n)y'' = 0 \overset{A}{\Longrightarrow} 1 + 1 + (2-n)\cdot 1 = 0.$



Ze soustavy na pravé straně postupně vypočítáme $n = 4$, $m = 4$ a $r = 2\sqrt{2}$. Hledaná oskulační kružnice má rovnici

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 8.$$

∎

POZNÁMKA: Rovnici oskulační kružnice ke křivce $y = f(x)$ odvozujeme ze soustavy

$$\begin{cases} (x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2 \\ (x-m) + (y-n)\cdot y' = 0 \\ 1 + (y')^2 + (y-n)y'' = 0 \end{cases},$$ kterou řešíme vzhledem k m, n a r:

$$n = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}, \qquad m = x - \frac{y'\left(1 + (y')^2\right)}{y''}, \qquad r = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Poloměr oskulační kružnice nazýváme též **poloměrem křivosti** a číslo $k = \dfrac{1}{r}$ **křivostí** křivky.

***Příklad* 146**. Najděte oskulační kružnici křivky $y = x^2 - 6x + 10$ v bodě $A = [3, ?]$.

Řešení: y-ovou souřadnici bodu A spočítáme dosazením $x = 3$ do rovnice paraboly: $y = 9 - 18 + 10 = 1$. Dále spočítáme $y'(3)$ a $y''(3)$, potom dosadíme do vzorců z předcházející poznámky:

$y' = 2x - 6 \,\big|_3 = 0,\ y'' = 2,$

$n = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2},\ m = 3 - 0 = 3,\ r = \dfrac{(1+0)^{\frac{3}{2}}}{2} = \dfrac{1}{2}.$

Tím je oskulační kružnice určena: $\quad (x-3)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}.$

■

***Příklad* 147**. Určete křivost křivky $y = \ln \dfrac{1}{\cos x}$ v libovolném bodě.

Řešení: Použijeme vzorec $k = \dfrac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Danou funkci přepíšeme do vhodnějšího tvaru pro derivování:

$y = \ln \dfrac{1}{\cos x} = -\ln \cos x,$

$y' = -\dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x, \qquad y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Definičním oborem jsou intervaly, na nichž je

$\cos x > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right),\ n \in Z.$

Nyní dosadíme a upravíme výraz pro křivost křivky c:

$$k = \frac{\left|\dfrac{1}{\cos^2 x}\right|}{\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cos^2 x \left(1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\cos^2 x \cdot \left(\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x \cdot \dfrac{1}{\cos^3 x}} = \cos x.$$

Můžeme ještě dodat, že křivost křivky $k(x) = \cos x$ bude největší v bodech $x = 2n\pi,\ k_{\max}(2n\pi) = 1$ a tedy poloměr křivosti v těchto bodech bude minimální $r_{\min}(2n\pi) = \dfrac{1}{1} = 1.$

■

***Příklad* 148**. Ve kterém bodě má graf funkce $y = \ln x$ nejmenší poloměr křivosti? Jaká je jeho hodnota?

Řešení: Určíme poloměr křivosti v libovolném bodě jako funkci $r(x)$ a potom najdeme $r_{\min}(x_0)$ jako extrém funkce $r(x)$.

$y = \ln x, \quad x > 0, \qquad y' = \dfrac{1}{x}, \qquad y'' = \dfrac{-1}{x^2};$

$$r(x) = \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-\dfrac{1}{x^2}\right|} = \frac{\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{x^2}} = \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x^2}{x^3} = \frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{x},$$

$$r'(x) = \left[\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x}\right]' = \frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} + \left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 3\sqrt{x^2+1} - (x^2+1)\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2} = \sqrt{x^2+1}\left(3 - \frac{x^2+1}{x^2}\right) = \sqrt{x^2+1}\cdot\frac{3x^2-x^2-1}{x^2} =$$
$$= \sqrt{x^2+1}\cdot\frac{2x^2-1}{x^2},$$

$$r'(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad 2x^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad x=\sqrt{\frac{1}{2}} \ \big(\text{uvažujeme jen } x>0\big).$$

Druhou derivaci nebudeme počítat, abychom se přesvědčili, že

$$r\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$ je skutečně minimální hodnotou, protože

z grafu funkce $y = \ln x$ víme, že přímka $x = 0$ je asymptotou a $r_{\max}$ neexistuje, jelikož $\lim\limits_{x\to 0^+} r(x) = +\infty$.

■

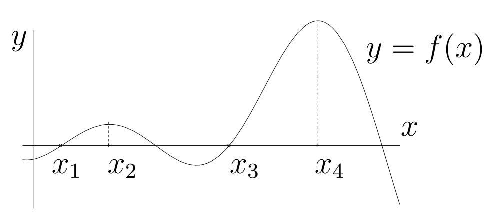
***Příklad* 149**. Určete křivost grafu diferencovatelné funkce v bodech lokálních extrémů.

Řešení: Uvažujeme-li funkci $y = f(x)$, pak v bodech lokálních extrémů platí $f'(x) = 0$.
Potom

$$k = \frac{|y''|}{\big(1+(y')^2\big)^{\frac{3}{2}}} = |y''|.$$

■

***Příklad* 150**. Je-li funkce $y = f(x)$ dána svým grafem. seřaďte podle velikosti



následující hodnoty: $f(x_1)$, $f'(x_1)$, $f''(x_2)$, $f'(x_3)$ a $f''(x_4)$.

Řešení: Především určíme znaménka jednotlivých hodnot:

$f(x_1) = 0$, protože graf funkce protíná osu x v bodě x_1;

$\left.\begin{array}{l} f'(x_1) > 0 \\ f'(x_3) > 0 \end{array}\right\}$ funkce je rostoucí v obou bodech;

$f'(x_1) < f'(x_3)$, protože v bodě x_1 je úhel s osou x menší než v bodě x_3;

$\left.\begin{array}{l} f''(x_2) < 0 \\ f''(x_4) < 0 \end{array}\right\}$, funkce je konkávní v obou bodech;

$0 > f''(x_2) > f''(x_4)$, protože křivost v bodě x_2 je menší než křivost v bodě x_4 $\big(|f''(x_2)| < |f''(x_4)|\big)$.

Nyní seřadíme hodnoty:

$f''(x_4) < f''(x_2) < f(x_1) < f'(x_1) < f'(x_3)$.

■

151. Rozložte mnohočlen $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách $(x+1)$ a výsledek využijte k výpočtu $f(-1.1)$.

$\left[f(x) = 1 + 4(x+1) - 3(x+1)^2 - 2(x+1)^3 + (x+1)^4,\ f(-1.1) = 0.5721\right]$

152. Dokažte, že mnohočlen $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ má trojnásobný kořen $x = 1$.
(Návod: Použijte Taylorův polynom v mocninách $(x-1)$.]

$\left[f(x) = 3(x-1)^3 + 3(x-1)^4 + (x-1)^5\right]$

153. Napište Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ v bodě $x_0 = 2$.

$\left[T_4(x) = 1 - (x-2) + (x-2)^2 - (x-2)^3 + (x-2)^4\right]$

154. Sestavte Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x) = \sqrt{1+x}$ v bodě $x_0 = 0$ a s jeho pomocí vypočítejte $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Určete přesnost výpočtu této hodnoty.

$\left[T_2(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8},\ \sqrt{\frac{3}{2}} \doteq T_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{39}{32} = 1.21,\ |R_3(x)| < 0.01\right]$

155. Sestavte Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$ v bodě $x_0 = 0$. Napište též příslušný zbytek.

$\left[T_4(x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}x^3 + \frac{27}{8}x^4,\ R_5(x) = \frac{\mathrm{e}^{3\xi} \cdot 81}{40}\,x^5,\ 0 < |\xi| < |x|\right]$

156. Sestavte Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x) = \ln(1-x) \cdot \sin 2x$ v bodě $x_0 = 0$.

$\left[T_4(x) = -2x^2 - x^3 + \frac{2}{3}x^4\right]$

157. Spočítejte $\sin 32°$ s přesností 10^{-4}.
(Návod: Lze použít známý Taylorův polynom $T_5(x)$ pro $f(x) = \sin x,\ x_0 = 0$ nebo $T_2(x)$ pro $x_0 = \frac{\pi}{6}$.]

$[\sin 32^o \doteq 0.5299]$

158. Určete, pro jaká x se při použití přibližného vzorce $\ln(1+x) \doteq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ nedopustíme chyby větší než 0.0001?

$\left[|x| < 0.1 \cdot \sqrt[4]{4}\right]$

159. Pro polynom 3. stupně platí: $f(1) = 3,\ f'(1) = -1,\ f''(1) = 4$ a $f'''(1) = 12$. Vypočítejte $f(0)$ a $f(2)$.

$\left[f(x) = 3 - (x-1) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)^3,\ f(0) = 4,\ f(2) = 6\right]$

160. Stanovte řád styku křivky **a)** $y = \operatorname{tg} x - \sin x$; **b)** $y = x^4$ s osou x v bodě $x = 0$.

[**a)** 2. řád; **b)** 3. řád]

161. Jaký řád styku mají křivky $y = \ln(1+x)$ a $y = x - x^2$ v bodě $x = 0$?

[1. řád]

162. Zvolte koeficienty $a,\ b,\ c$ tak, aby parabola $y = ax^2 + bx + c$ měla v bodě $x = 0$ styk druhého řádu s křivkou $y = \mathrm{e}^{2x}$.

$[a = b = 2,\ c = 1]$

163. Najděte oskulační kružnici daných křivek v daných bodech: **a)** $y = x^2,\ A = [1, ?]$; **b)** $y = \mathrm{e}^x,\ A = [0, ?]$.

$\left[\textbf{a)}\ \left(x+4\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{125}{4};\ \textbf{b)}\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 8\right]$

164. Ve kterém bodě má graf funkce $y = \mathrm{e}^x$ nejmenší poloměr křivosti?

$\left[\left[-\frac{1}{2}\ln 2,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right]$

13. Funkce definované parametricky

***Příklad* 165**. Ukažte, že dané parametrické rovnice definují funkci $y = f(x)$. Stanovte její definiční obor i obor funkčních hodnot. Eliminací parametru t najděte její explicitní vyjádření, jestliže:

a) $\begin{cases} x = t^2 + 1, & t \in \langle 0, +\infty); \\ y = t^4 + 2t^2 + 2, \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 2\sin^2 t, & t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle. \\ y = 5\cos^2 t, \end{cases}$

Řešení: *Funkcemi $x = \varphi(t)$ a $y = \psi(t)$, $t \in I$ je definována funkce $y = f(x)$, jestliže funkce $\varphi(t)$ je prostá. Pro definiční obor a obor funkčních hodnot platí $D(f) = H(\varphi)$, $H(f) = H(\psi)$.*

Je-li $\varphi(t)$ diferencovatelná a $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ pro $t \in I$, pak máme ekvivalenci:

$$\varphi(t) \text{ je prostá} \iff \varphi(t) \quad \text{je ryze monotónní.}$$

a) $x = t^2 + 1 \quad \Rightarrow$

$\dfrac{dx}{dt} =$ (**označujeme zkráceně**) $\dot{x} = 2t > 0$ pro všechna $t \in (0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t)$ je rostoucí, tedy prostá pro $t \in \langle 0, +\infty) \quad \Rightarrow$

rovnicemi $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^4 + 2t^2 + 2 = (t^2 + 1)^2 + 1 \end{cases}$ je definována jediná funkce

$y = f(x), \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}(f) = H\big(\varphi(t)\big) = \langle 1, +\infty)$ a $H(f) = H(\psi(t)) = \langle 2, +\infty)$.

Jelikož dané rovnice jsou velmi jednoduché, eliminace parametru je snadná: $t^2 + 1 = x$, $y = (t^2 + 1)^2 = x^2 + 1$. Grafem funkce $y = f(x)$ je část paraboly $y = x^2 + 1$ pro $x \in \langle 1, +\infty)$

b) $x = 2\sin^2 t \quad \Rightarrow$

$\dot{x} = 4 \sin t \cos t > 0$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x = \varphi(t)$ je prostá pro $t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \quad \Rightarrow$

rovnicemi $\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 5\cos^2 t \end{cases}$ je definována jediná funkce $y = f(x)$,

$\mathcal{D}(f) = \langle 0, 2 \rangle$ a $H(f) = \langle 0, 5 \rangle$.

Eliminaci provedeme tak, že sečteme $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Grafem funkce $y = f(x)$ je část přímky $y = 5 - \dfrac{5}{2}x$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

■

Poznámka: Eliminace parametrů se vždy nepodaří, pak o funkci $y = f(x)$ jenom víme, že existuje, ale její explicitní zápis zůstává "utajen".

