Obsah

1. Tabulka základních integrálů

(1) $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$

(3) $\displaystyle\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(4) $\displaystyle\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + C$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$

(7) $\displaystyle\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \; a \neq 1$

(8) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, dx = \mathrm{e}^x + C$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C_1 = -\operatorname{arccotg} x + C_2$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

Další vzorce patří k tzv. "rozšířené" tabulce:

(12) $\displaystyle\int \sin\, ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$

(13) $\displaystyle\int \cos\, ax \, dx = \frac{\sin ax}{a} + C$

(14) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax} \, dx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + C$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

(16) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(17) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,$ resp. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

(18) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$

(19) $\displaystyle\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) \, dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2. Integrace užitím základních vzorců

• Vypočtěte dané integrály použitím tabulkových integrálů:

***Příklad* 1.** $\displaystyle\int (3x^2 - 16x + 10)\, dx$

Řešení: $\displaystyle\int (3x^2 - 16x + 10)\, dx = 3\int x^2\, dx - 16\int x\, dx + 10\int dx =$

$$= \left|\text{použijeme vzorec } \boxed{\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C}\right| = 3\cdot\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 10x + C = x^3 - 8x^2 + 10x + C,$$

$x \in \mathbb{R}$.

■

***Příklad* 2.** $\displaystyle\mathcal{J} = \int \left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + 4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{x^3}\right) dx$

Řešení: Integrál napíšeme jako součet jednotlivých integrálů a současně každý integrál napíšeme ve tvaru $\int x^n\, dx$:

$$\mathcal{J} = \int x^{-\frac{3}{2}}\, dx + 4\int x^{\frac{1}{3}}\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx + 5\int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + 4\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 5\cdot\frac{x^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} + 3x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x} + \frac{5}{2x^2} + C, \qquad x \in (0, \infty).$$

■

***Příklad* 3.** $\displaystyle\mathcal{J} = \int \left(y^\pi + \frac{1}{y^{\mathrm{e}}} + \frac{4}{\sqrt{y^3}}\right) dy$

Řešení: $\displaystyle\mathcal{J} = \int y^\pi\, dy + \int y^{-\mathrm{e}}\, dy + 4\int y^{-\frac{3}{2}}\, dy = \frac{y^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{y^{-\mathrm{e}+1}}{1-\mathrm{e}} + 4\frac{y^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C =$

$$= \frac{y^{\pi+1}}{\pi+1} - \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\, y^{\mathrm{e}-1}} - \frac{8}{\sqrt{y}} + C, \qquad y \in (0, \infty).$$

■

***Příklad* 4.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x}+1}\, dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \left|\text{použijeme vzorec } a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),\ \text{kde } a = \sqrt{x},\ b = 1\right| =$

$$= \int \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)}{\sqrt{x}+1}\, dx = \int \left(x - \sqrt{x} + 1\right) dx = \left|\text{integrujeme člen po členu}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + x + C = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x + C, \qquad x \in \langle 0, \infty).$$

■

Příklad 5. $\displaystyle\int \frac{(2-z)^3}{z}\, dz$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{(2-z)^3}{z}\, dz = \Big|$ rozepíšeme třetí mocninu a potom vydělíme čitatel (člen po členu) jmenovatelem $\Big| =$

$$= \int \frac{8 - 12z + 6z^2 - z^3}{z}\, dz = \int \left(\frac{8}{z} - 12 + 6z - z^2\right) dz =$$

$$= 8\ln|z| - 12z + 3z^2 - \frac{z^3}{3} + C, \qquad z \in (-\infty, 0),\ z \in (0, \infty).$$

■

Příklad 6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\, dx$

Řešení: Integrál není tabulkový, proto nejdříve provedeme vhodnou úpravu. V čitateli přičteme a odečteme $\boldsymbol{x^2}$ a potom zlomek napíšeme jako součet dvou zlomků.

$$\int \frac{1}{x^2\left(1+x^2\right)}\, dx = \int \frac{1 \boldsymbol{+ x^2 - x^2}}{x^2\left(1+x^2\right)}\, dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2\left(1+x^2\right)} - \frac{x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^2}\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx - \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} - \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, \infty).$$

■

Příklad 7. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^4 \boldsymbol{-1+1}}{x^2+1}\, dx = \int \left(\frac{x^4-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$

$$= \int \left(\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

Příklad 8. $\displaystyle\int \left(2^x + 3^x\right)^2 dx$

Řešení: Integrovaný výraz umocníme a pak člen po členu integrujeme podle vzorce

$$\boxed{\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}:$$

$$\int \left(2^x + 3^x\right)^2 dx = \int \left(2^x \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^x \cdot 3^x\right) dx = \int \left(4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x\right) dx =$$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2\,\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

Příklad 9. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx$

Řešení: Použijeme úpravy: $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x,\ 5^{x-1} = \dfrac{1}{5} \cdot 5^x$ a $10^x = (2 \cdot 5)^x = 2^x \cdot 5^x$. Potom

$$\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx = \int \frac{2 \cdot 2^x - \frac{1}{5}\,5^x}{2^x \cdot 5^x}\,dx = \int \left(\frac{2}{5^x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^x}\right) dx =$$

$$= \int \left(2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right) dx = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln \frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{2}{-\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5}\,\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x =$$

$$= \frac{-2}{5^x \ln 5} + \frac{1}{2^x\, 5\, \ln 2} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

Příklad 10. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

Řešení: $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx =$

$$= \operatorname{tg} x - x + C, \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

Příklad 11. $\displaystyle\int \frac{\cos 2\,x}{\sin x + \cos x}\,dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{\cos 2\,x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x}\,dx = \int \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x}\,dx =$

$$= \int (\cos x - \sin x)\,dx = \sin x + \cos x + C,$$

$$\sin x + \cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \frac{3}{4}\pi + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

Příklad 12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx = \left|\ \text{použijeme: } 1 = \sin^2 x + \cos^2 x\ \right| = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx =$

$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C,$$

$$x \neq k\,\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x \in \left(k\,\frac{\pi}{2},\ (k+1)\,\frac{\pi}{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 13.** $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx$

Řešení: $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{2}\, dx = \left|\ \text{použijeme vzorec: } \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}\ \right| = \int \frac{1-\cos x}{2}\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos x)\, dx = \frac{1}{2}\,(x - \sin x) + C, \qquad x \in \mathbb{R}$$

■

***Příklad* 14.** $\displaystyle\int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\, dx$

Řešení: $\displaystyle\int (1+\operatorname{cotg}^2 x)\, dx = \int \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx =$

$$= -\operatorname{cotg} x + C, \qquad x \neq k\pi \quad \Rightarrow \quad x \in \big(k\pi,\ (k+1)\pi\big),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 15.** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}}\, dx =$

$$= \int \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)}} \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \arcsin x + \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + C, \qquad |x| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1, 1).$$

■

***Příklad* 16.** Ověřte, že $F_1(x) = \dfrac{1}{4}\,\ln(2x^2+4)$ a $F_2(x) = \dfrac{1}{4}\,\ln(x^2+2)$ jsou primitivní funkce ke stejné funkci $f(x)$. Na jakém intervalu?

Řešení: Vypočítáme $f(x) = F_1'(x) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{4x}{2x^2+4} = \dfrac{x}{2(x^2+2)}$ a přesvědčíme se, že $F_2'(x) = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{2x}{x^2+2} = F_1'(x) = f(x)$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Existuje i další postup: Dvě funkce jsou primitivní ke stejné funkci $f(x)$ právě tehdy, když se liší nejvýše aditivní konstantou. Skutečně:

$$F_1(x) = \frac{1}{4}\,\ln(2x^2+4) = \frac{1}{4}\,\ln 2(x^2+2) = \frac{1}{4}\,\ln 2 + \frac{1}{4}\,\ln(x^2+2) = \frac{1}{4}\,\ln 2 + F_2(x).$$

■

- Vypočítejte integrály:

17. $\displaystyle\int \left(2x - \sqrt{x\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}\right) dx$ $\qquad \left[x^2 - \frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{x} + C, \quad x \in (0, +\infty)\right]$

18. $\displaystyle\int \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 dx$ $\qquad \left[\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{4}{x} + C, \quad x \in (-\infty,\, 0),\ x \in (0,\, +\infty)\right]$

19. $\displaystyle\int \frac{(3 + x^2)^3}{x^4}\, dx$ $\qquad \left[-\frac{9}{x^3} - \frac{27}{x} + 9x + \frac{x^3}{3} + C, \quad x \in (-\infty,\, 0),\ x \in (0,\, +\infty)\right]$

20. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 8}{x + 2}\, dx$ $\qquad \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + C, \quad x \in (-\infty,\, -2),\ x \in (-2,\, +\infty)\right]$

21. $\displaystyle\int \frac{5 \cdot 3^{x+1} + 3 \cdot 5^x}{15^x}\, dx$ $\qquad \left[-\frac{3}{5^{x-1}\ln 5} - \frac{1}{3^{x-1}\ln 3} + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

22. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$ $\qquad [x - \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}]$

23. $\displaystyle\int \frac{9 - \sin^2 x}{\cos^2 x}\, dx$ $\qquad \left[8\operatorname{tg} x + x + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right]$

24. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\, dx$ $\qquad \left[-2\cos x + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\right]$

25. $\displaystyle\int \frac{1 + \sin^2 x}{1 - \cos 2x}\, dx$ $\qquad \left[-\frac{1}{2}\operatorname{cotg} x + \frac{1}{2}\, x + C, \quad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big), k \in \mathbb{Z}\right]$

26. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 9} + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^4 - 81}}\, dx$ $\qquad \left[\begin{array}{l} \ln|x + \sqrt{x^2+9}| + \ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C, \\ x \in (-\infty,\, -3),\ x \in (3,\, +\infty) \end{array}\right]$

27. $\displaystyle\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$ $\qquad \left[\sqrt{2}\sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

28. $\displaystyle\int \frac{2}{1 - \cos 2x}\, dx$ $\qquad \left[-\operatorname{cotg} x + C, \quad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big), k \in \mathbb{Z}\right]$

3. Substituční metoda

• Vypočtěte integrály:

***Příklad* 29.** $\displaystyle\int (x+5)^{20}\,dx$

Řešení: Zvolíme-li substituci $x+5=t$, pak se integrál vypočítá velmi snadno:

$$\int (x+5)^{20}\,dx = \left|\begin{array}{rr} x+5= & t \\ dx= & dt \end{array}\right| = \int t^{20}\,dt = \frac{t^{21}}{21} + C = \frac{(x+5)^{21}}{21} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

Poznámka: $\boxed{\displaystyle\int f(x+a)\,dx = \left|\begin{array}{rr} x+a= & t \\ dx= & dt \end{array}\right| = \int f(t)\,dt}$ Tyto jednoduché substituce často nepíšeme a rovnou integrujeme.

***Příklad* 30.** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \left|\begin{array}{rr} x+2= & t \\ dx= & dt \end{array}\right| = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt =$

$$= \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x+2) + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 31.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

Řešení: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2-1}}\,dx = \left|\begin{array}{rr} x+1= & t \\ dx= & dt \end{array}\right| =$

$$= \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-1}\right| + C, \qquad \text{pro } x \in (-\infty,-2) \text{ a } x \in (0,+\infty).$$

■

***Příklad* 32.** **a)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \sin ax\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \cos ax\,dx$ pro $a \neq 0,\ a \neq 1$.