***Příklad* 166**. Ověřte, zda následujícími rovnicemi je parametricky definována funkce $y = f(x)$. V kladném případě určete $D(f)$ a derivace $f'(x)$, $f''(x)$:

a) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, & t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle; \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = t^2 + 1, & t \in \langle 1, +\infty); \\ y = 3t + 2t^3, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), & t \in \langle 0, +\infty); \\ y = \dfrac{2t^3 + 1}{3}, \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x = \arcsin t, & t \in \langle -1, 1 \rangle. \\ y = \sqrt{1 - t^2}, \end{cases}$

Řešení: První derivaci funkce $y = f(x)$ spočítáme ze vzorce

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \text{ kde } \dot{x} \neq 0. \text{ Podobně} \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}}, \ \dot{x} \neq 0.$$

Obecnou n-tou derivaci obdržíme podobně:

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{\dfrac{dy^{(n-1)}}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{dy^{(n-1)}}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}}, \ \dot{x} \neq 0.$$

Tento vzorec platí pro všechna $n \geq 1$.

a) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, & t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases} \quad \Rightarrow$

$\dot{x} = -6\cos^2 t \cdot \sin t < 0$ pro $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad x(t)$ je prostá (klesající) $\Rightarrow$
existuje jediná funkce $y = f(x)$,
$t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle \quad \xrightarrow{x \text{ klesá}} \quad x \in \left\langle 0, 2 \right\rangle = D(f): \qquad x(0) = 2, \ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0.$

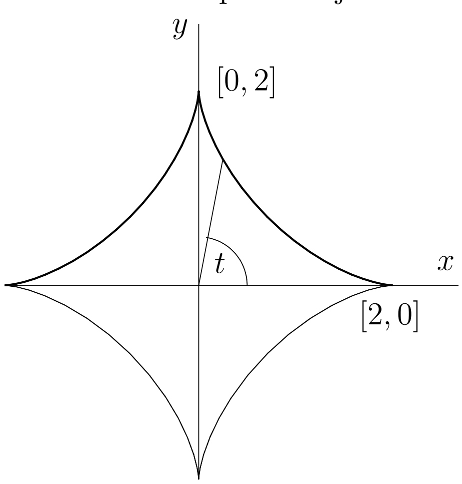
Nyní spočítáme derivace

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{6\sin^2 t\, \cos t}{-6\cos^2 t\, \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = -\frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{-6\cos^2 t\, \sin t} = \frac{1}{6\cos^4 t\, \sin t}.$$

Obě derivace existují pro $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Dané rovnice reprezentují známou křivku - asteroidu, jestliže $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Zde máme $t \in \left\langle 0, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle$, což určuje čtvrtinu křivky ležící v 1. kvadrantu.
Pro $t = \dfrac{\pi}{2}$ dostáváme bod $[0, 2]$ na ose y, v němž je osa y tečnou, tedy svislá přímka se směrnicí $k = \lim\limits_{\substack{t \to \frac{\pi}{2}^- \\ t \to \frac{\pi}{2}^+}} (-\operatorname{tg} t) = \mp\infty.$

b) $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 3t + 2t^3 \end{cases} \quad \Rightarrow$

$\dot{x} = 2t > 0$ pro daná $t \in \langle 1, +\infty)$ $\Rightarrow$ $x(t)$ je prostá (rostoucí) $\Rightarrow$
existuje jediná funkce $y = f(x)$,

$$t \in \langle 1, +\infty) \quad \xrightarrow{x \text{ roste}} \quad x \in \langle 2, +\infty) = D(f): \qquad x(1) = 2, \ \lim_{t \to \infty} x(t) = +\infty,$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3 + 6t^2}{2t} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{t} + 2t, \qquad y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \left(-\frac{3}{2}\,\frac{1}{t^2} + 2\right) \cdot \frac{1}{2t} = -\frac{3}{4t^3} + \frac{1}{t}.$$

Obě derivace existují pro všechna $t \in \langle 1, +\infty)$.

c) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = \dfrac{2t^3 + 1}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow$

$\dot{x} = \dfrac{2t}{1 + t^2} > 0$ pro $\ t \in (0, +\infty) \ \Rightarrow \ x(t)$ je prostá $\ \Rightarrow$ existuje jediná funkce $y = f(x)$,

$$t \in \langle 0, +\infty) \quad \longrightarrow \quad x \in \langle 0, +\infty) = D(f),$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t^2}{\dfrac{2t}{1 + t^2}} = (1 + t^2) \cdot t = t + t^3, \ \ \dot{x} \neq 0 \text{ pro } t \neq 0,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = (1 + 3t^2) \cdot \frac{1}{\dfrac{2t}{1 + t^2}} = \frac{(1 + 3t^2)(1 + t^2)}{2t},$$

y', y'' existují pro všechna $t \in (0, +\infty)$.

d) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

$\dot{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}} > 0$ pro $\ t \in (-1, 1) \ \Rightarrow \ x(t)$ je prostá $\ \Rightarrow$ existuje jediná funkce

$$y = f(x), \quad t \in \langle -1, 1 \rangle \quad \longrightarrow \quad x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle = D(f),$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dfrac{-2t}{2\sqrt{1 - t^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}} = -t, \quad y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = -1 \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1 - t^2}}} = -\sqrt{1 - t^2}, \qquad t \in (-1, 1).$$

■

***Příklad* 167**. Dokažte, že funkce $y = f(x)$ daná parametricky $\ x = \dfrac{1 + t}{t^3}, \ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}$, $t \in (0, +\infty)$ je řešením diferenciální rovnice $x\,(y')^3 = 1 + y'$ pro všechna $x \in D(f)$.

Řešení: Začneme jako obvykle důkazem, že funkce $\ y = f(x)$ je jediná pro $t \in (0, +\infty)$ a určíme její definiční obor.

$$x = \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{3}{t^4} - \frac{2}{t^3} < 0 \ \text{ pro všechna } \ t \in (0, +\infty) \quad \big(x(t) \ \text{ je klesající}\big),$$

$$t \in (0, +\infty) \quad \longrightarrow \quad x \in (0, +\infty) = D(f),$$

Nyní spočítáme y' a dosadíme do dané diferenciální rovnice:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-\dfrac{3}{t^3} - \dfrac{2}{t^2}}{-\dfrac{3}{t^4} - \dfrac{2}{t^3}} = \frac{3t + 2t^2}{3 + 2t} = t,$$

$$x\,(y')^3 = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad \frac{1+t}{t^3}\cdot t^3 \stackrel{?}{=} 1+t \quad \Rightarrow \quad 1+t = 1+t \quad \Rightarrow \quad \text{rovnost platí.}$$

■

***Příklad* 168**. Určete y-ovou souřadnici bodu A, který leží na grafu funkce $y = f(x)$ dané parametricky a najděte rovnici tečny a normály ke grafu funkce f sestrojené v bodě A, jestliže:

a) $\begin{cases} x = t^3 + 8, & t \in \mathbb{R},\ A = [0, ?]; \\ y = t^2 - t + 1, \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^2}, & t \in \langle 1, +\infty),\ A = \left[\dfrac{6}{5}, ?\right]; \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2}, & \text{(část Descartesova listu, } a = 1) \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2e^t, & t \in \mathbb{R},\ A = [2, ?]. \\ y = \mathrm{e}^{-t}, \end{cases}$

Řešení: Abychom určili y-ovou souřadnici bodu A, potřebujeme z x-ové souřadnice zjistit jeho parametr t_0 a pak dosazením do y dopočítat $y(t_0) = y_A$.

a) $x_A = 0: \ 0 = t^3 + 8 \quad \Rightarrow \quad t_A = -2 \quad \Rightarrow \quad y(-2) = 7 \quad \Rightarrow \quad A = [0, 7].$

Tečna v bodě A má známou rovnici $\quad y - y_A = f'(x_A)\cdot(x - x_A)$, kde potřebujeme spočítat $\quad f'(x_A) = y'(t_A = -2) \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{\dot y}{\dot x} = \dfrac{2t-1}{3t^2}, \quad y'(t_A) = \dfrac{-5}{12}.$

Tím je rovnice tečny určena: $\quad y - 7 = \dfrac{-5}{12}(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{-5}{12}\,x + 7.$

Normála má podobnou rovnici, která se liší směrnicí

$$y - y_A = \frac{-1}{f'(x_A)}\,(x - x_A): \ y - 7 = \frac{12}{5}\,x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{12}{5}\,x + 7.$$

b) $\dfrac{6}{5} = \dfrac{3t}{1+t^2} \quad \Rightarrow \quad 6(1+t^2) = 15t \ \Rightarrow \ 2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad \Rightarrow \ t_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} =$

$$= \frac{5 \pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow & 2 \\ \searrow & \frac{1}{2} \notin \langle 1, +\infty) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \text{parametr bodu } A \text{ je } t_A = 2 \ \Rightarrow \ y_A = \frac{12}{5};$$

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\dfrac{6t(1+t^2) - 3t^2\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{3(1+t^2) - 3t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}} = \frac{6t}{3 - 3t^2}, \qquad y'(t_A) = \frac{12}{-9} = -\frac{4}{3},$$

tečna: $\ y - \dfrac{12}{5} = -\dfrac{4}{3}\left(x - \dfrac{6}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{4}{3}\,x + 4,$

normála: $\ y - \dfrac{12}{5} = \dfrac{3}{4}\left(x - \dfrac{6}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{3}{4}\,x + \dfrac{3}{2}.$

c) $2 = 2e^t \quad \Rightarrow \quad t_A = 0 \quad \Rightarrow \quad y_A = \mathrm{e}^{-0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y'(t_A) = \left.\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}}{2\,\mathrm{e}^t}\right|_0 = -\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow$

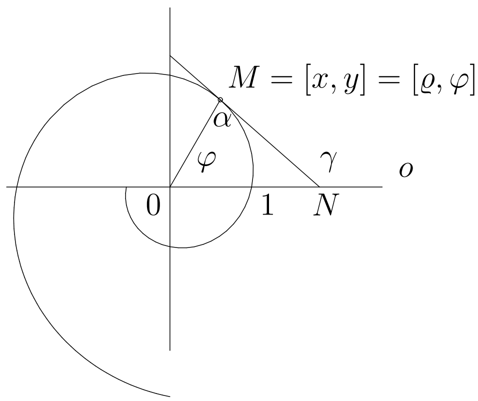
tečna: $\ y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = -\dfrac{1}{2}\,x + 2,$

normála: $y - 1 = 2(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 3.$

■

***Příklad* 169**. Mějme logaritmickou spirálu $\varrho = \mathrm{e}^{k\varphi}$. Dokažme, že tečna a průvodič v libovolném bodě svírají konstantní úhel.

Řešení:



Bod M je zvolený zcela libovolně. Potřebujeme dokázat, že úhel α je úhel konstantní a nezávisí na poloze bodu M.

Viz př. 176 v Analytické geometrii.

Z obrázku je vidět, že $\varphi + \alpha + \pi - \gamma = \pi$ (vnitřní úhly ΔONM) $\Rightarrow$ $\alpha = \gamma - \varphi$, kde γ je úhel, který svírá tečna v bodě M s polární osou o (s osou x), tedy $\operatorname{tg}\gamma = y'(M)$. Logaritmickou spirálu napíšeme v parametrickém tvaru s parametrem φ :

$x = \varrho\,\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad x(\varphi) = \mathrm{e}^{k\varphi}\,\cos\varphi,$

$y = \varrho\,\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad y(\varphi) = \mathrm{e}^{k\varphi}\,\sin\varphi.$

Potom

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ke^{k\varphi}\sin\varphi + \mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi}{ke^{k\varphi}\cos\varphi - \mathrm{e}^{k\varphi}\sin\varphi} = \frac{k\sin\varphi + \cos\varphi}{k\cos\varphi - \sin\varphi} = \left| \begin{array}{c}\text{vydělíme čitatel a}\\ \text{jmenovatel } \cos\varphi\end{array} \right| = \frac{k\operatorname{tg}\varphi + 1}{k - \operatorname{tg}\varphi}.$$

Nyní určíme $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\gamma - \varphi) = \dfrac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \left| \text{dosadíme } \operatorname{tg}\gamma = y' = \frac{k\operatorname{tg}\varphi + 1}{k - \operatorname{tg}\varphi} \right| =$

$$= \frac{\dfrac{k\operatorname{tg}\varphi + 1}{k - \operatorname{tg}\varphi} - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \dfrac{k\operatorname{tg}\varphi + 1}{k - \operatorname{tg}\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\dfrac{k\operatorname{tg}\varphi + 1 - k\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi}{k - \operatorname{tg}\varphi}}{\dfrac{k - \operatorname{tg}\varphi + k\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{k - \operatorname{tg}\varphi}} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}{k + k\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{k}.$$

Tím jsme dokázali, že $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{k}$, a tedy $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{k}$ je konstantní úhel pro celou danou spirálu. Např. pro konkrétní logaritmickou spirálu $\varrho = \mathrm{e}^{\varphi}$ je úhel $\dfrac{\pi}{4}$, neboť $k = 1$ a $\alpha = \operatorname{arctg} 1$.

■

Poznámka: V tomto příkladě jsme uvažovali křivku danou v parametrickém tvaru, která je sjednocením grafů více funkcí. Další příklady vše vysvětlí.

***Příklad* 170**. Určete konstanty b a c tak, aby parabola $y = x^2 + bx + c$ měla s křivkou $k : \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$ společnou tečnu ve společném bodě $A = [2, 2]$. Napište rovnici této tečny.

Řešení: Bod A je bodem dané křivky c. Po dosazení $x = 2$ a $y = 2$ určíme jeho parametr $t_A = 1$. Směrnice tečny ke křivce k je $y'(1) = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big|_{t=1} = \dfrac{3t^2 + 1}{2t}\Big|_{t=1} = 2.$

Vezmeme v úvahu, že bod A je bodem dané paraboly $\quad\Rightarrow\quad 2 = 4 + 2b + c$ a též, že směrnice tečny k parabole je 2 $\quad\Rightarrow\quad y' = 2x + b\Big|_{x_A=2} = 4 + b \quad\Rightarrow\quad 4 + b = 2.$

Tím jsme obdrželi soustavu $\left\{\begin{array}{l} 2 = 4 + 2b + c \\ 2 = 4 + b \end{array}\right.$, ze které vypočteme $b = -2,\ c = 2.$

Parabola $y = x^2 - 2x + 2$ a křivka k mají společnou tečnu $y - 2 = 2(x - 2) \quad\Rightarrow$ $y = 2x - 2$ v bodě $A = [2, 2].$

■

***Příklad* 171.** Najděte maximální intervaly, na kterých jsou rovnicemi $x = t^2 - 6t + 1$, $y = t + 2$ definovány parametricky funkce $y = f_1(x),\ y = f_2(x)$. Určete definiční obory, obory funkčních hodnot a parametrické vyjádření jejich derivací. Vyšetřete, kde jsou funkce ryze monotónní.

Řešení: Funkce $x(t) = t^2 - 6t + 1$ a $y(t) = t + 2$ jsou spojité pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

$$\dot{x}(t) = 2t - 6 \left\langle \begin{array}{lll} > 0, \quad t \in (3, +\infty) & \Rightarrow & x(t) \text{ je rostoucí pro } t \in \langle 3, +\infty), \\ < 0, \quad t \in (-\infty, 3) & \Rightarrow & x(t) \text{ je klesající pro } t \in (-\infty, 3\rangle. \end{array}\right.$$

Pro $t \in (-\infty, 3\rangle \quad\Rightarrow\quad x \in \langle -8, +\infty)$ existuje funkce $y = f_1(x)$ s definičním oborem $D(f_1) = \langle -8, +\infty)$ a oborem hodnot $H(f_1) = (-\infty, 5\rangle$.

Pro $t \in \langle 3, +\infty) \quad\Rightarrow\quad x \in \langle -8, +\infty)$ existuje funkce $y = f_2(x)$ s definičním oborem $D(f_2) = \langle -8, +\infty)$ a oborem hodnot $H(f_2) = \langle 5, +\infty)$.

$$\frac{df_1}{dx} = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2t - 6}, \text{ pro } t \in (-\infty, 3),$$
$$\frac{df_2}{dx} = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2t - 6}, \text{ pro } t \in (3, +\infty).$$

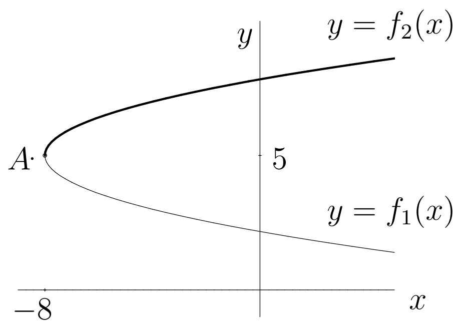
Monotónnost vyšetříme ze znaménka derivací:

$$\frac{df_1}{dx} = \frac{1}{2t - 6} < 0, \text{ pro všechna } t \in (-\infty, 3) \quad\Rightarrow\quad f_1(x) \text{ je klesající pro všechna } x \in \langle -8, +\infty),$$

$$\frac{df_2}{dx} = \frac{1}{2t - 6} > 0, \text{ pro všechna } t \in (3, +\infty) \quad\Rightarrow\quad f_2(x) \text{ je rostoucí pro všechna } x \in \langle -8, +\infty).$$

Pro $t = 3$ dostáváme bod $A = [-8, 5]$, v němž je $\dot{x} = 0$.

Obě funkce mají stejný definiční obor, liší se obory funčních hodnot. To znamená, že grafy obou funkcí budou nad sebou.



Danými rovnicemi je dána **křivka** c. Její graf je sjednocením grafů obou funkcí $f_1,\ f_2$

$\{[x, f_1(x)]\} \cup \{[x, f_2(x)]\}$.

■

***Příklad* 172**. Ukažte, že existují dva maximální možné intervaly $I_1,\ I_2 \subset \mathbb{R}$ takové, že rovnicemi $x = 4t - t^2,\ y = 12t - t^3$ jsou definovány dvě funkce $y = f_1(x)$ pro $t \in I_1$ a $y = f_2(x)$ pro $t \in I_2$. Určete definiční odory obou funkcí, průsečíky s osami souřadnic, intervaly ryzí monotónnosti a intervaly ryzí konvexnosti a ryzí konkávnosti.

Řešení: $\dot{x} = 4 - 2t = 2(2-t) \left\langle \begin{array}{lll} > 0, & t < 2 & \Rightarrow \quad x(t) \text{ je rostoucí pro } t \in (-\infty,\ 2\rangle \\ < 0, & t > 2 & \Rightarrow \quad x(t) \text{ je klesající pro } t \in \langle 2,\ +\infty) \end{array}\right. .$

Pro $t \in (-\infty, 2\rangle = I_1 \ \Rightarrow\ x \in (-\infty, 4\rangle$ existuje $y = f_1(x),\ D(f_1) = (-\infty, 4\rangle$.

Pro $t \in \langle 2, +\infty) = I_2 \ \Rightarrow\ x \in (-\infty, 4\rangle$ existuje $y = f_2(x),\ D(f_2) = (-\infty, 4\rangle$.

Průsečíky s osou x spočítáme z podmínky $y = 0$:

$12t - t^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t(12 - t^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0,\ t_{2,3} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3},$

$t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = [0, 0] \in \{[x, f_1(x)]\},$

$t_2 = -2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad X_2 = [-8\sqrt{3} - 12, 0] \in \{[x, f_1(x)]\},$

$t_3 = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad X_3 = [8\sqrt{3} - 12, 0] \in \{[x, f_2(x)]\}.$

Průsečíky s osou y získáme z podmínky $x = 0$:

$4t - t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t(4 - t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0,\ t_2 = 4,$

$t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1 = [0, 0] \in \{[x, f_1(x)]\},$

$t_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad Y = [0, -16] \in \{[x, f_2(x)]\}.$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{12 - 3t^2}{4 - 2t} = \frac{3(4 - t^2)}{2(2 - t)} = \frac{3}{2}\,\frac{(2-t)(2+t)}{(2-t)},\ t \neq 2,$$

$$y' = \frac{3}{2}\,(2 + t) \left\{ \begin{array}{l} > 0,\ t > -2, \\ < 0,\ t < -2, \\ = 0,\ t = -2, \end{array}\right.$$

$y = f_1(x)$ je $\left\langle \begin{array}{l} \text{klesající pro } t \in (-\infty,\ -2\rangle \text{ tedy pro } x \in (-\infty,\ -12\rangle, \\ \text{rostoucí pro } t \in \langle -2,\ 2\rangle \text{ tedy pro } x \in \langle -12,\ 4\rangle, \end{array}\right.$

$y = f_2(x)$ je rostoucí pro všechna $t \in \langle 2,\ +\infty)$ tedy pro $x \in (-\infty,\ 4\rangle$.

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{3}{2} \cdot \underset{t \neq 2}{\frac{1}{4 - 2t}} \left\langle \begin{array}{l} > 0,\ t < 2 \\ < 0,\ t > 2 \end{array}\right. ,$$

Funkce $y = f_1(x)$ je ryze konvexní pro všechna $t \in (-\infty,\ 2\rangle$ tedy pro $x \in (-\infty,\ 4\rangle$, funkce $y = f_2(x)$ je ryze konkávní pro všechna $t \in \langle 2,\ +\infty)$ tedy pro $x \in (-\infty,\ 4\rangle$.

■

***Příklad* 173**.* Najděte asymptoty grafu funkce $y = f(x)$ dané parametricky $x = \dfrac{1}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t+2}$.

Řešení: V případě parametrického zadání funkce veškerá vyšetření jsou komplikovanější, jelikož neexistuje explicitní zápis. Tak to bude i u asymptot. Nejdříve určíme jaká t připadají v úvahu a potom se přesvědčíme, že existuje jediná funkce $y = f(x)$:

$t \neq 1,\ t \neq -2 \quad \Rightarrow \quad t \in (-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty) = I,$

$\dot{x} = \dfrac{-1}{(t-1)^2} < 0$ pro všechna $t \in I \quad \Rightarrow \quad x(t)$ je klesající $\Rightarrow$ existuje jediná funkce $y = f(x)$ s definičním oborem $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty).$

Nyní vyšetříme existenci šikmé asymptoty:

$y = kx + q$, kde $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)},$

t_0 určíme z $\lim\limits_{t \to t_0\ ?} x(t) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to 1^\pm} \dfrac{1}{t-1} = \left\langle \begin{array}{l} +\infty,\ t \ \Rightarrow\ 1^+ \\ -\infty,\ t \ \Rightarrow\ 1^- \end{array} \right. \quad \Rightarrow$

$$k = \lim_{\substack{t \to 1^+ \\ t \to 1^-}} \frac{\dfrac{t}{t+2}}{\dfrac{1}{t-1}} = \lim_{t \to 1^\pm} \frac{t(t-1)}{t+2} = 0,$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{t \to t_0} \big(y(t) - k\,x(t)\big) = \lim_{t \to 1^\pm} \frac{t}{t+2} = \frac{1}{3}.$$

Přímka $\left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{1}{3} \\ x \Rightarrow \pm\infty \end{array} \right.$ je šikmou asymptotou.

Podobným způsobem vyšetříme existenci svislé asymptoty $\left\{ \begin{array}{l} x = c \\ y \Rightarrow \pm\infty \end{array} \right.$

$\lim\limits_{x \to c?} f(x) = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{t \to t_1} y(t) = \pm\infty \\ \lim\limits_{t \to t_1} x(t) = c \end{array} \right. ,$

$\lim\limits_{t \to ?} \dfrac{t}{t+2} = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad t \ \Rightarrow\ -2,$

$\lim\limits_{t \to -2^\pm} \dfrac{t}{t+2} = \mp\infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to -2} x(t) = \lim\limits_{t \to -2} \dfrac{1}{t-1} = -\dfrac{1}{3}.$

Přímka $x = -\dfrac{1}{3}$ je svislou asymptotou.

■

***Příklad* 174**. Určete poloměry křivosti ve vrcholech elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Řešení: Rovnici elipsy napíšeme v parametrickém tvaru:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi \\ y = b\sin t. \end{array} \right.$$

Vzhledem k symetrii stačí určit poloměry křivosti v bodech $A = [a, 0]$ s parametrem $t_1 = 0$ a $B = [0, b]$ s parametrem $t_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Než přistoupíme ke konkrétnímu výpočtu poloměru křivosti, upravíme vzorec

$$(*) \qquad r(x) = \frac{\Big(1 + (y')^2\Big)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$$

pro křivky v parametrickém tvaru. Nejdříve vyjádříme derivace

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad y'' = \frac{d\,y'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{d\Big(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\Big)}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{(\dot{x})^3},$$

které dosadíme do (*) a po úpravě získáme poloměr křivosti jako funkci parametru t :

$$r(t)=\frac{\left(1+\left(\frac{\dot y}{\dot x}\right)^2\right)^{\frac32}}{\left|\frac{\ddot y\,\dot x-\dot y\,\ddot x}{(\dot x)^3}\right|}=\frac{\left(\frac{\dot x^2+\dot y^2}{\dot x^2}\right)^{\frac32}}{\left|\frac{\ddot y\,\dot x-\dot y\,\ddot x}{(\dot x)^3}\right|}=\frac{\left(\dot x^2+\dot y^2\right)^{\frac32}}{|\ddot y\,\dot x-\dot y\,\ddot x|}.$$

Vraťme se k elipse:

$\dot x=-a\sin t,\qquad \ddot x=-a\cos t,\qquad \dot y=b\cos t,\qquad \ddot y=-b\sin t.$

V bodě A ($t=0$) dostáváme: $\dot x(0)=0,\ \dot y(0)=b,\ \ddot x(0)=-a,\ \ddot y(0)=0 \quad\Rightarrow$

$$r(0)=\frac{\left(0+b^2\right)^{\frac32}}{|0\cdot 0+b\cdot a|}=\frac{b^3}{ab}=\frac{b^2}{a}$$

a v bodě B $\left(t=\frac{\pi}{2}\right)$: $\dot x\left(\frac{\pi}{2}\right)=-a,\ \dot y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \ddot x\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \ddot y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-b \quad\Rightarrow$

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\left(a^2+0\right)^{\frac32}}{|b\cdot a-0\cdot 0|}=\frac{a^3}{ab}=\frac{a^2}{b}.$$

■

***Příklad* 175**. Určete křivost asteriody $x=a\,\cos^3 t,\ y=a\,\sin^3 t$ **a)** v bodě s parametrem $t=t_0,\ t_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; **b)** jaká je křivost a poloměr křivosti v bodě s parametrem $t=\frac{\pi}{4}$.