Řešení: V této trojici příkladů použijeme stejnou substituci:

$$\boxed{ax = t,\ a\,dx = dt \ \Rightarrow\ dx = \frac{1}{a}\,dt}.$$

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\int \mathrm{e}^{t}\,dt = \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{t} + C = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int \sin ax\,dx = \frac{1}{a}\int \sin t\,dt = \frac{1}{a}\,(-\cos t) + C = \frac{-\cos ax}{a} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a}\,\sin t + C = \frac{\sin ax}{a} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$

Tím jsme odvodili vzorce (**12**), (**13**) a (**14**) rozšířené tabulky, která je uvedená v první kapitole.

■

***Příklad* 33**. **a)** $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$; **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ pro $a>0$.

Řešení:

a) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left| \begin{array}{rr} \frac{x}{a} = & t \\ dx = & a\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left| \begin{array}{rr} \frac{x}{a} = & t \\ dx = & a\,dt \end{array} \right| = \int \frac{a\,dx}{a\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad x \in (-a,\, a).$$

Odvodili jsme vzorce (**15**) a (**16**) rozšířené tabulky.

■

Poznámka: Je-li $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, pak $\boxed{\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C}$.

***Příklad* 34**. **a)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+9}$; **b)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$; **c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$; **d)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-9}$;

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{9-x^2}$; **f)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$; **g)** $\displaystyle\int \frac{dx}{1+9x^2}$; **h)** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Řešení: Příklady jsou zvoleny tak, aby čtenáři pochopili rozdíly jednotlivých integrací. Příklady **a)** - **f)** vyřešíme pomocí tabulky. V příkladech **g)** a **h)** bude nutná substituce.

a) $$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} \overset{(\mathbf{15})}{=} \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} \overset{(\mathbf{11})}{=} \ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} \overset{(\mathbf{11})}{=} \ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right| + C, \qquad |x|>3 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty,-3),\; x \in (3,+\infty);$$

d) $$\int \frac{dx}{x^2-9} \overset{(\mathbf{17})}{=} \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C, \qquad x \neq \pm 3 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x \in (-\infty,-3),\; x \in (-3,3),\; x \in (3,+\infty);$$

e) $$\int \frac{dx}{9-x^2} \overset{(\mathbf{17})}{=} \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C, \qquad x \in (-\infty,-3),\; x \in (-3,3),\; x \in (3,+\infty);$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} \overset{(\mathbf{16})}{=} \arcsin\frac{x}{3} + C, \qquad |x|<3 \;\Rightarrow\; x\in(-3,3);$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = \left|\begin{array}{rr} 3x= & t\\ 3dx= & dt\end{array}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + C =$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C, \qquad x\in\mathbb{R};$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \left|\begin{array}{rr} 3x= & t\\ 3dx= & dt\end{array}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{3}\arcsin t + C =$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\arcsin 3x + C, \qquad |3x|<1 \;\Rightarrow\; x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$ ■

***Příklad* 35**. Použitím vzorce $\boxed{\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C}$ vypočítejte integrály:

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx;$ **b)** $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+4}\,dx;$ **c)** $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}\,dx;$

d) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+5}\,dx;$ **e)** $\displaystyle\int\frac{1}{x\,\ln x}\,dx;$ **f)** $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}.$

Řešení:

a) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left|\begin{array}{rr} \cos x= & f(x)\\ \boxed{-\sin x}= & f'(x)\end{array}\right| = -\int\frac{\boxed{-\sin x}}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C,$

$\displaystyle x\neq(2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right),\; k\in\mathbb{Z};$

b) $\displaystyle\int\frac{x}{x^2+4}\,dx = \left|\begin{array}{rr} x^2+4= & f(x)\\ \boxed{2x}= & f'(x)\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{\boxed{2x}}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln|x^2+4|+C, \qquad x\in\mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{array}{rr} 3+\cos^2 x= & f(x)\\ \boxed{-2\cos x\sin x}= & f'(x)\end{array}\right| = -\int\frac{\boxed{-2\sin x\,\cos x}}{3+\cos^2 x}\,dx =$

$\displaystyle= -\ln|3+\cos^2 x|+C, \qquad x\in\mathbb{R};$

d) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+5}\,dx = \left|\begin{array}{rr} \mathrm{e}^{2x}+5= & f(x)\\ \boxed{2\,\mathrm{e}^{2x}}= & f'(x)\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\frac{\boxed{2\,\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^{2x}+5}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln|\mathrm{e}^{2x}+5|+C, \qquad x\in\mathbb{R};$

e) $\displaystyle\int\frac{1}{x\,\ln x}\,dx = \int\frac{\boxed{\frac{1}{x}}}{\ln x}\,dx = \ln|\ln x|+C,$

$\displaystyle\left.\begin{array}{r} x\,\ln x\neq 0\\ x>0\end{array}\right\} \;\Rightarrow\; x\in(0,1),\; x\in(1,+\infty);$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{\boxed{\frac{1}{1+x^2}}}{\operatorname{arctg} x}\,dx = \ln|\operatorname{arctg} x| + C,$

$$x \neq 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty, 0),\; x \in (0, \infty).$$

■

Příklad 36. Použitím vzorce $\boxed{\displaystyle\int f^{\alpha}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C,\; \alpha \neq -1}$ vypočítejte integrály:

a) $\displaystyle\int x\,(x^2+3)^{14}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \sin^5 x\,\cos x\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}}\,dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$; e) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx$; **f)** $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$.

Řešení:

a) $\displaystyle\int x\,(x^2+3)^{14}\,dx = \left|\begin{array}{rr} x^2+3 = & f(x) \\ \boxed{2x} = & f'(x)\end{array}\right| = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{14}\cdot\boxed{2x}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(x^2+3)^{15}}{15} + C,$

$$x \in \mathbb{R};$$

b) $\displaystyle\int \sin^5 x\,\cos x\,dx = \left|\begin{array}{rr} \sin x = & f(x) \\ \cos x = & f'(x)\end{array}\right| = \frac{\sin^6 x}{6} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{3+\cos x}}\,dx = \left|\begin{array}{rr} \multicolumn{2}{c}{\text{pro přehlednost dosadíme substituci}} \\ 3+\cos x = & t \\ -\sin x\,dx = & dt\end{array}\right| = \int \frac{-dt}{\sqrt{t}} = -\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} =$

$\displaystyle = -2\sqrt{3+\cos x} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \left|\begin{array}{rr} \ln x = & f(x) \\ \frac{1}{x} = & f'(x)\end{array}\right| = \frac{\ln^4 x}{4} + C, \qquad x \in (0, +\infty);$

e) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+8}\,dx = \left|\begin{array}{rr} x^3+8 = & t \\ 3x^2dx = & dt\end{array}\right| = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\,\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\sqrt{\left(x^3+8\right)^3} + C,$

$$x^3 + 8 \geq 0 \;\Rightarrow\; x \in \langle -2, +\infty);$$

f) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C, \quad \big(\text{substituce:}\;\; \operatorname{tg} x = t\big),$

$$x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\; k \in \mathbb{Z}.$$

■

Příklad 37. Vhodnou substitucí vypočítejte integrály:

a) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(1+\ln^2 x)}$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx$; **e)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,dx$; **f)** $\displaystyle\int \frac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,dx$.

Řešení:

a) $$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left| \begin{array}{rl} \sqrt{x} = & t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = & dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,dt \end{array} \right| = 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C,$$

$$x \in (0, +\infty);$$

b) $$\int \frac{x}{x^4+4}\,dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{rl} x^2 = & t \\ 2x\,dx = & dt \quad \Rightarrow \quad x\,dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

c) $$\int \frac{dx}{x\,(1+\ln^2 x)} = \left| \begin{array}{rl} \ln x = & t \\ \frac{1}{x}\,dx = & dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\ln x) + C,$$

$$x \in (0, +\infty);$$

d) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{16-(x^3)^2}}\,dx = \left| \begin{array}{rl} x^3 = & t \\ 3x^2\,dx = & dt \quad \Rightarrow \quad x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{16-t^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin\frac{t}{4} + C = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x^3}{4} + C, \qquad |x| < \sqrt[3]{4} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\sqrt[3]{4},\, \sqrt[3]{4}\right);$$

e) $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1}{2\,\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{1}{2\,\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \int \frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2\,\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,dx = \left| \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\,\cos^2\frac{x}{2}} \right| \overset{(\mathbf{18})}{=} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$$

$$x \neq k\pi \;\Rightarrow\; x \in \big(k\pi,\, (k+1)\pi\big),\; k \in \mathbb{Z};$$

f) $$\int \frac{(1+\mathrm{e}^x)^2}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,dx = \int \frac{1+2\,\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,dx = \int \left(\frac{1+\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} + 2\,\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)dx = \int 1\,dx +$$

$$+2\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\left(\mathrm{e}^x\right)^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x = t, \quad \mathrm{e}^x dx = dt, \\ \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\left(\mathrm{e}^x\right)^2}\,dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \end{array} \right| = x + 2\operatorname{arctg}\mathrm{e}^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

■

- Vypočítejte integrály:

38. $\int (3x-2)^{11}\,dx$ $\qquad \left[\dfrac{(3x-2)^{12}}{36} + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

39. $\int \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^5}}\,dx$ $\qquad \left[\dfrac{-2}{3\sqrt{(x+1)^3}} + C, \quad x \in (-1, +\infty)\right]$

40. $\int \left(\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)^2 dx$ $\qquad \left[\dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{4} - 2e^x - \dfrac{1}{2\,\mathrm{e}^{2x}} + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

41. $\int \sin^2 x\,dx$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{\sin 2x}{4} + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

42. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\, dx$ $\quad\left[\ln|\sin x| + C, \quad x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big), k \in \mathbb{Z}\right]$

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(4+\ln x)}$ $\quad\left[\begin{array}{r}\ln|4+\ln x| + C, \quad x > 0,\ x \neq \mathrm{e}^{-4}\ \Rightarrow \\ x \in (0,\, \mathrm{e}^{-4}),\ x \in (\mathrm{e}^{-4}, +\infty),\end{array}\right]$

44. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\ln\sin x}\, dx$ $\quad\left[\begin{array}{r}\ln|\ln\sin x| + C, \quad x \in \Big(2k\pi,\, 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}\Big), \\ x \in \big(2k\pi + \dfrac{\pi}{2},\, (2k+1)\pi\big), k \in \mathbb{Z}\end{array}\right]$

45. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\mathrm{e}^x}$ $\quad\left[x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

46. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{4+\cos^2 x}}\, dx$ $\quad\left[-\ln\left|\cos x + \sqrt{4+\cos^2 x}\right| + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

47. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$ $\quad\left[\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

48. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\,(1+\operatorname{tg} x)}\, dx$ $\quad\left[\begin{array}{r}\ln|1+\operatorname{tg} x| + C, \quad x \in \Big(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\Big), \\ x \in \Big(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3\pi}{4} + k\pi\Big), k \in \mathbb{Z}\end{array}\right]$

49. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}\, dx$ $\quad\left[\frac{1}{\cos^2 x} + C, \quad x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\Big),\ k \in \mathbb{Z}\right]$

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+9}$ $\quad\left[\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2x}{3} + C, \quad x \in \mathbb{R}\right]$

4. Integrace metodou per partes

• Vypočtěte dané integrály metodou per partes:

***Příklad* 51.** **a)** $\int x \sin x \, dx$; **b)** $\int (2x+1) \cos 3x \, dx$; **c)** $\int x^2 \, \mathrm{e}^x \, dx$; **d)** $\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Řešení: Připomeňme větu: *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace v intervalu I. Potom na tomto intervalu platí:*

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx \, .$$

a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C,$

$x \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int (2x+1) \cos 3x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x+1, & v' = \cos 3x \\ u' = 2, & v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} (2x+1) \sin 3x - \frac{2}{3} \int \sin 3x \, dx =$

$\displaystyle= \frac{1}{3} (2x+1) \sin 3x + \frac{2}{3} \frac{\cos 3x}{3} + C,$ $x \in \mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int x^2 \, \mathrm{e}^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2, & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 2x, & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int x \, \mathrm{e}^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \mathrm{e}^x \\ u' = 1, & v = \mathrm{e}^x \end{array} \right| =$

$\displaystyle= x^2 e^x - 2\big(x \, \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \, dx\big) = x^2 e^x - 2x \, \mathrm{e}^x + 2 \, \mathrm{e}^x + C,$ $x \in \mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\int x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \operatorname{tg}^2 x \\ u' = 1, & v = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x - x \end{array} \right| =$

$\displaystyle= x(\operatorname{tg} x - x) - \int (\operatorname{tg} x - x) \, dx = x \, (\operatorname{tg} x - x) + \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx + \int x \, dx =$

$\displaystyle= x \operatorname{tg} x - x^2 + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C = x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} + \ln|\cos x| + C,$

$\displaystyle x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z}.$ ■

***Příklad* 52.** **a)** $\int \operatorname{arctg} x \, dx$; **b)** $\int \arcsin x \, dx$; **c)** $\int \ln x \, dx$; **d)** $\int (x-1) \ln x \, dx$.

Řešení:

a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x^2}, & v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx =$

$\displaystyle= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C,$ $x \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x, & v' = 1 \\ u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & v = x \end{array} \right| = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\,\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C, \qquad x \in (-1,\,1);$$

c) $\displaystyle\int \ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x}, & v = x \end{array} \right| = x\,\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\,\ln x - \int dx = x\,\ln x - x + C,$

$$x \in (0,\,\infty);$$

d) $\displaystyle\int (x-1)\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = x-1 \\ u' = \frac{1}{x}, & v = \frac{x^2}{2} - x \end{array} \right| = \Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\,\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\,dx =$

$$= \Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\,\ln x - \int\Big(\frac{x}{2} - 1\Big)\,dx = \Big(\frac{x^2}{2} - x\Big)\,\ln x - \frac{x^2}{4} + x + C, \qquad x \in (0,\,\infty).$$

■

***Příklad* 53**. **a)** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\,\cos bx\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \sin\big(\ln x\big)\,dx$.

Řešení: Označme daný integrál $\mathcal{J}$. Po dvojnásobné aplikaci metody per partes dostaneme původní integrál $\mathcal{J}$. Ze vzniklé lineární rovnice vypočítáme samotný integrál $\mathcal{J}$.

a) $\displaystyle\mathcal{J} = \int \mathrm{e}^{ax}\,\cos bx\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^{ax}, & v' = \cos bx \\ u' = a\,\mathrm{e}^{ax}, & v = \dfrac{\sin bx}{b} \end{array} \right| = \frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\,\sin bx - \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^{ax}, & v' = \sin bx \\ u' = a\,\mathrm{e}^{ax}, & v = -\dfrac{\cos bx}{b} \end{array} \right| = \frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\,\sin bx - \frac{a}{b}\Big(-\frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\,\cos bx + \frac{a}{b}\underbrace{\int \mathrm{e}^{ax}\,\cos bx\,dx}_{\mathcal{J}}\Big).$$

Nyní sestavíme rovnici, ze které vypočítáme $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{b}\,\mathrm{e}^{ax}\,\sin bx + \frac{a}{b^2}\,\mathrm{e}^{ax}\,\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\,\mathcal{J} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{J}\Big(1 + \frac{a^2}{b^2}\Big) = \mathrm{e}^{ax}\,\Big(\frac{1}{b}\,\sin bx + \frac{a}{b^2}\,\cos bx\Big),$$

$$\mathcal{J} = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}\,\Big(b\,\sin bx + a\,\cos bx\Big) + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $\displaystyle\mathcal{J} = \int \sin\big(\ln x\big)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sin(\ln x), & v' = 1 \\ u' = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}, & v = x \end{array} \right| = x\cdot\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \cos(\ln x), & v' = 1 \\ u' = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}, & v = x \end{array} \right| = x\,\sin(\ln x) - \Big(x\,\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\Big).$$

$$\mathcal{J} = x\,\sin(\ln x) - x\,\cos(\ln x) - \mathcal{J} \qquad\Rightarrow\qquad 2\,\mathcal{J} = x\Big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\Big),$$

$$\mathcal{J} = \frac{x}{2}\,\Big(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\Big) + C, \qquad x \in (0,\infty).$$

■

***Příklad* 54**. **a)** $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int x^3\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \cos x\cdot\ln(\sin^2 x+1)\,dx$.

Řešení: V této trojici příkladů začneme volbou vhodné substituce a teprve potom použijeme metodu per partes:

$$\textbf{a)}\ \int\cos\sqrt{x}\,dx=\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{ll}\text{substituce:} & \sqrt{x}=t\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=dt\ \Rightarrow & \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,dt\end{array}\right|=$$

$$=2\int t\,\cos t\,dt=\left|\begin{array}{ll}u=t, & v'=\cos t\\ u'=1, & v=\sin t\end{array}\right|=2\Big(t\,\sin t-\int\sin t\,dt\Big)=2\Big(t\,\sin t+\cos t\Big)+$$

$$+C=2\Big(\sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\Big)+C,\qquad x\in(0,\infty);$$

$$\textbf{b)}\ \int x^3\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,dx=\int x^2\,\mathrm{e}^{-2x^2}\,x\,dx=\left|\begin{array}{ll}-2x^2=t\ \Rightarrow & x^2=-\frac{t}{2}\\ -4x\,dx=dt\ \Rightarrow & x\,dx=-\frac{dt}{4}\end{array}\right|=\int-\frac{t}{2}\,\mathrm{e}^t\cdot\Big(-\frac{dt}{4}\Big)=$$

$$=\frac{1}{8}\int t\,\mathrm{e}^t\,dt=\left|\begin{array}{ll}u=t, & v'=\mathrm{e}^t\\ u'=1, & v=\mathrm{e}^t\end{array}\right|=\frac{1}{8}\Big(t\,\mathrm{e}^t-\int\mathrm{e}^t\,dt\Big)=\frac{1}{8}\Big(t\,\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t\Big)+C=$$

$$=\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^t(t-1)+C=\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x^2}(-2x^2-1)+C=-\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-2x^2}(2x^2+1)+C,\qquad x\in\mathbb{R};$$

$$\textbf{c)}\ \int\cos x\cdot\ln(\sin^2 x+1)\,dx=\int\ln(\sin^2 x+1)\cdot\cos x\,dx\left|\begin{array}{ll}\sin x= & t\\ \cos x\,dx= & dt\end{array}\right|=\int\ln(t^2+1)\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u=\ln(t^2+1), & v'=1\\ u'=\frac{2t}{t^2+1}, & v=t\end{array}\right|=t\,\ln(t^2+1)-2\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=t\,\ln(t^2+1)-2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt=$$

$$=t\,\ln(t^2+1)-2\int\Big(1-\frac{1}{t^2+1}\Big)\,dt=t\,\ln(t^2+1)-2t+2\,\mathrm{arctg}\,t+C=$$

$$=\sin x\cdot\ln\big(\sin^2 x+1\big)-2\,\sin x+2\,\mathrm{arctg}\,(\sin x)+C,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

***Příklad* 55**. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $\mathcal{J}_n$, $n\in N_\circ$, jestliže:

$$\textbf{a)}\ \mathcal{J}_n=\int x^n\,\mathrm{e}^x\,dx,\quad x\in\mathbb{R};\qquad \textbf{b)}\ \mathcal{J}_n=\int\ln^n x\,dx,\quad x>0;$$

$$\textbf{c)}\ \mathcal{J}_n=\int\frac{1}{\big(x^2+a^2\big)^n}\,dx,\ n\ge 2,\ x\in\mathbb{R};\qquad \textbf{d)}\ \mathcal{J}_n=\int\sin^n x\,dx,\ n\ge 2,\ x\in\mathbb{R}.$$

Řešení:

$$\textbf{a)}\ \mathcal{J}_n=\int x^n\,\mathrm{e}^x\,dx=\left|\begin{array}{ll}u=x^n, & v'=\mathrm{e}^x\\ u'=nx^{n-1}, & v=\mathrm{e}^x\end{array}\right|=x^n\,\mathrm{e}^x-n\int x^{n-1}\,\mathrm{e}^x\,dx.$$

Poslední integrál je stejného typu jako původní, pouze index n přechází v $n-1$. Jde tedy o integrál $\mathcal{J}_{n-1}$. Potom hledaný rekurentní vzorec je:

$$\mathcal{J}_n=x^n\,\mathrm{e}^x-n\ \mathcal{J}_{n-1}$$

Održeli jsme posloupnost integrálů $\mathcal{J}_n,\ \mathcal{J}_{n-1},\cdots,\mathcal{J}_0$, poslední integrál je

$$\mathcal{J}_0=\int\mathrm{e}^x\,dx=\mathrm{e}^x+C;$$

b) $$\mathcal{J}_n=\int \ln^n x\,dx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln^n x, & v'=1 \\ u'=\dfrac{n\,\ln^{n-1}x}{x}, & v=x\end{array}\right|=x\,\ln^n x-n\int \ln^{n-1}x\,dx \quad\Rightarrow$$

$$\mathcal{J}_n=x\,\ln^n x-n\mathcal{J}_{n-1}.$$

Vzniklá posloupnost integrálů $\mathcal{J}_n,\ \mathcal{J}_{n-1},\cdots,\mathcal{J}_1$ končí integrálem

$$\mathcal{J}_1=\int \ln x\,dx=x\,\ln x-x+C.$$

c) $$\mathcal{J}_n=\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2-x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\,dx-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=\frac{1}{a^2}\,\mathcal{J}_{n-1}-\frac{1}{a^2}\int\frac{x\cdot x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{poslední integrál rozepíšeme metodou per partes}\\ u=x,\ v'=\dfrac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\\ u'=1,\ v=\displaystyle\int\frac{1}{2}\frac{2x}{\left(x^2+a^2\right)^n}\,dx=\left|\begin{array}{c}x^2+a^2=t\\2x\,dx=dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int t^{-n}\,dt=\frac{1}{2}\,\frac{t^{-n+1}}{-n+1}=\frac{-1}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a^2}\,\mathcal{J}_{n-1}-\frac{1}{a^2}\left(\frac{-x}{2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\,\mathcal{J}_{n-1}+\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}-\frac{1}{2a^2(n-1)}\,\mathcal{J}_{n-1}=$$

$$=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)\,\mathcal{J}_{n-1},$$

$$\mathcal{J}_n=\frac{x}{2a^2(n-1)\left(x^2+a^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\,\frac{2n-3}{2(n-1)}\,\mathcal{J}_{n-1}.$$