Řešení: I když je křivka v parametrickém tvaru, pro křivost použijeme vzorec

$$k=\frac1r=\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac32}},$$

jelikož $\dot x,\ \ddot x,\ \dot y,\ \ddot y$ jsou poměrně dlouhé výrazy a výpočet pomocí vzorce

$$k=\frac{|\ddot y\,\dot x-\dot y\,\ddot x|}{\left(\dot x^2+\dot y^2\right)^{\frac32}}\quad\text{by byl velmi pracný.}$$

a) $$y'=\frac{\dot y}{\dot x}=\frac{3a\,\sin^2 t\,\cos t}{-3a\,\cos^2 t\,\sin t}=-\mathrm{tg}\,t,$$

$$y''=\frac{d\,y'}{dt}\cdot\frac{1}{\dot x}=-\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{-3a\,\cos^2 t\,\sin t}=\frac{1}{3a\,\cos^4 t\,\sin t},$$

$$k(t_0)=\frac{\left|\frac{1}{3a\,\cos^4 t_0\,\sin t_0}\right|}{\left(1+\mathrm{tg}^2\,t_0\right)^{\frac32}}=\frac{1}{3a\,\cos^4 t_0\,\sin t_0\cdot\left(\frac{\cos^2 t_0+\sin^2 t_0}{\cos^2 t_0}\right)^{\frac32}}=$$

$$=\frac{\cos^3 t_0}{3a\,\cos^4 t_0\,\sin t_0}=\frac{1}{3a\,\cos t_0\,\sin t_0}=\frac{2}{3a\,\sin 2t_0};$$

b) $$k\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3a\,\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3a},\qquad r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3a}{2}.$$

■

***Příklad* 176**. Určete poloměr křivosti v libovolném bodě cykloidy $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $t \in (0, 2\pi)$. V jakém bodě je poloměr největší?

Řešení: Použijeme vzorec z příkladu **174**

$$r(t) = \frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}|}$$

a k tomu si připravíme derivace

$\dot{x} = a\,(1 - \cos t), \quad \ddot{x} = a\,\sin t, \quad \dot{y} = a\,\sin t, \quad \ddot{y} = a\,\cos t,$

které dosadíme a provedeme úpravu:

$$r(t) = \frac{\left(a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{|a\cos t \cdot a(1-\cos t) - a\sin t \cdot a\sin t|} = \frac{a^3\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2|\cos t - \cos^2 t - \sin^2 t|} =$$

$$= \frac{a(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{|\cos t - 1|} = \frac{a \cdot 2\sqrt{2}(1-\cos t)\sqrt{1-\cos t}}{1-\cos t} = 2\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t} = 4a\,\sin\frac{t}{2}.$$

Poloměr $r(t)$ bude největší, když $\sin\dfrac{t}{2} = 1$, a to nastane v bodě A s parametrem $t = \pi$, tedy se souřadnicemi $A = [\pi a, 2a]$ a s poloměrem $r(\pi) = 4a$.

■

***Příklad* 177**.* Najděte maximální interval $I \subset \mathbb{R}$, takový, že pro $t \in I$ je rovnicemi $x = \ln\dfrac{t}{1-t}$, $y = \dfrac{1}{t}$ definována parametricky funkce $y = f(x)$. Vyšetřete její průběh a nakreslete graf.

Řešení: Interval I spočítáme z podmínek

$$\frac{t}{1-t} > 0,\ 1-t \neq 0,\ t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{buď} & \left.\begin{array}{l} t > 0 \\ 1-t > 0 \ \Rightarrow t < 1 \end{array}\right\} t \in (0,1) \\ \text{nebo} & \left.\begin{array}{l} t < 0 \\ 1-t < 0 \ \Rightarrow t > 1 \end{array}\right\} \emptyset \end{array}.$$

Maximální existenční interval $I = (0, 1)$. Nyní se přesvědčíme, že na tomto intervalu existuje jediná funkce $y = f(x)$ a určíme její definiční obor. Dále budeme sledovat jednotlivé kroky pro průběh funkce $y = f(x)$ dle kapitoly III. 11.

1 **a)**

$$\dot{x} = \frac{1-t}{t} \cdot \frac{1-t+t}{(1-t)^2} = \frac{1}{t(1-t)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} > 0 & ,\ t \in (0,1) \\ < 0 & \multirow{2}{*}{} \\ = 0 & \end{array} \right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \emptyset .$$

Pro všechna $t \in (0, 1)$ je $x(t)$ rostoucí $\Rightarrow$ existuje jediná funkce $y = f(x)$. Její definiční obor spočítáme pomocí limit:

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \ln\dfrac{t}{1-t} = -\infty \\ \lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \ln\dfrac{t}{1-t} = +\infty \end{array} \quad , \qquad x \in (-\infty, +\infty) = D(f).$$

b) Funkce není sudá ani lichá ani periodická (ověřte sami).

c) Průsečíky s osou x : $X = [\quad, 0]$

$$y = \frac{1}{t} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{neexistují.}$$

Průsečík s osou y : $Y = [0, \quad]$

$$x = \ln \frac{t}{1-t} = 0 \Rightarrow \frac{t}{1-t} = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2},\ y\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow Y = [0,\ 2].$$

d) Chování funkce v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{t\to1^-} \frac{1}{t} = 1.$$

2

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t(1-t)}} = \frac{-(1-t)}{t} \quad \begin{cases} < 0 & , \ t \in (0,1) \\ > 0 & \Big\} \ \emptyset \\ = 0 & \end{cases} ,$$

pro všechna $t \in (0,1)$, a tedy pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ je funkce $y = f(x)$ klesající.

3

$$y'' = \frac{d\,y'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{t(1-t)}} = \frac{1-t}{t} \quad \begin{cases} > 0 & , \ t \in (0,1) \\ < 0 & \Big\} \ \emptyset \\ = 0 & \end{cases} ,$$

$y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ pro všechna $t \in (0,1)$, což znamená, že $y = f(x)$ je ryze konvexní pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$.

4 Asymptoty: $y = kx + q$, kde

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to1^-} \frac{\frac{1}{t}}{\ln \frac{t}{1-t}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{t\to1^-} \frac{1}{t} = 1.$$

Přímka $y = 1$ je asymptotou pro $x \to +\infty$.

Podobně prozkoumáme, zda bude existovat asymptota pro $x \to -\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to0^+} \frac{\frac{1}{t}}{\ln \frac{t}{1-t}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{t\to0^+} \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t(1-t)}} = \lim_{t\to0^+} \frac{-(1-t)}{t} = -\infty \quad \Rightarrow$$

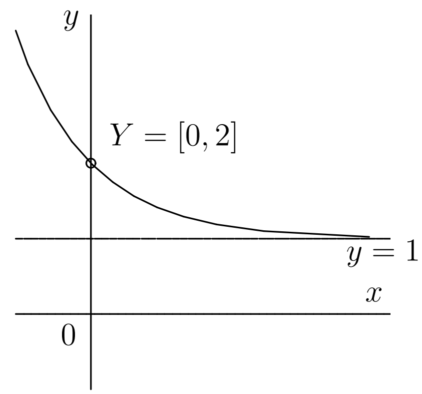
asymptota pro $x \to -\infty$ neexistuje.

Zbývá vyšetřit, zda bude existovat svislá asymptota $x = c$ taková, že $\lim\limits_{x\to c} y = \pm\infty$?

$\lim\limits_{x\to ?} y = \lim\limits_{t\to0^+} \dfrac{1}{t} = +\infty \ \Rightarrow \ \lim\limits_{t\to0^+} x = -\infty$ (není konečné číslo) $\Rightarrow$ svislá asymptota neexistuje.

(5)

t	0	$\frac{1}{2}$	1
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	2	1
$y' \Rightarrow$		$\searrow$	
$y'' \Rightarrow$		$\smile$	
		Y	$y = 1$ as.



∎

Příklad* 178. Vyšetřete graf křivky c dané parametricky $x = t^2 - 3t + 2$, $y = t^2 - 4t + 4$, $t \in \mathbb{R}$. Ukažte, že graf křivky c je sjednocením grafů dvou funkcí $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$. Určete $D(f_1)$ a $D(f_2)$.

Řešení:

(1) **a)**

$$\dot{x} = 2t - 3 \quad \begin{array}{l} \nearrow > 0, \quad t \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \;\Rightarrow\; x(t) \text{ je rostoucí pro } t \in \left\langle \frac{3}{2}, +\infty\right) \\ \searrow < 0, \quad t \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \;\Rightarrow\; x(t) \text{ je klesající pro } t \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right\rangle \end{array}$$

Pro $t \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right\rangle$ existuje funkce $y = f_1(x)$, $x \in \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right) = D(f_1)$,

pro $t \in \left\langle \frac{3}{2}, +\infty\right)$ existuje funkce $y = f_2(x)$, $x \in \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right) = D(f_2)$,

pro $t = \frac{3}{2}$ dostáváme bod $A = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, v němž je $\dot{x} = 0$.

c) Průsečíky s osami:

$$x(t) = t^2 - 3t + 2 = 0 \;\Rightarrow\; (t-2)(t-1) = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = 1,\; t_2 = 2$$
$$y(t) = t^2 - 4t + 4 = 0 \;\Rightarrow\; (t-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; t_2 = 2$$
$$t_1 = 1:\; Y = [0, 1], \qquad t_2 = 2:\; X = [0, 0].$$

d) Chování funkce v krajních bodech definičních oborů:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \begin{array}{l} \nearrow \quad (f_1(x)) : \lim\limits_{t \to -\infty} (t-2)^2 = +\infty \\ \searrow \quad (f_2(x)) : \lim\limits_{t \to +\infty} (t-2)^2 = +\infty \end{array} .$$

(2)

$$y' = \frac{2(t-2)}{2t-3} \quad \begin{array}{l} \nearrow > 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} t \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \;\Rightarrow\; f_1(x) \text{ je rostoucí pro } x \in \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty\right), \\ t \in (2, +\infty) \;\Rightarrow\; f_2(x) \text{ je rostoucí pro } x \in \langle 0, +\infty), \end{array} \right. \\ \Rightarrow < 0, \quad t \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \;\Rightarrow\; f_2(x) \text{ je klesající pro } x \in \left\langle -\frac{1}{4}, 0\right\rangle, \\ \searrow = 0, \quad t = 2. \end{array}$$

3

$$y'' = \frac{d\,y'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \dot{y}\,\ddot{x}}{\dot{x}^3} \quad , \qquad \dot{y} = 2(t-2),\ \ddot{y} = 2,\ \dot{x} = 2t-3,\ \ddot{x} = 2,$$

$$y'' = \frac{2 \cdot (2t-3) - 2(t-2) \cdot 2}{(2t-3)^3} = \frac{2}{(2t-3)^3},$$

$$y'' = \frac{2}{(2t-3)^3} \quad \begin{cases} > 0,\ t \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \ \Rightarrow\ f_2(x) \text{ je ryze konvexní pro } x \in \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty \right) \\ < 0,\ t \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \ \Rightarrow\ f_1(x) \text{ je ryze konkávní pro } x \in \left\langle -\frac{1}{4}, +\infty \right), \\ = 0 \quad \text{neexistuje} \end{cases}$$

$$y''(t=2) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad X = [0,0] \text{ je lokálním minimem funkce } y = f_2(x).$$

4 Asymptoty: $y = kx + q$,

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \to -\infty}} \frac{t^2 - 4t + 4}{t^2 - 3t + 2} = \boxed{1},$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \to -\infty}} \left(t^2 - 4t + 4 - \boxed{1} \cdot (t^2 - 3t + 2)\right) =$$

$$= \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t \to -\infty}} (-t + 2) = \mp\infty \quad \Rightarrow \quad \text{šikmá asymptota neexistuje.}$$

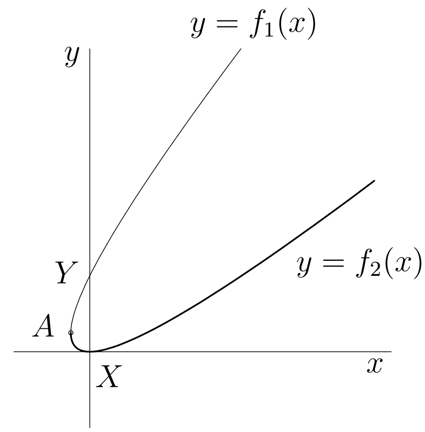
Svislá asymptota $x = c$ rovněž neexistuje, protože $\lim\limits_{x \to ?} y = +\infty$ nastává jen pro $x \to +\infty$.