Posloupnost integrálů $\mathcal{J}_n,\ \mathcal{J}_{n-1},\cdots,\mathcal{J}_1$ končí integrálem

$$\mathcal{J}_1=\int\frac{1}{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C.$$

d) $$\mathcal{J}_n=\int\sin^n x\,dx=\int\sin^{n-2}x\cdot\sin^2 x\,dx=\int\sin^{n-2}x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)dx=$$

$$=\int\sin^{n-2}x\,dx-\int\sin^{n-2}x\,\cos^2 x\,dx=\mathcal{J}_{n-2}-\int\sin^{n-2}x\cdot\cos x\cdot\cos x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\text{v posledním integrálu použijeme metodu per partes}\\ u=\cos x,\ v'=\sin^{n-2}x\cdot\cos x\\ u'=-\sin x,\ v=\displaystyle\int\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx=\frac{\sin^{n-1}x}{n-1}\end{array}\right|=$$

$$= \mathcal{J}_{n-2} - \left(\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} \int \sin^n x \, dx \right) = \mathcal{J}_{n-2} - \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \, \mathcal{J}_n .$$

$\mathcal{J}_n$ vypočítáme ze vzniklé rovnice:

$$\mathcal{J}_n \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \mathcal{J}_{n-2} - \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1}, \qquad \mathcal{J}_n \cdot \frac{n}{n-1} = \mathcal{J}_{n-2} - \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1},$$

$$\mathcal{J}_n = \frac{n-1}{n} \, \mathcal{J}_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x .$$

Posloupnost integrálů $\mathcal{J}_n, \ \mathcal{J}_{n-2}, \ \mathcal{J}_{n-4} \cdots$, končí

- pro $n = 2k$ (sudé číslo) integrálem $\qquad \mathcal{J}_0 = \int dx = x + C$ nebo
- pro $n = 2k+1$ (liché číslo) integrálem $\qquad \mathcal{J}_1 = \int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

■

- Vypočítejte integrály:

56. $\int (2x-1) \, \cos x \, dx$ $\qquad [(2x-1) \, \sin x + 2 \, \cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}]$

57. $\int \sqrt[3]{x} \, \ln x \, dx$ $\qquad \left[\frac{3}{4} \, x \, \sqrt[3]{x} \, \ln x - \frac{9}{16} \, x \, \sqrt[3]{x} + C, \quad x > 0 \right]$

58. $\int \ln(x^2+1) \, dx$ $\qquad [x \, \ln(x^2+1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}]$

59. $\int x \, \cos^2 x \, dx$ $\qquad \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x \, \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C, \quad x \in \mathbb{R} \right]$

60. $\int x \, \mathrm{e}^{-2x} \, dx$ $\qquad \left[-\frac{x \, \mathrm{e}^{-2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4} + C, \quad x \in \mathbb{R} \right]$

61. $\int \mathrm{e}^{2x} \, \sin 3x \, dx$ $\qquad \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{13} \, (2 \, \cos 3x - 3 \, \sin 3x) + C, \quad x \in \mathbb{R} \right]$

62.* $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 \, (1+x^2)} \, dx$ $\qquad \left[\ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{x} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C, \quad x \in (-\infty, 0), \ x \in (0, +\infty) \right]$

63. $\int \frac{x^2}{\left(x^2+1 \right)^2} \, dx$ $\qquad \left[\frac{-x}{2 \, (x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R} \right]$

64.* $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} \, dx$ $\qquad \left[-\operatorname{cotg} x \, (\ln \sin x + 1) - x + C, \quad x \in \big(2k\pi, \, (2k+1)\pi \big), k \in \mathbb{Z} \right]$

65. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx$ $\qquad \left[(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C, \quad x > 0 \right]$

66. $\int \ln\big(x + \sqrt{x^2+4} \big) \, dx$ $\qquad \left[x \, \ln\big(x + \sqrt{x^2+4} \big) - \sqrt{x^2+4} + C, \quad x \in \mathbb{R} \right]$

67. $\int x \, \frac{\sin x}{\cos^3 x} \, dx$ $\qquad \left[\frac{x}{2 \, \cos^2 x} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right), \ k \in \mathbb{Z} \right]$

68. Použitím rekurentních vzorců z příkladu **55)** vypočítejte integrály:

a) $\displaystyle\int \left(x^3-2x^2\right) \mathrm{e}^x \, dx$; **b)** $\displaystyle\int \ln^4 x \, dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^3} \, dx$; **d)** $\displaystyle\int \sin^5 x \, dx$.

$$\left[\begin{array}{l}
\textbf{a)}\ \mathrm{e}^x\left(x^3-5x^2+10x-10\right)+C, \quad x\in\mathbb{R}; \\
\textbf{b)}\ x\left(\ln^4 x-4\ln^3 x+12\ln^2 x-24\ln x+24\right)C, \quad x>0; \\
\textbf{c)}\ \dfrac{x}{4\left(x^2+1\right)^2}+\dfrac{3x}{4\left(x^2+1\right)}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg} x+C, \quad x\in\mathbb{R}; \\
\textbf{d)}\ -\dfrac{1}{5}\cos x\sin^4 x-\dfrac{4}{15}\cos x\sin^2 x-\dfrac{8}{15}\cos x+C, \quad x\in\mathbb{R}
\end{array}\right]$$

69. Odvoďte rekurentní vzorec pro výpočet integrálu $\mathcal{J}_k=\int x^k \ln x \, dx$ $(k\neq -1,\ k\in\mathbb{R})$ a použijte jej k výpočtu integrálů:

a) $\displaystyle\int x^5 \ln x \, dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} \, dx$; **c)** $\displaystyle\int x^2 \sqrt{x} \ln x \, dx$.

$$\left[\begin{array}{ll}
\mathcal{J}_{k-1}=\dfrac{x^{k+1}\ln x}{k+1}-\dfrac{x^{k+1}}{(k+1)^2}+C, \quad x>0; & \\
\textbf{a)}\ \dfrac{x^6\ln x}{6}-\dfrac{x^6}{36}+C; & \textbf{b)}\ \dfrac{-\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+C; \\
\textbf{c)}\ \dfrac{2x^3\sqrt{x}\ln x}{7}-\dfrac{4x^3\sqrt{x}}{49}+C. &
\end{array}\right]$$

5. Integrály typu $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$ a $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Z integrálů $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$ rozlišujeme dva případy podle toho, zda kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ má nebo nemá reálné kořeny. V dalších příkladech se vyskytnou obě možnosti:

***Příklad* 70.** **a)** $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{18-5x}{2x^2+x-6}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx,\ a>0.$

Řešení:

a) Především zjistíme, zda rovnice $x^2+3x+2=0$ má reálné kořeny:

$$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \Big\langle \begin{array}{c} -1 \\ -2 \end{array}.$$

Kvadratický trojčlen rozložíme na součin kořenových činitelů $x^2+3x+2=$ $=(x+1)(x+2)$ a daný zlomek napíšeme jako součet dvou parciálních zlomků:

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x+3 = A(x+2)+B(x+1).$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x^1 a x^0 dostáváme soustavu pro A a B:

$$\begin{array}{lcr} x^1 & \Rightarrow & 1 = \quad A+B \\ x^0 & \Rightarrow & 3 = \ 2A+B \end{array}, \text{ ze které snadno vypočítáme } A=2 \text{ a } B=-1.$$

Teď se vrátíme k danému integrálu:

$$\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx = \int \Big(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}\Big)\,dx = 2\,\ln|x+1| - \ln|x+2| = \ln\left|\frac{(x+1)^2}{x+2}\right| + C,$$

$$x\in(-\infty,\,-2),\ x\in(-2,\,-1),\ x\in(-1,\,+\infty).$$

b) $$\int \frac{18-5x}{2x^2+x-6}\,dx \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l} 2x^2+x-6=0 \\ x_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4} = \dfrac{-1\pm 7}{4} = \Big\langle \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ -2 \end{array} \end{array}\right| \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+x-6 = 2\Big(x-\frac{3}{2}\Big)(x+2) = (2x-3)(x+2) \quad\Rightarrow$$

$$\frac{18-5x}{2x^2+x-6} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(2x-3)}{(2x-3)(x+2)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 18-5x = A(x+2)+B(2x-3).$$

Porovnáním koeficientů u mocnin x^1 a x^0 dostáváme soustavu pro A a B:

$$\begin{array}{lcr} x^1 & \Rightarrow & -5 = \quad A+2B \\ x^0 & \Rightarrow & 18 = \ 2A-3B \end{array}, \text{ ze které snadno vypočítáme } A=3 \text{ a } B=-4.$$

$$\int \frac{18-5x}{2x^2+x-6}\,dx = \int \frac{3}{2x-3}\,dx - \int \frac{4}{x+2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2}{2x-3}\,dx - 4\int \frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\,\ln|2x-3| - 4\,\ln|x+2| + C,$$

$$x \in (-\infty,\,-2),\ x \in \left(-2,\,\frac{3}{2}\right),\ x \in \left(\frac{3}{2},\,+\infty\right);$$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx =$

$$\left|\begin{array}{l}
\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{(x-a)(x+a)} = \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x+a} = \dfrac{A(x+a)+B(x-a)}{x^2-a^2} \quad \Rightarrow \\
1 = A(x+a) + B(x-a) = (A+B)x + (A-B)a \quad \Rightarrow \\
A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-A \\
(A-B)a = 1 \quad \Rightarrow \quad 2A\cdot a = 1 \ \Rightarrow\ A = \frac{1}{2a},\ B = \frac{-1}{2a}
\end{array}\right|$$

$$= \int \left(\frac{1}{2a}\,\frac{1}{x-a} - \frac{1}{2a}\,\frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}\Big(\ln|x-a| - \ln|x+a|\Big) + C = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$|x| \neq a \quad \Rightarrow \quad x \in (-\infty,\,-a),\ x \in (-a,\,a),\ x \in (a,\,+\infty).$$

Tím jsme odvodili vzorec (**17**) uvedený v rozšířené tabulce základních integrálů.

■

***Příklad* 71**. **a)** $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+6x+13}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{7-9x}{x^2-2x+3}\,dx$.

Řešení: V obou příkladech nelze jmenovatele rozložit na součin kořenových činitelů.

Abychom mohli provést integraci, musíme udělat několik úprav.

a) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2+6x+13}\,dx = 3\int \frac{x}{x^2+6x+13}\,dx + \int \frac{-5}{x^2+6x+13}\,dx =$

čitatel levého zlomku doplníme tak, aby byl **derivací jmenovatele**:

$$\left(x^2+6x+13\right)' = 2x+6$$

a jmenovatel pravého zlomku napíšeme jako **součet čtverců**:

$$x^2+6x+13 = x^2+6x+9+4 = (x+3)^2+4$$

$$= \frac{3}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2x+6} \nearrow \mathbf{-6}}{x^2+6x+13}\,dx + \int \frac{-5\ \mathbf{-6}\cdot\mathbf{\frac{3}{2}}}{(x+3)^2+4}\,dx = \left|\begin{array}{c} \text{levý integrál je typu } \displaystyle\int \frac{f'}{f}\,dx \\ \text{a pravý } \displaystyle\int \frac{dt}{t^2+a^2} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{3}{2}\,\ln|x^2+6x+13| - 14\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+3}{2} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $\displaystyle\int \frac{7-9x}{x^2-2x+3}\,dx = -9\int \frac{x}{x^2-2x+3}\,dx + \int \frac{7}{x^2-2x+3}\,dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} (x^2-2x+3)' = 2x-2, \\ x^2-2x+3 = (x-1)^2+2 \end{array} \right| = -\frac{9}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2x-2} \nearrow^{\mathbf{+2}}}{x^2-2x+3}\, dx + \int \frac{7 + \mathbf{2} \cdot \left(-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\right)}{(x-1)^2+2}\, dx =$$

$$= -\frac{9}{2} \ln|x^2-2x+3| - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

■

***Příklad* 72.** **a)** $\displaystyle\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4x+6}}\, dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-4x}}\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$; **d)** $\displaystyle\int \frac{5x+3}{\sqrt{8+2x-x^2}}\, dx$.

Řešení: Je-li ve jmenovateli $\sqrt{ax^2+bx+c}$, kde $a \neq 0$, pak není důležité, zda kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ má či nemá reálné kořeny. Rozhodující je znaménko koeficientu a.

Podle toho rozlišujeme dva případy:

1) $a > 0$ - v našem zadání to budou příklady **a)** a **b)**,
2) $a < 0$ - příklady **c)** a **d)**.

Úpravy se budou podobat úpravám z příkladu **71)**, avšak závěrečné integrace budou odlišné.

a) $$\int \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4x+6}}\, dx = -\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+6}}\, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+4x+6}}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} (x^2+4x+6)' = 2x+4, \\ x^2+4x+6 = (x+2)^2+2 \end{array} \right| = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2x+4} \nearrow^{\mathbf{-4}}}{\sqrt{x^2+4x+6}}\, dx + \int \frac{2 + \mathbf{2}}{\sqrt{(x+2)^2+2}}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{2\,x+4}{\sqrt{x^2+4x+6}}\, dx + 4 \int \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+2}}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Položíme-li } x^2+4x+6 = t,\ (2x+4)\, dx = dt,\ \text{pak} \\ \text{levý integrál bude } \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \text{ a pravý integrál je tabulkový.} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x^2+4x+6} + 4 \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C =$$

$$= -\sqrt{x^2+4x+6} + 4 \ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $$\int \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-4x}}\, dx = \left| \begin{array}{l} (x^2-4x)' = 2x-4, \\ x^2-4x+4-4 = (x-2)^2-4 \\ \text{integrace jsou stejné jako v } \textbf{a)} \end{array} \right| = \frac{3}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2x-4} \nearrow^{\mathbf{+4}}}{\sqrt{x^2-4x}}\, dx +$$

$$+ \int \frac{1 + \mathbf{6}}{\sqrt{(x-2)^2-4}}\, dx = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{x^2-4x} + 7 \ln\left|x-2+\sqrt{(x-2)^2-4}\right| + C =$$

$$= 3\sqrt{x^2-4x} + 7\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x}\right| + C, \qquad x \in (-\infty,\, 0),\ x \in (4,\, \infty);$$

c) $$\int \frac{3x-2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left|\left(4-x^2\right)' = -2x\right| = -\frac{3}{\mathbf{2}}\int \frac{\boldsymbol{-2x}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int \frac{-2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx =$$

$$= -\frac{3}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{2}\,\sqrt{4-x^2} - 2\cdot\arcsin\frac{x}{2} + C = -3\,\sqrt{4-x^2} - 2\cdot\arcsin\frac{x}{2} + C,$$

$$x \in (-2,\, 2);$$

d) $$\int \frac{5x+3}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx = |\left(8+2x-x^2\right)' = 2-2x| = \frac{-5}{\mathbf{2}}\int \frac{\boldsymbol{-2x+2} \nearrow^{\boldsymbol{-2}}}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx +$$

$$+\int \frac{3+\mathbf{5}}{\sqrt{9-(x-1)^2}}\,dx = -\frac{5}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{2}\,\sqrt{8+2x-x^2} + 8\cdot\arcsin\frac{x-1}{3} + C =$$

$$= -5\,\sqrt{8+2x-x^2} + 8\cdot\arcsin\frac{x-1}{3} + C, \qquad x \in (-2,\, 4).$$

■

- Vypočítejte integrály:

73. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}\,dx$ $\left[\begin{array}{l} 2\ln|x-3| + \ln|x+1| + C, \\ \quad x \in (-\infty,-1),\ x\in(-1,3),\ x\in(3,+\infty) \end{array}\right]$

74. $\displaystyle\int \frac{-3x+13}{3x^2+7x-6}\,dx$ $\left[\begin{array}{l} \ln|3x-2| - 2\ln|x+3| + C, \\ \quad x \in (-\infty,-3),\ x\in\left(-3,\frac{2}{3}\right),\ x\in\left(\frac{2}{3},+\infty\right) \end{array}\right]$

75. $\displaystyle\int \frac{3x-4}{x^2+4x+7}\,dx$ $\left[\frac{3}{2}\ \ln|x^2+4x+7| - \frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C, \quad x\in\mathbb{R}\right]$

76. $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2+x+1}\,dx$ $\left[\frac{1}{2}\ \ln|x^2+x+1| - \frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \quad x\in\mathbb{R}\right]$

77. $\displaystyle\int \frac{x+11}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x} + 10\cdot\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C, \\ \quad x\in(-\infty,-2),\ x\in(0,\infty); \end{array}\right]$

78. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ $\left[\sqrt{x^2+3} - \ln|x+\sqrt{x^2+3}| + C, \quad x\in\mathbb{R}\right]$

79. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$ $\left[-3\,\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1) + C, \quad x\in(0,\,2)\right]$

80. $\displaystyle\int \frac{5x-6}{\sqrt{-x^2+4x-3}}\,dx$ $\left[-5\,\sqrt{-x^2+4x-3} + 4\arcsin(x-2) + C, \quad x\in(1,\,3)\right]$

81. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ $\left[-\sqrt{9-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{3} + C, \quad x\in(-3,\,3)\right]$

82. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-9} + 2\ln|x+\sqrt{x^2-9}| + C, \\ \quad x\in(-\infty,\,-3),\ x\in(3,\,+\infty) \end{array}\right]$

6. Integrace racionálních funkcí

Racionální funkcí nazýváme funkci typu $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, kde $P_m(x)$ je polynom m-tého stupně a $Q_n(x)$ polynom n-tého stupně, $n \geq 1$. Je-li $m \geq n$, vydělíme čitatel jmenovatelem. Dostaneme polynom stupně $m-n$ a zbytek, který je racionální funkcí se stupňem čitatele menším než stupeň jmenovatele. Je-li $m < n$, pak zlomek rozložíme na součet parciálních zlomků. Tím integraci daného zlomku převedeme na integrace každého parciálního zlomku zvlášť. Tyto integrace vedou na následující čtyři typy:

$$\textbf{(I)} \int \frac{A}{x-\alpha}\,dx; \qquad \textbf{(II)} \int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx,\ n \geq 2,\ n \in \mathbb{N};$$

$$\textbf{(III)} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx,\ p^2-4q<0; \qquad \textbf{(IV)}^* \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,dx,\ k \geq 2,\ k \in \mathbb{N}.$$
$$p^2-4q<0.$$

- Vypočítejte integrály:

***Příklad* 83.** **a)** $\displaystyle\int \frac{2}{x-3}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{5}{(x+2)^4}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+3}{x-1}\,dx$.

Řešení:

a) $$\int \frac{2}{x-3}\,dx = \left| \begin{array}{rr} x-3= & t \\ dx= & dt \end{array} \right| = 2\int \frac{1}{t}\,dt + C = 2\ln|t| = 2\ln|x-3| + C,$$
$$x \in (-\infty,\, 3),\ x \in (3,\, \infty);$$

b) $$\int \frac{5}{(x+2)^4}\,dx = \left| \begin{array}{rr} x+2= & t \\ dx= & dt \end{array} \right| = 5\int \frac{1}{t^4}\,dt = 5\,\frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{5}{3}\frac{1}{(x+2)^3} + C,$$
$$x \in (-\infty,\, -2),\ x \in (-2,\, \infty).$$

Poznámka: V dalších příkladech substituci typu $x+a=t$ nebudeme psát (viz př.**29**).)

c) Zde je čitatel polynomem 3. stupně a jmenovatel polynomem 1. stupně, proto nejdříve provedeme dělení:

$$\begin{array}{l} \left(x^3-2x+3\right) : (x-1) = x^2+x-1 \\ \underline{-\left(x^3-x^2\right)} \\ \qquad x^2-2x+3 \\ \quad \underline{-\left(x^2-x\right)} \\ \qquad\quad -x+3 \\ \qquad \underline{-(-x+1)} \\ \text{zbytek} \quad \boxed{2} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x^3-2x+3}{x-1} = x^2+x-1+\frac{\boxed{2}}{x-1}.$$

Nyní přistoupíme k integraci:

$$\int \frac{x^3-2x+3}{x-1}\,dx = \int \left(x^2+x-1+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+2\ln|x-1|+C,$$
$$x \in (-\infty,\,1),\ x \in (1,\,\infty).$$
■

***Příklad* 84.** a) $\displaystyle\int \frac{2x^3+5x-2}{x^2+3}\,dx$; b)* $\displaystyle\int \frac{x-3}{(x^2+4)^2}\,dx$.

Řešení:

a) Čitatel vydělíme jmenovatelem:

$$\begin{array}{l} \big(2x^3+5x-2\big) : (x^2+3) = 2x \\ \underline{-\big(2x^3+6x\big)} \\ \text{zbytek - } \boxed{x+2} \end{array}$$

$$\int \frac{2x^3+5x-2}{x^2+3}\,dx = \int \left(2x-\frac{\boxed{x+2}}{x^2+3}\right)dx = \big|\text{viz kapitola 5.}\big| = x^2-\frac{1}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2x}}{x^2+3}\,dx -$$
$$-2\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = x^2-\frac{1}{2}\ln|x^2+3|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) Jde o integraci parcionálního zlomku typu **IV** a jeho výpočet je následující:

$$\int \frac{x-3}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2x}}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx - \frac{3}{\mathbf{4}}\int \frac{1\cdot\mathbf{4}}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\text{viz tabulkový integrál } (\mathbf{19}) \\ \text{a př.}\mathbf{55c)}\ \text{ pro } n=2\end{array}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+4\right)^{-1}}{-1} - \frac{3}{4}\int \frac{4+\boldsymbol{x^2}-\boldsymbol{x^2}}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{2\left(x^2+4\right)} - \frac{3}{4}\left(\int \frac{1}{x^2+4}\,dx - \int \frac{x^2}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx\right) = \frac{-1}{2\left(x^2+4\right)} -$$

$$-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\int \frac{x\cdot x}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx = \left|\begin{array}{ll} u=x, & v'=\dfrac{x}{\left(x^2+4\right)^2} \\ u'=1, & v=\displaystyle\int \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2}\,dx = \frac{-1}{2\left(x^2+4\right)}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{-1}{2\left(x^2+4\right)} - \frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \frac{3}{4}\left(\frac{-x}{2\left(x^2+4\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4}\,dx\right) = \frac{-1}{2\left(x^2+4\right)} - \frac{3}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} -$$

$$-\frac{3x}{8\left(x^2+4\right)} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{-(4+3x)}{8\left(x^2+4\right)} - \frac{3}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
■

- Pomocí rozkladu na parciální zlomky řešte integrály:

***Příklad* 85.** $\displaystyle\int \frac{5x^2-27x-14}{(x-1)(x^2-x-12)}\,dx$

Řešení: Kvadratický trojčlen x^2-x-12 má dva reálné kořeny 4 a -3. Proto lze provést rozklad na kořenové činitele:

$$(x-1)(x^2-x-12)=(x-1)(x-4)(x+3).$$

Daný zlomek se dá napsat jako součet parciálních zlomků:

$$\frac{5x^2-27x-14}{(x-1)(x-4)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{x+3}=$$
$$=\frac{A(x-4)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-4)(x+3)}\ \Rightarrow$$
$$5x^2-27x-14=A(x-4)(x+3)+B(x-1)(x+3)+C(x-1)(x-4).$$

Tato rovnost musí platit pro všechna reálná x. Dosadíme postupně $x=1$, $x=4$, $x=-3$ a vypočítáme A, B a C:

$$\begin{array}{lcrcl}
x=1 & \Rightarrow & 5-27-14= & A(-3)\cdot 4 & \Rightarrow\ -36=\ -12A\ \Rightarrow\ A=3,\\
x=4 & \Rightarrow & 80-108-14= & B\cdot 3\cdot 7 & \Rightarrow\ -42=\ 21B\ \Rightarrow\ B=-2,\\
x=-3 & \Rightarrow & 45+81-14= & C(-4)(-7) & \Rightarrow\ 112=\ 28C\ \Rightarrow\ C=4.
\end{array}$$

Poznámka: Konstanty A, B, C bychom mohli určit též porovnáním koeficientů u stejných mocnin x na levé a pravé straně. Avšak v tomto příkladu byl výhodnější postup, kterého jsme užili.