5

t	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x	$+\infty$	0	$-\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	1	$\frac{1}{4}$		0		$+\infty$
$y' \Rightarrow$		$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	
$y'' \Rightarrow$		$\frown$			$\smile$		
		Y	A		X		

$y = f_1(x)$ $\qquad$ $y = f_2(x)$

$c = \{[x,\ f_1(x)] \cup [x,\ f_2(x)]\}$



■

***Příklad* 179**.* Vyšetřete průběh křivky c dané parametricky $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = t - \dfrac{t}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ a nakreslete graf.

Řešení :

1 **a)**

$$\dot{x} = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}\right)' = \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \quad \begin{cases} > 0, & t \in (-\infty, 0) \\ < 0, & t \in (0, +\infty) \\ = 0, & t = 0 \end{cases} .$$

Pro $t \in (-\infty, 0\rangle$ je $x(t)$ rostoucí $\Rightarrow$ existuje funkce $y = f_1(x)$

$$\left| \lim_{t\to-\infty} x(t) = \lim_{t\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right) = 1 \right|, \qquad x \in (1, 2\rangle = D(f_1),$$

Pro $t \in \langle 0, +\infty)$ je $x(t)$ klesající $\Rightarrow$ existuje funkce $y = f_2(x)$

$$x \in (1, 2\rangle = D(f_2),$$

pro $t = 0$ dostáváme bod $A = [2, 0]$.

V tomto příkladě si všimneme symetrie křivky c :

$$\begin{matrix} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \big[x(-t), y(-t)\big] = \big[x(t), -y(t)\big] \quad \Rightarrow$$

obdrželi jsme symetrii podle osy x a půjde o symetrii mezi grafy funkcí $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$ podle osy x. O tom se přesvědčíme podrobným vyšetřením průběhů $f_1(x)$ a $f_2(x)$.

c) Bod $A = [2, 0]$ je jediný průsečík s osou x, protože $y = 0$ jenom pro $t = 0$, neboť

$$y = t - \frac{t}{1+t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{t + t^3 - t}{1+t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{t^3}{1+t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$$

Průsečík s osou y neexistuje, protože definiční obory $D(f_1) = D(f_2) = (1, 2\rangle$ a $0 \notin (1, 2\rangle$.

d) Chování funkce v krajních bodech definičních oborů:

$$\lim_{x\to1^+} y = \begin{cases} (f_1(x)) : \lim\limits_{t\to-\infty} \left(t - \dfrac{t}{1+t^2}\right) = -\infty \\ (f_2(x)) : \lim\limits_{t\to+\infty} \left(t - \dfrac{t}{1+t^2}\right) = +\infty \end{cases} .$$

2

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1 - \dfrac{1+t^2 - t\cdot 2t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}} = \frac{(1+t^2)^2 - 1 + t^2}{-2t} = \frac{3t^2 + t^4}{-2t} = -\frac{3t + t^3}{2} =$$

$$= -\frac{t(3+t^2)}{2} \quad \begin{cases} > 0, & t \in (-\infty, 0) \quad f_1(x) \Rightarrow \text{je rostoucí pro } x \in (1, 2\rangle \\ < 0, & t \in (0, +\infty) \Rightarrow f_2(x) \text{ je klesající pro } x \in (1, 2\rangle \\ = 0, & t = 0 \Rightarrow \text{ v bodě } A = [2, 0] \text{ je osa } x \text{ tečnou} \end{cases} .$$

③

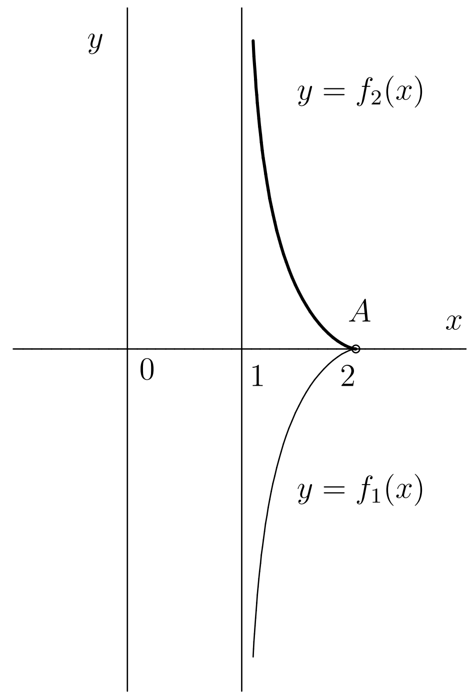
$$y'' = \frac{d\,y'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = -\Big(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\,t^2\Big) \cdot \frac{1}{\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}} = \frac{3}{2}\,(1+t^2) \cdot \frac{(1+t^2)^2}{2t} =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{(1+t^2)^3}{t} \quad \begin{cases} > 0,\ t \in (0,+\infty) \ \Rightarrow\ f_2(x) \text{ je ryze konvexní pro } x \in (1,2\rangle \\ < 0,\ t \in (-\infty,0) \ \Rightarrow\ f_1(x) \text{ je ryze konkávní pro } x \in (1,2\rangle \\ = 0,\ \emptyset \end{cases} .$$

④ Asymptota $y = kx + q$ neexistuje, protože $D(f_1) = D(f_2) = (1, 2\rangle$, avšak svislá asymptota existuje, jelikož $\lim\limits_{x \to 1^+} y = \pm\infty$ a její rovnice je $x = 1$.

⑤

t	$-\infty$	0	$+\infty$
x	1	2	1
y	$-\infty$	0	$+\infty$
$y' \Rightarrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$
$y'' \Rightarrow$	$\frown$		$\smile$
	$x = 1$ asymp.	A	$x = 1$ asymp.
	$y = f_1(x)$		$y = f_2(x)$



Vidíme, že křivka $c = \{[x, f_1(x)] \cup [x, f_2(x)]\}$.

■

***Příklad* 180**.* Vyšetřete průběh funkce definované parametricky $x = \dfrac{t^2}{1-t^2}, y = \dfrac{1}{1+t^2}$ pro $t \in \langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$ a nakreslete graf.

Řešení:

①**a)**

$$\dot{x} = \frac{2t \cdot (1-t^2) + t^2 \cdot 2t}{(1-t^2)^2} = \frac{2t}{(1-t^2)^2} > 0 \ \text{ pro všechna } \ t \in (0,1) \ \text{ a}$$

$t \in (1, +\infty) \quad \Rightarrow \quad x(t)$ je rostoucí pro $t \in \langle 0, 1)$ a $t \in (1, +\infty)$, tedy na každém z těchto intervalů existuje jediná funkce $y = f(x)$.

$$\left.\begin{array}{lll} t = 0 & \Rightarrow & x(0) = 0 \\ t \to 1^- & \Rightarrow & \lim\limits_{t\to 1^-} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{t^2}{1-t^2} = +\infty \\ t \to 1^+ & \Rightarrow & \lim\limits_{t\to 1^+} x(t) = \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{t^2}{1-t^2} = -\infty \\ t \to +\infty & \Rightarrow & \lim\limits_{t\to +\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to +\infty} \dfrac{t^2}{1-t^2} = -1 \end{array}\right\} \quad x \in (-\infty, -1) \cup \langle 0, +\infty) = D(f).$$

(Z toho vyplývá, že dokonce existuje jediná funkce $f(x)$.)

c) Průsečík s osou y je bod $Y = [0, 1] (t = 0)$.

Průsečík s osou x neexistuje, protože $y = \dfrac{1}{1+t^2} \neq 0$, ale pro $t \to +\infty$ se blíží graf k bodu $X = [-1, 0]$.

d) Chování funkce v krajních bodech definičních oborů:

$$\lim_{x\to -\infty} y = \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to -1^-} y = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{1+t^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{1+t^2} = 1, \qquad \lim_{x\to +\infty} y = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}.$$

2

$$y' = \frac{\dot y}{\dot x} = \frac{\dfrac{-2t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{2t}{(1-t^2)^2}} = \frac{-(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} \quad \begin{cases} > 0, \ \emptyset \\ < 0, \ t \in \langle 0, 1) \text{ a } t \in (1, +\infty) \\ = 0, \ \emptyset \end{cases}.$$

Funkce $y = f(x)$ je klesající na intervalech $(-\infty, -1)$ a $\langle 0, +\infty)$.

3

$$y'' = \frac{d\,y'}{dt} \cdot \frac{1}{\dot x} = \frac{-2(1-t^2)\cdot(-2t)(1+t^2)^2 + (1-t^2)^2 \cdot 2(1+t^2)\,2t}{(1+t^2)^4} \cdot \frac{1}{\dfrac{2t}{(1-t^2)^2}} =$$

$$= \frac{(1-t^2)\cdot 4t(1+t^2+1-t^2)\cdot(1-t^2)^2}{(1+t^2)^3 \cdot 2t} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}$$

$$y'' \begin{cases} > 0 \ \text{ pro } t \in \langle 0, 1) \ \Rightarrow \ y = f(x) \text{ je ryze konvexní pro } x \in \langle 0, +\infty) \\ < 0 \ \text{ pro } t \in (1, +\infty) \ \Rightarrow \ y = f(x) \text{ je ryze konkávní pro } x \in (-\infty, -1) \\ = 0 \ \text{ pro } t \to 1^- \text{ a pro } t \to 1^+ \end{cases}.$$

4 Asymptoty:

a) $y = kx + q$

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} \frac{y}{x} = \begin{cases} (x \to +\infty): \ \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{t^2}{1-t^2}} = \lim\limits_{t\to 1^-} \dfrac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} = 0 \\ (x \to -\infty): \ \lim\limits_{t\to 1^+} \dfrac{1-t^2}{t^2(1+t^2)} = 0 \end{cases},$$

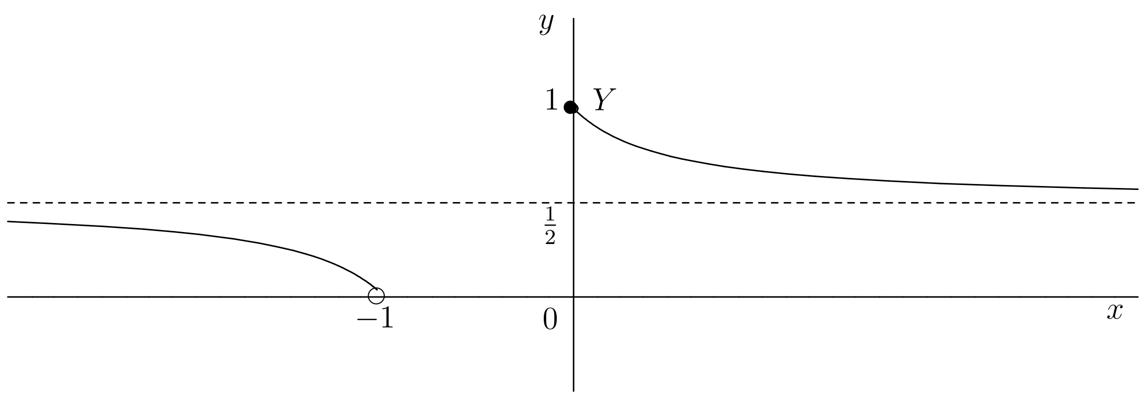
$$q = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} (y - kx) = \lim_{\substack{t \to 1^- \\ t \to 1^+}} y = \lim_{t\to 1^\pm} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{2}.$$

Přímka $y = \dfrac{1}{2}$ je asymptotou pro $x \to -\infty$ a $x \to +\infty$.

b) Svislá asymptota neexistuje.

5

t	0		1		$+\infty$
x	0	$+\infty$		$-\infty$	-1
y	1	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	0
$y' \Rightarrow$	$\searrow$	0		0	$\searrow$
$y'' \Rightarrow$	$\smile$			$\frown$	
	Y	$y = \frac{1}{2}$ asymp.			