Nyní se vrátíme k danému zlomku a pak i k danému integrálu:

$$\frac{5x^2-27x-14}{(x-1)(x-4)(x+3)}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-4}+\frac{4}{x+3},$$
$$\int\frac{5x^2-27x-14}{(x-1)(x-4)(x+3)}\,dx=3\int\frac{1}{x-1}\,dx-2\int\frac{1}{x-4}\,dx+4\int\frac{1}{x+3}\,dx=$$
$$=3\ln|x-1|-2\ln|x-4|+4\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{(x-1)^3(x+3)^4}{(x-4)^2}\right|+C,$$
$$x\in(-\infty,\,-3),\ x\in(-3,\,1),\ x\in(1,\,4),\ x\in(4,\,+\infty).$$

■

***Příklad* 86**. $\displaystyle\int\frac{3x^2+5x}{(x^2-1)(x-1)}\,dx$

Řešení: Jmenovatel lze rozložit takto:

$$(x^2-1)(x-1)=(x+1)(x-1)(x-1),$$

tedy -1 je jednoduchým kořenem a $+1$ je dvojnásobným kořenem. Potom integrovaný zlomek se dá napsat jako součet parciálních zlomků:

$$\frac{3x^2+5x}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2}\ \Rightarrow$$
$$\begin{aligned}
3x^2+5x &= A(x-1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x+1)\\
&= A(x^2-2x+1)+B(x^2-1)+C(x+1)\\
&= (A+B)x^2+(-2A+C)x+A-B+C.
\end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostáváme následující soustavu pro A, B a C:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} A & +B & & = 3 \\ -2A & & +C & = 5 \\ A & -B & +C & = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2},\ B = \frac{7}{2},\ C = 4.$$

$$\int \frac{3x^2+5x}{(x^2-1)(x-1)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C, x \in (-\infty,\ -1),\ x \in (-1,\ 1),\ x \in (1,\ +\infty).$$

■

***Příklad* 87.** $\displaystyle\int \frac{x^3+4}{x(x+2)^3}\,dx$

Řešení:

$$\frac{x^3+4}{x(x+2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} =$$

$$= \frac{A(x+2)^3 + Bx(x+2)^2 + Cx(x+2) + Dx}{x(x+2)^3} \quad \Rightarrow$$

$$x^3 + 4 = A(x+2)^3 + Bx(x+2)^2 + Cx(x+2) + Dx.$$

V tomto příkladu určíme konstanty $A,\ B,\ C$ a D kombinováním obou postupů. Nejdříve dosadíme za x oba reálné kořeny 0 a -2. Potom vybereme vhodnou mocninu x, porovnáme její koeficienty a nakonec dosadíme třeba $x = -1$ a použijeme již vypočítané koeficienty.

$$\begin{array}{llrlll} x = 0 & \Rightarrow & 4 = & 8A & \Rightarrow & A = \frac{1}{2}, \\ x = -2 & \Rightarrow & -4 = & -2D & \Rightarrow & D = 2, \\ x^3 & \Rightarrow & 1 = & A + B & \Rightarrow & B = \frac{1}{2}, \\ x = -1 & \Rightarrow & 3 = & A - B - C - D & \Rightarrow & C = -5. \end{array}$$

$$\int \frac{x^3+4}{x(x+2)^3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\,dx - 5\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2} + C,$$

$$x \in (-\infty,\ -2),\ x \in (-2,\ 0),\ x \in (0,\ +\infty).$$

■

***Příklad* 88.** $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-3}{(x+1)(4x^2+1)}\,dx$

Řešení:

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+1)(4x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{4x^2+1} = \frac{A(4x^2+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(4x^2+1)}$$

Rightarrow

$$x^2 + 2x - 3 = 4Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

Po porovnání koeficientů obdržíme soustavu, ze které určíme konstanty $A,\ B$ a C:

$$\left.\begin{array}{lcrrrr} x^2 & \Rightarrow & 1 = & 4A & +B & \\ x^1 & \Rightarrow & 2 = & & B & +C \\ x^0 & \Rightarrow & -3 = & A & & +C \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{4}{5},\ B = \frac{21}{5},\ C = -\frac{11}{5}.$$

Vrátíme se k danému integrálu a postupně dopočítáme:

$$\int \frac{x^2+2x-3}{(x+1)(4x^2+1)}\,dx = -\frac{4}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{21x-11}{4x^2+1}\,dx = -\frac{4}{5}\ln|x+1| +$$

$$+\frac{21}{5\cdot \mathbf{8}}\int \frac{\mathbf{8}\,x}{4x^2+1}\,dx - \frac{11}{5}\int \frac{1}{(2x)^2+1}\,dx = -\frac{4}{5}\ln|x+1| + \frac{21}{40}\ln|4x^2+1| -$$

$$-\frac{11}{5}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C, \qquad x \in (-\infty,\,-1),\ x \in (-1,\,+\infty).$$

■

***Příklad* 89**. $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+1}\,dx$

Řešení: Jmenovatel rozložíme $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ a potom

$$\frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Rightarrow

$$x = Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C.$$

$$\left.\begin{array}{lcrrrr} x^2 & \Rightarrow & 0 = & A & +B & \\ x^1 & \Rightarrow & 1 = & -A & +B & +C \\ x^0 & \Rightarrow & 0 = & A & & +C \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{3},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{1}{3}.$$

Nyní $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+1}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\ln|x+1| +$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2x-1} \nearrow \mathbf{+1}}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{1+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx\right) = \left| \begin{array}{l} (x^2-x+1)' = 2x-1 \\ x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} \end{array} \right| =$$

$$-\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx\right) = -\frac{1}{3}\ln|x+1| +$$

$$+\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C, \qquad x \in (-\infty,\,-1),\ x \in (-1,\,+\infty).$$

■

***Příklad* 90**.* $\displaystyle\int \frac{2x^2+21}{x^4-5x^2-36}\,dx$

Řešení: Prvním krokem bude nalezení kořenů bikvadratické rovnice $x^4-5x^2-36=0$.

Položíme $x^2 = z$ a vyřešíme vzhledem k z:

$$z^2 - 5z - 36 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \left\langle \begin{array}{c} 9 \\ -4 \end{array} \right. .$$

Napíšeme rozklad na součin kořenových činitelů:

$$(z-9)(z+4) \xrightarrow{z=x^2} \big(x^2-9\big)\big(x^2+4\big) = (x-3)(x+3)\big(x^2+4\big).$$

Dalším krokem bude rozklad daného zlomku na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+21}{(x-3)(x+3)\big(x^2+4\big)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+4} =$$

$$= \frac{A(x+3)\big(x^2+4\big) + B(x-3)\big(x^2+4\big) + (Cx+D)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+3)\big(x^2+4\big)} \quad \Rightarrow$$

$$2x^2+21 = A(x+3)\big(x^2+4\big) + B(x-3)\big(x^2+4\big) + (Cx+D)(x+3)(x-3).$$

Konstanty A, B, C a D určíme postupně dosazením za $x = -3,\ 3,\ 2i$:

$$\begin{array}{lllrll} x = -3 & & \Rightarrow\ 39 = & -6 \cdot 13B & \Rightarrow & B = -\dfrac{1}{2} \\ x = 3 & & \Rightarrow\ 39 = & 6 \cdot 13A & \Rightarrow & A = \dfrac{1}{2} \\ x = 2i & \Rightarrow\ x^2+4=0 & \Rightarrow\ 13 = & (2i\,C + D)(-4-9) & \Rightarrow & C = 0,\ D = -1 \end{array} .$$

Nyní dopočítáme daný integrál:

$$\int \frac{2x^2+21}{(x-3)(x+3)\big(x^2+4\big)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-3| - \frac{1}{2}\ln|x+3| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C,$$

$$x \in (-\infty,\ -3),\ x \in (-3,\ 3),\ x \in (3,\ +\infty).$$

■

***Příklad* 91.** $\displaystyle\int \frac{2x^4+1}{x^4-x^2}\,dx.$

Řešení: Všimneme si, že čitatel a jmenovatel jsou stejného stupně a proto začneme dělením:

$$\begin{array}{l} \big(2x^4+1\big) : \big(x^4-x^2\big) = 2 \\ \underline{-\big(2x^4-2x^2\big)} \end{array}$$

$$\text{zbytek} \quad 2x^2+1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{2x^4+1}{x^4-x^2} = 2 + \frac{2x^2+1}{x^4-x^2}.$$

Zlomek $\dfrac{2x^2+1}{x^4-x^2}$ rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{2x^2+1}{x^2\big(x^2-1\big)} = \frac{2x^2+1}{x^2(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1} =$$

$$= \frac{Ax\big(x^2-1\big) + B\big(x^2-1\big) + Cx^2(x-1) + Dx^2(x+1)}{x^2(x+1)(x-1)},$$

$$2x^2+1 = Ax\big(x^2-1\big)+B\big(x^2-1\big)+Cx^2(x-1)+Dx^2(x+1).$$

Do této identity dosadíme postupně za $x=0,\ 1,\ -1$:

$$\begin{aligned} x=0 &\quad\Rightarrow\quad 1= \quad -B \quad\Rightarrow\quad B=-1\\ x=1 &\quad\Rightarrow\quad 3= \quad 2D \quad\Rightarrow\quad D=\frac{3}{2}\\ x=-1 &\quad\Rightarrow\quad 3= \quad -2C \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{3}{2} \end{aligned}\quad .$$

Zbývající konstantu A určíme porovnáním koeficientů u x^3 :

$$0=A+C+D \quad\Rightarrow\quad A=0,$$

$$\frac{2x^2+1}{x^2\big(x^2-1\big)} = \frac{-1}{x^2}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1}.$$