■

181. Ukažte, že danými rovnicemi je parametricky definována funkce $y = f(x)$. Určete její definiční obor, obor funkčních hodnot a doplňte chybějící souřadnici bodu A, jestliže:

a) $\begin{cases} x = t^3 - 8, \quad t \in \mathbb{R}, \quad A = [0, \ \ ] \\ y = t^2 + 3, \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \quad A = [-1, \ \ ] \\ y = \sin^2 t, \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x = \arcsin t, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle, \quad A = \left[\dfrac{\pi}{6}, \ \ \right] \\ y = 2t, \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ D(f) = (-\infty, +\infty), & H(f) = \langle 3, +\infty), & A = [0, 7]\ (t = 2) \\ \textbf{b)}\ D(f) = (-\infty, +\infty), & H(f) = \langle 0, 1), & A = \left[-1, \frac{1}{2}\right]\ \left(t = -\frac{\pi}{4}\right) \\ \textbf{c)}\ D(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle, & H(f) = \langle -2, 2 \rangle, & A = \left[\frac{\pi}{6}, 1\right]\ \left(t = \frac{1}{2}\right) \end{array}\right]$$

182. Určete maximální možné intervaly, na kterých jsou rovnicemi $x = t - \ln t$, $y = t^2$ definovány parametricky funkce $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$. Určete definiční obory těchto funkcí, obory funkčních hodnot a parametrické vyjádření jejich derivací.

$$\left[\begin{array}{lll} t\in(0,1\rangle \;\Rightarrow\; y=f_1(x), & D(f_1)=\langle 1,+\infty),\; H(f_1)=(0,1\rangle; & y'=\dfrac{2t^2}{t-1},\; t\in(0,1) \\ t\in\langle 1,+\infty) \;\Rightarrow\; y=f_2(x), & D(f_2)=(-\infty,1\rangle,\; H(f_2)=\langle 1,+\infty); & y'=\dfrac{2t^2}{t-1},\; t\in(1,+\infty) \end{array}\right]$$

183. Pro $t \in I$ je parametricky dána funkce $y = f(x)$. Určete $y'(x_0)$ a $y''(x_0)$ v bodě x_0, jehož parametr je $t_0 \in I$, jestliže:

a) $\begin{cases} x = 2t - t^2, & t_0 = 0 \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, & t_0 = \dfrac{\pi}{4} \\ y = 4\sin^2 t, \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x = \arccos t, & t_0 = \dfrac{1}{2} \\ y = \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$; **d)** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t^2}, & t_0 = 1 \\ y = \operatorname{arctg} t, \end{cases}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a)}\; y'=\frac{3}{2},\; y''=\frac{3}{4}; & \textbf{b)}\; y'=-\frac{4}{3},\; y''=0; \\ \textbf{c)}\; y'=\frac{1}{2},\; y''=-\frac{\sqrt{3}}{2}; & \textbf{d)}\; y'=-1,\; y''=0 \end{array}\right]$$

184. Dokažte, že funkce $y = f(x)$ daná parametricky $x = \dfrac{1+\ln t}{t^2}$, $y = \dfrac{3+2\ln t}{t}$, $t \in (\mathrm{e}, +\infty)$ je řešením diferenciální rovnice $y\,y' = 2x(y')^2 + 1$.

185. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě A, je-li funkce dána parametricky:

a) $\begin{cases} x = 27 - t^3, & A = [0, ?]; \\ y = t^3 + t, \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cos t, & t_A = 0; \\ y = \mathrm{e}^t \sin t, \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), & t_A = \pi. \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{lll} \textbf{a)} & \text{tečna: } y=-\frac{28}{27}x+30, & \text{normála: } y=\frac{27}{28}x+30 \\ \textbf{b)} & \text{tečna: } y=x-1, & \text{normála: } y=-x+1 \\ \textbf{c)} & \text{tečna: } y=4, & \text{normála: } x=2\pi \end{array}\right]$$

186. Ověřte, že rovnicemi $x = \mathrm{e}^t + t$, $y = t^2$, $t \in \mathbb{R}$ je parametricky definována jediná funkce $y = f(x)$. Určete její definiční obor, intervaly monotónnosti a lokální extrémy.

$$\left[\begin{array}{c} D(f)=(-\infty,+\infty),\; f(x) \text{ roste pro } x\in\langle 1,+\infty), \\ f(x) \text{ klesá pro } x\in(-\infty,1\rangle,\; M=[1,0] \text{ lokální minimum} \end{array}\right]$$

187. Najděte asymptoty grafu funkce $y = f(x)$ dané parametricky:

a) $x = \dfrac{1}{t+1}$, $y = \dfrac{t}{t-2}$, $t \in \mathbb{R} - \{-1, 2\}$; **b)** $x = \ln t$, $y = \dfrac{1}{t+1}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a)} & \begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ x\Rightarrow\pm\infty \end{cases},\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y\Rightarrow\pm\infty \end{cases} \\ \textbf{b)} & \begin{cases} y=1 \\ x\Rightarrow-\infty \end{cases},\begin{cases} y=0 \\ x\Rightarrow+\infty \end{cases} \end{array}\right]$$

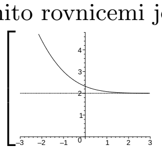
188. Určete poloměr křivosti křivky c v bodě A, jestliže:

a) $c: \begin{cases} x = t^2 - 3t + 2, & A = [0,0]; \\ y = t^2 - 4t + 4, \end{cases}$ **b)** $c: \begin{cases} x = t^3 + t, & A = [2,0]. \\ y = t\,\ln t, \end{cases}$.

(Použijte vzorce z příkladu **174**).

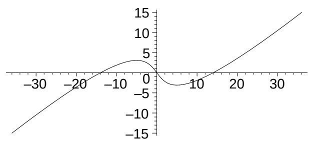
$$\left[\;\textbf{a)}\; r=\frac{1}{2};\; \textbf{b)}\; r=\frac{17\sqrt{17}}{2}\;\right]$$

189.* Vyšetřete průběh funkce $y = f(x)$ dané parametricky $x = t - \mathrm{e}^{-t}$, $y = 2 + \mathrm{e}^{-2t}$.
(Nezapomeňte ověřit, že těmito rovnicemi je určena jediná funkce.)



$t \in (-\infty, +\infty)$
$D(f) = (-\infty, +\infty)$, $H(f) = (2, +\infty)$
extrémy a infl. body neexistují
$y = 2$ je asymptotou pro $x \Rightarrow +\infty$

190.* Dokažte, že parametrickými rovnicemi $x = t^3 + 3t,\ y = t^3 - 4t$ je definována jediná funkce $y = f(x)$. Určete její definiční obor, vyšetřete průběh a nakreslete její graf.



$t \in (-\infty, +\infty)$

$M_1 = \left[-\dfrac{26}{3\sqrt{3}}, \dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right]$ lok.max.

$M_2 = \left[\dfrac{26}{3\sqrt{3}}, -\dfrac{16}{3\sqrt{3}}\right]$ lok.min.

$I = [0, 0]$ infl.bod

$Y = [0, 0],\ X_1 = [-14, 0],\ X_2 = [14, 0]$ průs. s osami

asymptoty neexistují

191.* Vyšetřete křivku c danou parametricky $x = t^2 - 4t,\ y = t^3 - 1,\ t \in \mathbb{R}$. Ukažte, že graf c je sjednocením grafů dvou funkcí $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$. Určete $D(f_1),\ D(f_2)$.

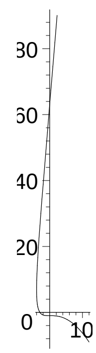
$t \in (-\infty, 2\rangle \Rightarrow y = f_1(x)$, $D(f_1) = \langle -4, +\infty)$, $I_1 = [0, -1]$ – infl. bod

$t \in \langle 2, +\infty) \Rightarrow y = f_2(x)$, $D(f_2) = \langle -4, +\infty)$, $I_2 = [0, 63]$ – infl. bod

asymptoty neexistují X=[-3, 0] průs. s osou x

t	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
x	$+\infty$	0	-4	0	$+\infty$
y	$-\infty$	-1	7	63	$+\infty$
$y' \Rightarrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$y'' \Rightarrow$	$\frown$	0	$\smile$ $\vert$ $\frown$	0	$\smile$
		I_1	A	I_2	

$\underbrace{\qquad\qquad}_{y = f_1(x)}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{y = f_2(x)}$



14. Přibližné řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$

***Příklad* 192**. Dokažte, že následující rovnice mají alespoň jedno řešení v daném intervalu I :

a) $x^3 - 3x^2 + 3 = 0, \quad I = \langle -1, 3\rangle$; **b)** $\mathrm{e}^x + x = 0, \quad I = \langle -1, 0\rangle$;

c) $\arcsin x + 2x + 1 = 0, \quad I = \left\langle -\dfrac{1}{2}, 0\right\rangle$.

Řešení: Rovnice $f(x) = 0$ má alespoň jedno řešení v intervalu $I = \langle a, b\rangle$, jestliže platí následující dvě podmínky:

(1) *$f(x)$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$,*

(2) *$f(a) \cdot f(b) < 0$.*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3, \quad I = \langle -1, 3\rangle$.

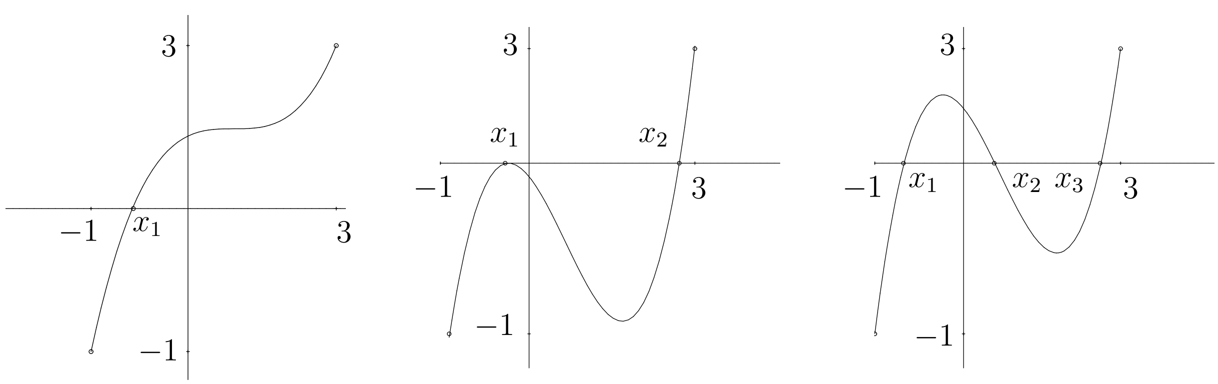
Tato funkce je spojitá pro všechna $x \in \mathbb{R}$, tedy i v daném intervalu. Vypočítáme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu

$$f(-1) = -1 - 3 + 3 = -1 < 0, \qquad f(3) = 27 - 27 + 3 = 3 > 0.$$

Skutečně, funkční hodnoty mají opačná znaménka a to znamená, že rovnice $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ má v intervalu $\langle -1, 3\rangle$ aspoň jeden kořen, ale možná to budou tři kořeny, nikoliv více.

Poznámka: Rovnice 3. stupně může mít v oboru reálných čísel buď jeden nebo dva (jeden je dvojnásobný) nebo tři reálné kořeny.

Na obrázku znázorníme tyto možnosti:



b) $f(x) = \mathrm{e}^x + x, \quad I = \langle -1, 0\rangle$.

Opět: uvažovaná funkce je spojitá v $\mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$,

$$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 < 0,$$
$$f(0) = \mathrm{e}^0 + 0 = 1 > 0.$$

Dokázali jsme, že rovnice $\mathrm{e}^x + x = 0$ má alespoň jedno řešení v intervalu $\langle -1, 0\rangle$.

c) $f(x) = \arcsin x + 2x + 1, \quad I = \left\langle -\dfrac{1}{2}, 0\right\rangle$. $\quad f(x)$ je spojitá v $\left\langle -\dfrac{1}{2}, 0\right\rangle$ (maximální interval spojitosti této funkce je $\langle -1, 1\rangle$),

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 - 1 = -\frac{\pi}{6} - 2 < 0,$$
$$f(0) = \arcsin 0 + 0 + 1 = 1 > 0.$$

Z toho plyne, že rovnice $\arcsin x + 2x + 1 = 0$ má alespoň jedno řešení v intervalu $\left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$.

■

***Příklad* 193.** Ověřte, že následující rovnice mají právě jedno řešení ξ v daném intervalu I. Vypočítejte první tři aproximace x_1, x_2 a x_3 metodou půlení intervalu a odhadněte $|x_3 - \xi|$, jestliže

a) $x^3 - 6x + 2 = 0, \quad I = \langle -1, 1 \rangle$; **b)** $x^3 + 27x - 72 = 0, \quad I = \langle 2, 3 \rangle$.