Vrátíme se a dopočítáme daný integrál:

$$\int\frac{2x^4+1}{x^4-x^2}\,dx = \int\Big(2-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{2}\,\frac{1}{x+1}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1}\Big)\,dx = 2x+\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\ln|x+1|+$$

$$+\frac{3}{2}\ln|x-1|+C = 2x+\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|+C,$$

$$x\in(-\infty,\,-1),\ x\in(-1,\,0),\ x\in(0,\,1),\ x\in(1,\,+\infty).$$

■

- Vypočítejte integrály:

92. $\displaystyle\int\frac{1}{(x-3)^3}\,dx$ $\quad\left[\dfrac{-1}{2(x-3)^2}+C, x\in(-\infty,3),\ x\in(3,+\infty)\right]$

93. $\displaystyle\int\frac{2x^2-2x+8}{x^2-x-2}\,dx$ $\quad\left[2x+4\ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right|+C,\ x\in(-\infty,-1),\ x\in(-1,\,2),\ x\in(2,\,+\infty)\right]$

94. $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+9x^2}\,dx$ $\quad\left[\dfrac{1}{81}\ \ln\left|\dfrac{x+9}{x}\right|-\dfrac{1}{9x}+C,\ x\in(-\infty,-9),\ x\in(-9,\,0),\ x\in(0,\,+\infty)\right]$

95. $\displaystyle\int\frac{1}{x^3+9x}\,dx$ $\quad\left[\dfrac{1}{9}\ \ln\left|\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right|+C,\quad x\in(-\infty,0),\ x\in(0,\,+\infty)\right]$

96. $\displaystyle\int\frac{1}{x^3-9x}\,dx$ $\quad\left[\dfrac{1}{9}\Big(\dfrac{1}{2}\ln|x^2-9|-\ln|x|\Big)+C,\ x\in(-\infty,-3),\ x\in(-3,\,0),\ x\in(0,\,3),\ x\in(3,\,+\infty)\right]$

97. $\displaystyle\int\frac{1+2x-2x^5}{1-x^4}\,dx$ $\quad\left[x^2+\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{4}\ \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|+C,\ x\in(-\infty,-1),\ x\in(-1,\,1),\ x\in(1,\,+\infty)\right]$

98.* $\displaystyle\int\frac{dx}{\big(x^2+1\big)\big(x^3+x^2\big)}$ $\quad\left[\dfrac{1}{2}\ \ln\dfrac{|x+1|\sqrt{x^2+1}}{x^2}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{x}++C,\ x\in(-\infty,-1),\ x\in(-1,\,0),\ x\in(0,\,+\infty)\right]$

99.* $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)\big(x^2+1\big)\big(x^2-1\big)}$ $\quad\left[\dfrac{1}{8}\ \ln\left|\dfrac{(x-1)(x^2+1)}{(x+1)^3}\right|+\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}x++C,\ x\in(-\infty,-1),\ x\in(-1,\,1),\ x\in(1,\,+\infty)\right]$

100.* $\displaystyle\int\frac{(x+1)^2}{\big(x^2+2x+5\big)^2}$ $\quad\left[\text{použijte substituci } x+1=t\quad \dfrac{-(x+1)}{2(x^2+2x+5)}+\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C,\quad x\in\mathbb{R}\right]$

7. Integrály typu $\int R\Big(x, \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\,\Big)\,dx$

Předpokládáme, že $ad-bc \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$. Pomocí substituce $\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}} = t$ převedeme daný integrál na integrál racionální funkce vzhledem k t.

- Vypočítejte integrály:

***Příklad* 101.** $\displaystyle\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx$

Řešení: Použijeme substituci $\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}} = t$, pak $\dfrac{2-x}{2+x} = t^3 \quad \Rightarrow$

$$2-x = t^3(2+x) \quad \Rightarrow \quad 2-2t^3 = t^3x + x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\big(1-t^3\big)}{t^3+1} \quad \Rightarrow$$

$$dx = 2\,\frac{-3t^2\big(t^3+1\big)-3t^2\big(1-t^3\big)}{\big(t^3+1\big)^2}\,dt = 2\,\frac{-6t^2}{\big(t^3+1\big)^2}\,dt.$$

Dosadíme do daného integrálu a postupně upravíme:

$$\int \frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = \int \frac{1}{\Big(2-\dfrac{2\big(1-t^3\big)}{t^3+1}\Big)^2}\cdot t\cdot\frac{-12\,t^2}{\big(t^3+1\big)^2}\,dt =$$

$$= -12\int \frac{1}{\left(\dfrac{2\big(t^3+1\big)-2\big(1-t^3\big)}{t^3+1}\right)^2}\cdot\frac{t^3}{\big(t^3+1\big)^2}\,dt = -12\int\frac{t^3}{\big(4t^3\big)^2}\,dt = \frac{-12}{16}\int\frac{1}{t^3}\,dt =$$

$$= -\frac{3}{4}\,\frac{t^{-2}}{-2}+C = \frac{3}{8}\,\frac{1}{t^2}+C = \frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt[3]{\Big(\dfrac{2-x}{2+x}\Big)^2}}+C = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\Big(\frac{2+x}{2-x}\Big)^2}+C;$$

$x \in (-\infty,-2),\ x \in (-2,2),\ x \in (2,+\infty)$.

■

***Příklad* 102.** $\displaystyle\int \frac{2+\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}\,dx$

Řešení: Integrovaná funkce je racionální vzhledem k $\sqrt[6]{1+x}$, proto použijeme substituci

$$\sqrt[6]{1+x} = t \quad \Rightarrow \quad 1+x = t^6 \quad \Rightarrow \quad dx = 6t^5dt,$$

$$\sqrt{1+x} = \Big(\sqrt[6]{1+x}\Big)^3 = t^3, \qquad \sqrt[3]{(1+x)^2} = \Big(\sqrt[3]{1+x}\Big)^2 = \Big(\sqrt[6]{1+x}\Big)^4 = t^4.$$

Nyní dosadíme do daného integrálu:

$$\int \frac{2+\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1+x)^2}}\,dx = \int \frac{2+t}{t^3+t^4}\cdot 6t^5\,dt = 6\int \frac{(2+t)t^5}{t^3(t+1)}\,dt = 6\int \frac{t^3+2t^2}{t+1}\,dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Vydělíme } \frac{t^3+2t^2}{t+1} = t^2+t-1+\frac{1}{t+1} \\ \text{a pak přímo integrujeme.} \end{array} \right| = 6\int \left(t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right) dt =$$

$$= 6\Big(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\Big)+C = 2t^3+3t^2-6t+6\ln|t+1|+C = 2\sqrt{1+x}+3\sqrt[3]{1+x}-$$

$$-6\sqrt[6]{1+x}+6\ln|\sqrt[6]{1+x}+1|+C; \qquad x\in(-1,+\infty).$$

■

Příklad 103. $\displaystyle\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Řešení: Vzhledem k tomu, že kvadratický výraz pod odmocninou má reálné kořeny, je možné provést takovou úpravu, aby pod odmocninou zbyl lineárně lomený výraz.

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{(1-x)\sqrt{(1-x)^{\mathbf{2}}\,\dfrac{(1+x)}{\mathbf{1-x}}}}\,dx = \int \frac{1}{(1-x)^2\,\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = t \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1+x}{1-x} = t^2 \quad\Rightarrow\quad 1+x = t^2 - x\,t^2 \quad\Rightarrow\quad x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}, \\ dx = \dfrac{2t\big(t^2+1\big)-\big(t^2-1\big)\,2t}{\big(t^2+1\big)^2}\,dt = \dfrac{4t}{\big(t^2+1\big)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{1}{\Big(1-\dfrac{t^2-1}{t^2+1}\Big)^2\cdot t}\cdot\frac{4t}{\big(t^2+1\big)^2}\,dt = 4\int \frac{1}{\Big(\dfrac{t^2+1-t^2+1}{t^2+1}\Big)^2}\cdot\frac{1}{\big(t^2+1\big)^2}\,dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{4}\,dt = \int dt = t + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C; \qquad x\in(-1,1).$$

■

Poznámka: Při úpravě výrazu pod odmocninou jsme použili, že $\sqrt{(1-x)^2} = |1-x| = 1-x$, protože $x\in(-1,1)$.

Příklad 104.* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3(x+3)^5}}\,dx$

Řešení: Opět je možná taková úprava, po které pod odmocninou dostaneme lineárně lomený výraz.

$$\int \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3(x+3)^5}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-1)^3\boldsymbol{(2x-1)}\dfrac{x+3}{\boldsymbol{2x-1}}(x+3)^4}}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{(2x-1)(x+3)\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{2x-1}}}\,dx = \left| \begin{array}{lll} \sqrt[4]{\dfrac{x+3}{2x-1}} = t & \Rightarrow & \dfrac{x+3}{2x-1} = t^4 \quad \Rightarrow \\ x = \dfrac{t^4+3}{2t^4-1} & \Rightarrow & dx = \dfrac{-28t^3}{\left(2t^4-1\right)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\dfrac{2\left(t^4+3\right)}{2t^4-1} - 1\right)\cdot\left(\dfrac{t^4+3}{2t^4-1}+3\right)\cdot t} \cdot \frac{-28t^3}{\left(2t^4-1\right)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{\dfrac{2t^4+6-2t^4+1}{2t^4-1}\cdot\dfrac{t^4+3+6t^4-3}{2t^4-1}} \cdot \frac{-28t^2}{\left(2t^4-1\right)^2}\,dt = \int \frac{-28t^2}{7\cdot 7t^4}\,dt =$$

$$= \frac{-4}{7}\int \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{4}{7}\frac{1}{t} + C = \frac{4}{7}\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x+3}} + C; \qquad x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

■

Poznámka: Během výpočtu integrálu jsme použili, že $\sqrt[4]{(2x-1)^4} = |2x-1| = 2x-1$ pro $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Kdybychom byli na intervalu $x \in (-\infty, -3)$, pak $|2x-1| = 1-2x$ a výsledek integrálu by měl opačné znaménko.

Poznámka: Provedená úprava v předcházejícím příkladu se dá aplikovat obecně na odmocniny typu:

$$\sqrt[n]{(ax+b)^{k_1 n-1}(cx+d)^{k_2 n+1}} = (ax+b)^{k_1}(cx+d)^{k_2}\sqrt[n]{\frac{cx+d}{ax+b}}, \text{ kde } k_1,\ k_2 \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}.$$

- Vypočítejte integrály:

105. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}}}{2-x}\,dx$ $\left[\ln\left|\dfrac{x+1}{2-x}\right| + \ln\left|\dfrac{3}{x+1}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{2-x}{x+1}} + C \quad x \in (-1,2) \right]$

106. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$ $\left[2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - \ln|1+\sqrt[6]{x}| + 6\sqrt[6]{x} + C \quad x \in (0,+\infty) \right]$

107. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}\,dx$ $\left[-2\sqrt{\dfrac{x-2}{x}} + \ln\left|\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}\right| + C \quad x \in (-\infty,0),\ x \in \langle 2,+\infty) \right]$

108. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$ $\left[\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}} + C \quad x \in (-\infty,-1),\ x \in (-1,1),\ x \in (1,+\infty) \right]$

8. Integrály typu $\displaystyle\int R\big(\sin x,\, \cos x\big)\, dx$

***Příklad* 109**. Odvoďte vzorce pro vyjádření funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pomocí proměnné t, jestliže zvolíme:

a) $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; **b)** $t = \operatorname{tg} x$; **c)** $t = \operatorname{cotg} x$;

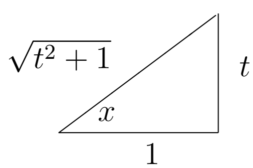
Řešení:

a) $$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \left|1 = \sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right| = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{2\,\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + 1} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right| = \frac{2t}{t^2+1}\,, \quad \text{podobně}$$

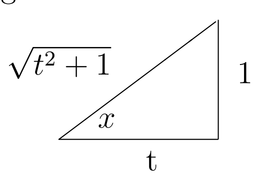
$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1} = \left|\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right| = \frac{1-t^2}{t^2+1}.$$

b) Nakreslíme pomocný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém zvolíme úhel x a odvěsny tak, aby $\operatorname{tg} x = t$. Potom



$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

c) Opět nakreslíme pomocný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém zvolíme úhel x a odvěsny tak,
aby $\operatorname{cotg} x = t$. Potom



$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \quad \text{a} \quad \cos x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

■

Než přistoupíme k výpočtu integrálů typu $\displaystyle\int R\big(\sin x,\, \cos x\big)\, dx$ připomeňme si používané substituce:

1) $\underline{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t:}$ $\quad \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt.$

Tato substituce se dá použít v každém příkladě, avšak není vždy nejvýhodnější.