Řešení: *Rovnice $f(x) = 0$ má právě jeden kořen $\xi \in \langle a, b \rangle$, platí-li kromě podmínek* **(1)** a **(2)** *z předcházejícího příkladu též podmínka*

(3) *$f(x)$ je ryze monotónní v $\langle a, b \rangle$.*

Platí-li podmínky **(1)**, **(2)** *a* **(3)**, *potom první aproximaci x_1 dostaneme metodou* ***půlení intervalu*** *podle vzorce $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ atd.*
Pro odhad přesnosti n-té aproximace či vzdálenosti x_n od kořenu ξ platí

$$|x_n - \xi| \leq \frac{b-a}{2^n}, \qquad x_n \text{ konverguje ke } \xi.$$

a) $f(x) = x^3 - 6x + 2, \quad I = \langle -1, 1 \rangle$

(1) $f(x)$ je spojitá v $I = \langle -1, 1 \rangle$,

(2) $f(-1) = -1 + 6 + 2 = 7 > 0$,
$f(1) = 1 - 6 + 2 = -3 < 0$,

(3) $f'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2 - 2) < 0$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$.
($f(x)$ je klesající na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$)

Z toho usoudíme, že v intervalu $(-1, 1)$ má rovnice $x^3 - 6x + 2 = 0$ právě jedno řešení a první aproximace je

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$

Určíme znaménko funkční hodnoty v bodě $x_1 = 0$: $f(x_1) = f(0) = 2 > 0$
a jako další bod vybereme jeden z krajních bodů intervalu $\langle -1, 1 \rangle$, v němž má funkční hodnota opačné znaménko než $f(0)$. Bude to bod 1, protože $f(1) = -3 < 0$, takže

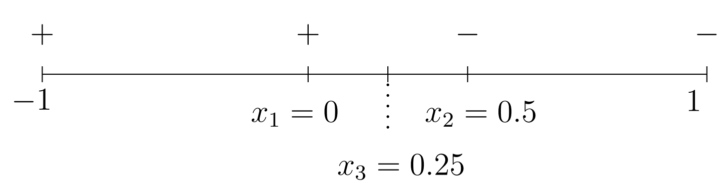
$$a_1 = 0,\ b_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.5.$$

Podobně určíme znaménko funkční hodnoty v bodě $x_2 = 0.5$ a k němu zvolíme jeden z bodů a_1 nebo b_1 tak, aby funkční hodnota v něm měla opačné znaménko než $f(x_2)$:

$f(x_2) = f(0.5) = 0.125 - 3 + 2 = -0.875 < 0$,
$f(0) = 2 > 0$,

$$a_2 = 0,\ b_2 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 0.25.$$

Provedené aproximace znázorníme schematicky, kde znaménka nahoře znamenají znaménka příslušných funkčních hodnot.



Pro vzdálenost x_3 od kořenu ξ dostáváme odhad:

$$|x_3 - \xi| \le \frac{b-a}{2^3} \quad \Rightarrow \quad |x_3 - \xi| \le \frac{1}{4}.$$

b) $f(x) = x^3 + 27x - 72, \quad I = \langle 2,\, 3\rangle$

(1) $f(x)$ je spojitá v $I = \langle 2,\, 3\rangle$,

(2) $f(2) = 8 + 54 - 72 < 0, \qquad f(3) = 27 + 81 - 72 > 0,$

(3) $f'(x) = 3x^2 + 27 > 0$ pro $x \in I \quad \Rightarrow \quad f(x)$ je rostoucí na intervalu $\langle 2,\, 3\rangle$.

Rovnice $x^3 + 27x - 72 = 0$ má právě jeden kořen na intervalu $\langle 2, 3\rangle$

a první aproximace je $\quad x_1 = \dfrac{2+3}{2} = 2.5,$

$$f(x_1) = f(2.5) = 2.5^3 + 27 \cdot 2.5 - 72 = 15.625 + 67.5 - 72 > 0,$$

$$f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2,\ b_1 = 2.5 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 2.25,$$

$$f(x_2) = f(2.25) \doteq 11.4 + 60.75 - 72 = 0.15 > 0,$$

$$f(2) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2,\ b_2 = 2.25 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 2.125,$$

$$|x_3 - \xi| \le \frac{b-a}{2^3} \quad \Rightarrow \quad |x_3 - \xi| \le \frac{1}{8}.$$

■

***Příklad* 194**. Ověřte, že následující rovnice mají právě jedno řešení v daném intervalu I a zjistěte, zda je možné k jeho přibližnému určení použít Newtonovu metodu. Když ano, zvolte počáteční aproximaci x_0, vypočítejte následující aproximaci x_1 a odhadněte chybu $|x_1 - \xi|$, jestliže:

a) $\ln x + x = 0, \quad I = \langle 0.1, 1\rangle$; **b)** $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 10x = 0\ , \quad I = \langle 9, 10\rangle$.

*Řešení: Rovnici $f(x) = 0,\ x \in \langle a, b\rangle$ lze vyřešit přibližně **Newtonovou metodou**, jestliže platí následující podmínky:*

(1) *funkce $f(x)$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ druhou derivaci $f''(x)$, která zde nemění znaménko,*

(2) *$f'(x) \ne 0$ a $f''(x) \ne 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$,*

(3) *$f(a) \cdot f(b) < 0$.*

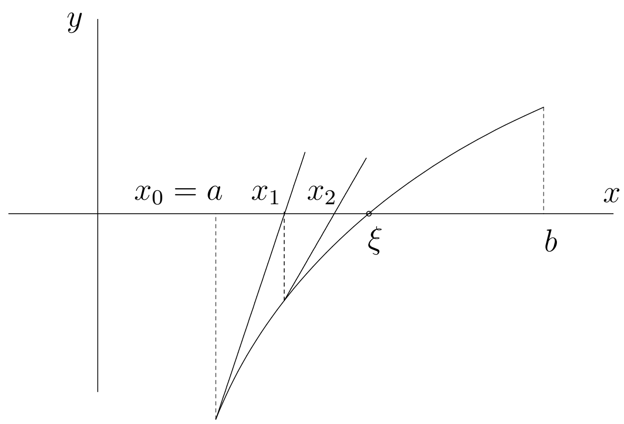
Z platnosti těchto podmínek plyne existence jediného kořenu $\xi \in \langle a, b\rangle$. Počáteční aproximaci $x_0 \in \{a, b\}$ zvolíme tak, aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Potom $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ a pro libovolné $n \in N$ platí rekurentní vzorec $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

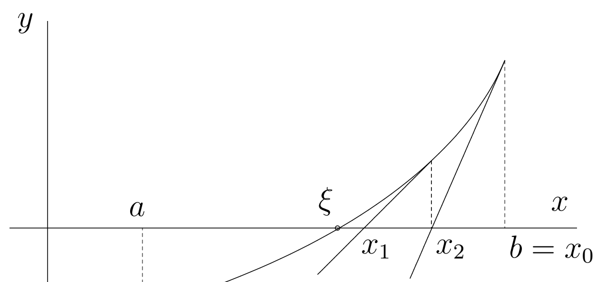
Pro vzdálenost x_n od kořenu ξ platí odhad

$$|x_n - \xi| \le \frac{|f(x_n)|}{m},\ \textit{kde}\ \ m = \min_{\langle a,b\rangle} |f'(x)|\}.$$

Poznámka: Newtonova metoda se též nazývá **metodou tečen**, jelikož přiblížení x_n dostaneme jako průsečík tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $\big[x_{n-1}, f(x_{n-1})\big]$ s osou x. Platnost podmínky **(1)** a **(2)** zaručuje, že posloupnost $x_1,\ x_2, \ldots,$ $x_n, \ldots$ se bude blížit ke kořenu ξ buď jenom zleva nebo jenom zprava.

pro $f''(x) < 0$: pro $f''(x) > 0$:





a) $\ln x + x = 0, \quad I = \langle 0.1, 1\rangle$

(1) $f(x) = \ln x + x\ , \quad f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1, \quad f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} < 0$ pro všechna $x \in I$,

(2) $f'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 \neq 0, \quad f''(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$,

(3) $f(0.1) = \ln(0.1) + 0.1 = -\ln 10 + 0.1 < 0, \quad f(1) = \ln 1 + 1 = 1 > 0.$

Z podmínek $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0,\ x_0 \in \{0.1, 1\},\ f''(x_0) < 0 \ \Rightarrow\ f(x_0) < 0$ stanovíme $x_0 = 0.1$. Použitím Newtonovy metody vypočítáme první aproximaci:

$$x_1 = 0.1 - \frac{f(0.1)}{f'(0.1)} = 0.1 - \frac{0.1 - \ln 10}{11} = \frac{1 + \ln 10}{11} \doteq \frac{1 + 2.3}{11} \doteq 0.3,$$

$f(x_1) = f(0.3) = \ln 0.3 + 0.3 \doteq -0.903 \quad , \quad m = \min_{\langle 0.1,1\rangle} |f'(x)| = f'(1) = 2.$

<u>Odhad</u>: $\quad |x_1 - \xi| \leq \dfrac{|f(x_1)|}{m} \doteq \dfrac{0.903}{2} = 0.451.$

b) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 10x = 0, \quad I = \langle 9, 10\rangle$

(1) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 10x,\ f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} - 10 = \dfrac{2x^4 - 2 - 10x^3}{x^3} = 2\,\dfrac{x^3(x-5) - 1}{x^3} > 0\ ,$

$f''(x) = 2 + \dfrac{6}{x^4} > 0$ pro všechna $x \in I$,

(2) $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3} - 10 \neq 0, \quad f''(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$,

(3) $f(9) = 81 + \dfrac{1}{81} - 90 < 0, \quad f(10) = 100 + \dfrac{1}{100} - 100 = \dfrac{1}{100} > 0,$

$x_0 = 10$, protože $f(10) \cdot f''(10) > 0$.

Nyní spočítáme první aproximaci:

$$x_1 = 10 - \frac{f(10)}{f'(10)} = 10 - \frac{\frac{1}{100}}{20 - \frac{2}{1000} - 10} = 10 - \frac{0.01}{9.998} \doteq 10 - 0.001 = 9.999,$$

$f(x_1) = f(9.999) = 99.980001 + \dfrac{1}{99.98} - 99.99 = -0.009999 + 0.010002 = 0.000003,$

$$m = \min_{\langle 9;10\rangle}|f'(x)| = f'(9) = 18 - \frac{2}{729} - 10 = 8 - 0.00274 = 7.99726,$$

Odhad: $\quad |x_1 - \xi| \le \dfrac{|f(x_1)|}{m} = \dfrac{0.000003}{7.99726} \doteq 4\cdot 10^{-7}.$

■

***Příklad* 195**. Ověřte předpoklady pro použití Newtonovy metody pro řešení rovnice $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$. Zvolte počáteční aproximaci x_0; vypočítejte $x_1,\ x_2$ a odhadněte $|x_2 - \xi|$.

Řešení: **(1)** $f(x) = x^3 + 5x^2 - 10, \quad I = \langle 1, 2\rangle,$
$f'(x) = 3x^2 + 10x > 0, \quad f''(x) = 6x + 10 > 0$ pro $x \in I$;

(2) $f'(x) \ne 0$ a $f''(x) \ne 0$, pro všechna $x \in I$;

(3) $f(1) = -4 < 0, \quad f(2) = 18 > 0,$
$x_0 = 2$, protože $f(2)\cdot f''(2) > 0$.

Přistoupíme k výpočtu jednotlivých aproximací:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{18}{32} \doteq 1.438,$$

$$f(x_1) = f(1.438) = 3.313, \quad f'(x_1) = f'(1.438) = 20.584,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.438 - \frac{3.313}{20.584} \doteq 1.277.$$

Zbývá provést odhad $|x_2 - \xi| \le \dfrac{|f(x_2)|}{m}$, kde $\quad f(x_2) = f(1.277) = 0.237$ a
$m = \min_{\langle 1,2\rangle}|f'(x)| = f'(1) = 13.$

Vybrali jsme $f'(1)$, protože $f'(x) > 0$ a současně $f'(x)$ je rostoucí na $\langle 1, 2\rangle$.

Hledaný odhad: $\quad |x_2 - \xi| \le \dfrac{0.237}{13} = 0.018.$

■

***Příklad* 196**. Najděte všechny uzavřené omezené intervaly, v nichž leží jediný kořen rovnice $f(x) = 0$. Ověřte, zda je možné k jeho přibližnému určení použít Newtonovu metodu a zvolte počáteční aproximaci x_0:

a) $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$; **b)** $\ln x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$; **c)** $\mathrm{e}^x - x - 2 = 0$;
d) $|x| - \ln(4 - x^2) = 0$.

Řešení: Prvním krokem je zde nalezení intervalů, splňujících podmínky použití Newtonovy metody přibližného řešení rovnic. K tomu potřebujeme určit chování funkce $f(x)$ pomocí některých funkčních hodnot, znaménka první a druhé derivace.

a) Budeme uvažovat funkci $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$;

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x-3)(x+1),$$

$$f'(x) \left\langle \begin{array}{lll} > 0, & \text{pro } x \in (-\infty, -1),\ x \in (3, +\infty) & \Rightarrow \text{ funkce je rostoucí} \\ < 0, & \text{pro } x \in (-1, 3) & \Rightarrow \text{ funkce je klesající} \end{array}\right. ,$$

$$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1) \left\langle \begin{array}{lll} > 0, & x > 1 & \Rightarrow \text{ funkce je ryze konvexní} \\ < 0, & x < 1 & \Rightarrow \text{ funkce je ryze konkávní} \end{array}\right. .$$

Sestavíme tabulku důležitých hodnot:

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	10		-6		-22		$+\infty$
$f'(x) \Rightarrow$	$\nearrow$	0		$\searrow$		0	$\nearrow$	
$f''(x) \Rightarrow$		$\frown$		0		$\smile$		

Z této tabulky je jasné, že rovnice $x^3 - 3x^2 - 9x + 5 = 0$ bude mít tři reálné kořeny

$$\xi_1 < -1, \qquad -1 < \xi_2 < 1, \qquad \xi_3 > 3\ .$$

Nyní zpřesníme intervaly $\langle a_i, b_i\rangle$ tak, aby $\xi_i \in \langle a_i, b_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$ a aby na těchto intervalech platily podmínky Newtonovy metody: $f(a_i)\cdot f(b_i) < 0$, $f'(x)$ a $f''(x)$ neměnila znaménka na $\langle a_i, b_i\rangle$ a $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$.

To znamená, že body $-1, 1, 3$ nemohou být krajními body uvažovaných intervalů. Proto sestavíme podrobnější tabulku hodnot $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

x	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3	4	5
$f(x)$	-22	3	10	5	$-\frac{1}{8}$	-6	-22	-15	10
$f'(x) \Rightarrow$	$\nearrow$		0	$\searrow$			0	$\nearrow$	
$f''(x) \Rightarrow$			$\frown$			0		$\smile$	

První kořen bude $\underline{\xi_1 \in \langle -3, -2\rangle}$. Na tomto intervalu je $f'(x) > 0$ a $f''(x) < 0$ a $f(-3) = -22 < 0$, $f(-2) = 3 > 0$. Počáteční aproximaci zvolíme $x_0 = -3$, jelikož $f(-3)\cdot f''(-3) > 0$.

Druhý kořen $\underline{\xi_2 \in \left\langle 0, \frac{1}{2}\right\rangle}$: $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$, $f(0) = 5 > 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} < 0$.

Počáteční aproximaci zvolíme $x_0 = \frac{1}{2}$, protože $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

Třetí kořen $\underline{\xi_3 \in \langle 4, 5\rangle}$: $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, $f(4) = -15 < 0$, $f(5) = 10$, $x_0 = 5$, protože $f(5)\cdot f''(5) > 0$.

b) $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + 1 \quad \Rightarrow \quad x > 0,$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x} \;\Big\langle\; \begin{array}{lll} > 0, & x \in (0, 2) & \Rightarrow f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0, & x \in (2, +\infty) & \Rightarrow f(x) \text{ je klesající} \end{array},$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} < 0.$$

Nyní sestavíme rovnou podrobnější tabulku hodnot, ze které snadno vybereme odpovídající intervaly:

x	0	$\frac{1}{e}$		1	2	4		6	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{e}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\ln 2$	$\ln 4 - 1$		$\ln 6 - 2$	$-\infty$
$f'(x) \Rightarrow$			$\nearrow$		0		$\searrow$		
$f''(x) \Rightarrow$					$\frown$				

Kořeny rovnice $\ln x - \dfrac{x}{2} + 1 = 0$ budou celkem dva:

$\underline{\xi_1 \in \left\langle \frac{1}{e}, 1 \right\rangle}$: $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0, f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{e}{2} < 0,\ f(1) = \frac{1}{2} > 0,$

$$x_0 = \frac{1}{e},\quad f\left(\frac{1}{e}\right) \cdot f''\left(\frac{1}{e}\right) > 0.$$

$\underline{\xi_2 \in \langle 4, 6\rangle}$: $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0, f(4) = \ln 4 - 1 > 0,\ f(6) = \ln 6 - 2 < 0,$

$$x_0 = 6,\quad f(6) \cdot f''(6) > 0.$$

c) $f(x) = e^x - x - 2,$

$$f'(x) = e^x - 1 \quad \Big\langle \begin{array}{lll} > 0, & x > 0 & \Rightarrow f(x) \text{ je rostoucí} \\ < 0, & x < 0 & \Rightarrow f(x) \text{ je klesající} \end{array},$$

$f''(x) = e^x > 0.$

x		-2		-1	0	1		2	
$f(x)$		$\frac{1}{e^2}$		$\frac{1}{e} - 1$	-1	$e - 3$		$e^2 - 4$	
$f'(x) \Rightarrow$			$\searrow$		0		$\nearrow$		
$f''(x) \Rightarrow$					$\smile$				

Rovnice $e^x - x - 2 = 0$ má dvě řešení:

$\underline{\xi_1 \in \langle -2, -1\rangle}$: $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0, f(-2) = \frac{1}{e^2} > 0,\ f(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0,$

$$x_0 = -2,\quad f(-2) \cdot f''(-2) > 0.$$

$\underline{\xi_2 \in \langle 1, 2\rangle}$: $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0, f(1) = e - 3 < 0,\ f(2) = e^2 - 4 > 0,$

$$x_0 = 2,\quad f(2) \cdot f''(2) > 0.$$

d) $f(x) = |x| - \ln(4 - x^2) \quad \Rightarrow \quad 4 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-2, 2)$

Tato funkce je sudá $f(-x) = f(x)$ pro všechna $x \in (-2, 2)$. Proto se omezíme na vyšetření kladných kořenů:

$x > 0: \; f(x) = x - \ln(4 - x^2)$

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{4 - x^2} = 1 + \frac{2x}{4 - x^2} \left\langle \begin{array}{ll} > 0, & x \in \langle 0, 2) \\ < 0, & \text{neexistuje} \end{array} \right. ,$$

$$f''(x) = \frac{2(4 - x^2) + 2x \cdot 2x}{(4 - x^2)^2} = \frac{8 + 2x^2}{(4 - x^2)^2} > 0.$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	$-\ln 4$	$1 - \ln 3 < 0$	$\frac{3}{2} - \ln \frac{7}{4} > 0$	$+\infty$
$f'(x) \Rightarrow$		$\nearrow$		
$f''(x) \Rightarrow$		$\smile$		

$|x| - \ln(4 - x^2) = 0$ má dvě řešení $\xi_1, \; \xi_2$ symetrická podle počátku ($\xi_2 = -\xi_1$):

$\underline{\xi_1 \in \left\langle 1, \frac{3}{2} \right\rangle}$: $f'(x) > 0, \; f''(x) > 0, \; f(1) = 1 - \ln 3 < 0, f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln \frac{7}{4} > 0,$

$$x_0 = \frac{3}{2}, \quad f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{3}{2}\right) > 0.$$

$\underline{\xi_2 \in \left\langle -\frac{3}{2}, -1 \right\rangle}$: $f'(x) < 0, \; f''(x) > 0, f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \ln \frac{7}{4} > 0, \; f(-1) = 1 - \ln 3$

$$f(-1) < 0, x_0 = -\frac{3}{2}, \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot f''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0.$$

■

197. Dokažte, že následující rovnice $f(x) = 0$ mají vždy alespoň jedno řešení v daném intervalu I:

a) $x - \frac{1}{2} \sin x - 1 = 0, \quad I = \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$; **b)** $x^2 - \operatorname{arctg} x - 1 = 0, \quad I = \langle 1, \sqrt{3} \rangle$;

c) $\ln x - 2x + 3 = 0, \quad I = \langle 1, \mathrm{e} \rangle$.

[**a)** $f(0) < 0, \; f(\frac{\pi}{2}) > 0$; **b)** $f(1) < 0, \; f(\sqrt{3}) > 0$; **c)** $f(1) > 0, \; f(\mathrm{e}) < 0$]

198. Ověřte, že následující rovnice $f(x) = 0$ mají vždy právě jedno řešení v daném intervalu I. Metodou půlení intervalu vypočítejte aproximaci x_2 a odhadněte $|x_2 - \xi|$:

a) $x^3 + x^2 - 4 = 0, \quad I = \langle 1, 2 \rangle$; **b)** $\frac{1}{x + 1} - x^2 + 2 = 0, \quad I = \langle 0, 2 \rangle$;

c) $x^5 + 5x^3 - 5 = 0, \quad I = \langle 0, 1 \rangle$.

$$\left[\begin{array}{lll} \textbf{a)}\ x_1 = 1.5, & x_2 = 1.25, & |x_2 - \xi| \le \frac{1}{4} \\ \textbf{b)}\ x_1 = 1, & x_2 = 1.5, & |x_2 - \xi| \le \frac{1}{2} \\ \textbf{c)}\ x_1 = 0.5, & x_2 = 0.75, & |x_2 - \xi| \le \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

199. Ověřte, že následující rovnice mají vždy právě jedno řešení v daném intervalu I a zjistěte, zda je možné k jeho přibližnému určení použít Newtonovu metodu. Jestliže ano, pak zvolte počáteční aproximaci x_0, vypočítejte x_1 a odhadněte $|x_1 - \xi|$:

a) $x^3 + 3x^2 - 5 = 0, \quad I = \langle 1, 2 \rangle$; **b)** $x^4 + 3x^3 - 6 = 0, \quad I = \langle 0, 2 \rangle$;

c) $\operatorname{arctg} x + x^2 - 1 = 0, \quad I = \langle -\sqrt{3}, -1 \rangle$.

$$\left[\begin{array}{llll} \textbf{a)} & \text{ano} & x_0 = 2,\ x_1 = \dfrac{11}{8}, & |x_1 - \xi| \leq 0.363 \\ \textbf{b)} & \text{nelze} & f'(0) = f''(0) = 0 & \\ \textbf{c)} & \text{ano} & x_0 = -\sqrt{3},\ x_1 = -1.435, & |x_1 - \xi| \leq 0.031 \end{array}\right]$$

200. Najděte všechny uzavřené intervaly, v nichž leží právě jeden kořen dané rovnice $f(x) = 0$. Ověřte, zda je možné k jeho přibližnému určení použít Newtonovu metodu a v kladném případě zvolte počáteční aproximaci x_0:

a) $x^3 + 3x^2 - 9x + 3 = 0$; **b)** $2^x + x - 2 = 0$; **c)** $\arcsin \dfrac{x}{4} + 2x - 2 = 0$;

d) $\dfrac{1}{x^2} - 2x + 3 = 0$.

$$\left[\begin{array}{lll} \textbf{a)} & \xi_1 \in \langle -5, -4 \rangle, & x_0 = -5 \\ & \xi_2 \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, & x_0 = 0 \\ & \xi_3 \in \langle \frac{3}{2}, 2 \rangle, & x_0 = 2 \\ \textbf{b)} & \xi \in \langle 0, 1 \rangle, & x_0 = 1 \\ \textbf{c)} & \xi \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle, & x_0 = 1 \\ \textbf{d)} & \xi \in \langle 1, 2 \rangle, & x_0 = 1 \end{array}\right]$$

15. Přehled nejdůležitějších vzorců

I Limity

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

II Derivace

$$(k)' = 0, \quad k \text{ je konstanta}, \qquad (x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \text{ je konstanta},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}, \quad a > 0,$$

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \qquad (a^x)' = a^x\cdot\ln a, \quad a>0,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2},$$

$$\big[k\cdot f(x)\big]' = k\cdot f'(x), \quad k \ \text{ je konstanta},$$

$$\big[f(x)\pm g(x)\big]' = f'(x)\pm g'(x),$$

$$\big[f(x)\cdot g(x)\big]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x), \quad \text{zkráceně} \ (uv)' = u'v+uv',$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}, \quad \text{zkráceně} \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2},$$

$$\Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x),$$

$$\big[f(x)^{g(x)}\big]' = \big[\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\big]' = \mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln f(x)}\left[g'(x)\cdot\ln f(x) + g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right], \text{ kde } f(x)>0,$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad y' = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\dot y}{\dot x}, \quad y^{(n)} = \frac{d\,y^{(n-1)}}{d\,t}\cdot\frac{1}{\dot x}, \quad n\in\mathbb{N},\ \dot x \neq 0.$$

III Taylorův vzorec

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1},$$

$$\text{kde } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ bod } \xi \text{ je mezi } x \text{ a } x_0.$$

Pro $x_0 = 0$:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1},$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+3},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+2}.$$

Doporučená literatura

[1] J. Neustupa: **Matematika I** ČVUT, Praha 1998 (*Základní literatura pro předmět Matematika I. Skriptum určené pro studenty FSI ČVUT v Praze.)*

[2] B. Budínský, J. Charvát: **Matematika I** SNTL/Alfa, Praha 1987 (*Podrobná, srozumitelně napsaná učebnice.)*

[3] J. Neustupa, S. Kračmar: **Sbírka příkladů z Matematiky I** ČVUT, Praha 1998 (*Rozsáhlá sbírka neřešených příkladů z Matematiky I.)*

[4] K. Rektorys: **Přehled užité matematiky** SNTL Praha 1988 (*Rozsáhlá encyklopedie aplikované matematiky napsaná pro potřeby technických věd.)*