2) Je-li $R\big(-\sin x,\, \cos x\big) = -R\big(\sin x,\, \cos x\big)$, pak lze s výhodou použít sustituci

$\underline{\cos x = t:}$ $\quad \sin x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = \dfrac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}.$

3) Je-li $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, pak lze s výhodou použít sustituci

$$\underline{\sin x = t}: \quad \cos x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

4) Je-li $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, pak lze s výhodou použít sustituci

$$\underline{\operatorname{tg} x = t}: \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

(resp. $\operatorname{cotg} x = t$.)

- Vhodnou substitucí vypočítejte integrály:

***Příklad* 110.** $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 2\sin x + \cos x}$

Řešení: V tomto příkladě lze z uvedených substitucí použít jedině substituci $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, protože integrovaná funkce nesplňuje žádnou z podmínek **2)**, **3)** a **4)**.

$$\int \frac{dx}{5 - 2\sin x + \cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} t,\ x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{5 - \dfrac{2\cdot 2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{2\,dt}{5(1+t^2) - 4t + 1 - t^2} = \int \frac{2\,dt}{4t^2 - 4t + 6} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - t + \frac{6}{4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1}{\sqrt{5}} + C,$$

$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad x \in (-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 111.** $\displaystyle\int \frac{dx}{(2+\cos x)\,\sin x}$

Řešení: Snadno zjistíme, že integrovaná funkce je lichá vzhledem k $\sin x$:

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{1}{(2+\cos x)\,(-\sin x)} = -\frac{1}{(2+\cos x)\,\sin x} = -R(-\sin x, \cos x),$$

proto zvolíme substituci $\cos x = t$, $x = \arccos t$, viz **2)**.

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\,\sin x} = \int \frac{1}{(2+t)\cdot\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int \frac{1}{(2+t)(1-t^2)}\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{(2+t)\big(t^2-1\big)}\,dt = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{(2+t)(t-1)(t+1)} = \dfrac{A}{2+t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{t+1}, \\ 1 = A\big(t^2-1\big) + B(2+t)(t+1) + C(2+t)(t-1), \\ t=1 \quad \Rightarrow\ 1 = \quad 6B \ \Rightarrow \quad B = \dfrac{1}{6}, \\ t=-1 \quad \Rightarrow\ 1 = \quad -2C \ \Rightarrow \quad C = -\dfrac{1}{2}, \\ t=-2 \quad \Rightarrow\ 1 = \quad 3A \ \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int \Big(\frac{1}{3}\,\frac{1}{2+t} + \frac{1}{6}\,\frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{t+1}\Big)\,dt = \frac{1}{3}\,\ln|2+t| + \frac{1}{6}\,\ln|t-1| - \frac{1}{2}\,\ln|t+1| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,\ln|2+\cos x| + \frac{1}{6}\,\ln|\cos x - 1| - \frac{1}{2}\,\ln|\cos x + 1| = +C,$$

$$\sin x \neq 0,\ \cos x \neq \pm 1 \ \Rightarrow\ x \in \big(k\pi,\ (k+1)\pi\big),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 112.** $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx$

Řešení: Integrovaná funkce je sudá současně vzhledem k $\sin x$ i $\cos x$, viz **4)**.

$$R\big(\sin x,\, \cos x\big) = \frac{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{2\,\sin x\,\cos x} = R\big(-\sin x,\, -\cos x\big) = R\big(\sin x,\, \cos x\big).$$

$$\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} \boxed{\operatorname{tg} x = t}, & dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, & \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| = \int \frac{1+t}{2\cdot \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \cdot \frac{1}{1+t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1+t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{1}{t}+1\Big)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\ln|t| + t\Big) + C = \frac{1}{2}\Big(\ln|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x\Big) + C,$$

$$x \neq k\cdot\frac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ x \in \Big(k\,\frac{\pi}{2},\ (k+1)\,\frac{\pi}{2}\Big),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 113.** Použijte všechny přípustné substituce k výpočtu integrálů, srovnejte je a vyberte nejvhodnější z nich k výpočtu daného integrálu:

$$\textbf{a)}\ \int \frac{\operatorname{tg} t}{\cos 2x}\,dx; \qquad \textbf{b)}\ \int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx.$$

Řešení: V obou příkladech lze použít všechny substituce:

$$\textbf{a)}\quad \int \frac{\operatorname{tg} t}{\cos 2x}\,dx = \int \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx,$$

$$\textbf{1)}\ \ \underline{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}: \int \frac{\dfrac{2t}{1-t^2}}{\Big(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\Big)^2 - \Big(\dfrac{2t}{1+t^2}\Big)^2}\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{4t\big(1+t^2\big)}{\big(1-t^2\big)\Big(\big(1-t^2\big)^2 - 4t^2\Big)}\,dt,$$

$$\textbf{2)}\ \ \underline{\cos x = t}: \int \frac{\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}}{t^2 - \big(1-t^2\big)}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int \frac{-1}{t\big(2t^2-1\big)}\,dt,$$

3) $\underline{\sin x = t}:$ $$\int \frac{\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2-t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int\frac{t}{\left(1-2t^2\right)\left(1-t^2\right)}\,dt,$$

4) $\underline{\operatorname{tg} x = t}:$ $$\int \frac{t}{\frac{1}{1+t^2}-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int\frac{t}{1-t^2}\,dt.$$

Porovnáme-li výsledné integrály po provedení substitucí, vidíme, že nejsložitější je integrál po použití substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ tedy případ **1)**, další je **3)**, pak **2)** a nejjednodušší je **4)**. Proto dopočítáme integrál ze **4)**.

$$\int\frac{t}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\int\frac{-2t}{1-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}\,\ln\left|1-t^2\right|+C = -\frac{1}{2}\,\ln\left|1-\operatorname{tg}^2 x\right|+C$$

$$\begin{matrix}\operatorname{tg} x \neq \pm 1 & \Rightarrow & x\neq \frac{\pi}{4}+k\,\frac{\pi}{2}\\ \cos x \neq 0 & \Rightarrow & x\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi\end{matrix}\quad\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x\in\left(-\frac{\pi}{4}+k\,\pi,\ \frac{\pi}{4}+k\,\pi\right), k\in\mathbb{Z}.\\ x\in\left(\frac{\pi}{4}+k\,\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\,\pi\right)\\ x\in\left(\frac{\pi}{2}+k\,\pi,\ \frac{3\pi}{4}+k\,\pi\right)\end{array}\right. .$$

b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^5 x\,dx$

1) $\underline{\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t}:$ $$\int\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^5\cdot\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int\frac{16t^3\left(1-t^2\right)^5}{\left(1+t^2\right)^9}\,dt,$$

2) $\underline{\cos x = t}:$ $$\int\left(\sqrt{1-t^2}\right)^3\cdot t^5\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int\left(1-t^2\right)t^5\,dt,$$

3) $\underline{\sin x = t}:$ $$\int t^3\left(\sqrt{1-t^2}\right)^5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int t^3\left(1-t^2\right)^2\,dt,$$

4) $\underline{\operatorname{tg} x = t}:$ $$\int\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^5\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\frac{t^3}{\left(1+t^2\right)^5}\,dt.$$

Okamžitě vidíme, že nejméně výhodná je substituce **1)**, pak **4)**, **3)** a nejlepší je **2)**:

$$-\int\left(1-t^2\right)t^5\,dt = \int\left(t^7-t^5\right)dt = \frac{t^8}{8}-\frac{t^6}{6}+C = \frac{\cos^8 x}{8}-\frac{\cos^6 x}{6}+C,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

■

Z těchto dvou příkladů je jasné, že i když lze užít všechny substituce, záleží na integrované funkci, která substituce je nejvýhodnější. Většinou nejhorší bývá univerzální substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, i když existují výjimky. Např. $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}\,dx$ lze vypočítat nejsnadněji substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, viz př. **37e)**. Protože funkce $\dfrac{1}{\sin x}$ je lichá vzhledem k $\sin x$, lze použít též substituci $\cos x = t$. Srovnání ponecháme čtenářům.

Poslední integrál byl typu $\int\sin^n x\,\cos^m x\,dx$, kde m a n jsou celá čísla. V obecném případě je důležité, zda některé z čísel je liché, pak použijeme buď substituci $\sin x = t$ (m je liché) nebo $\cos x = t$ (n je liché). Jsou-li m a n čísla sudá, pak se někdy dá použít substituce $\operatorname{tg} x = t$, resp. $\operatorname{cotg} x = t$, ale pokud m a n jsou kladná sudá čísla, pak zdvojnásobením úhlu snížíme exponenty m a n.

***Příklad* 114.** **a)** $\displaystyle\int \sin^2 x\, dx$; **b)** $\displaystyle\int \cos^4 x\, dx$; **c)** $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$;
d) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx$; **e)** $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\, dx$; **f)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}\, dx$.

Řešení:

a) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\Big(x - \frac{\sin 2x}{2}\Big) + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) $$\int \cos^4 x\, dx = \int \big(\cos^2 x\big)^2\, dx = \int \Big(\frac{1+\cos 2x}{2}\Big)^2 dx = \frac{1}{4}\int \big(1 + 2\,\cos 2x + \cos^2 2x\big)\, dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int \Big(1 + 2\,\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\Big)\, dx = \frac{1}{4}\left(x + 2\,\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}\Big(x + \frac{\sin 4x}{4}\Big)\right) + C =$$
$$= \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{2}\,x + \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\Big) + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

c) $$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx = \mathbf{\frac{1}{4}}\int (\mathbf{2}\,\sin x\,\cos x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int \big(\sin 2x\big)^2\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx =$$
$$= \frac{1}{8}\Big(x - \frac{\sin 4x}{4}\Big) + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

d) $$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)^2 \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C,$$
$$x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \Big(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\Big), k \in \mathbb{Z};$$

e) $$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}\, dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \cos^2 x\, \frac{dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{cotg} x = t, & -\frac{dx}{\sin^2 x} = dt \\ \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} & \end{array} \right| =$$
$$= \int t^2 \cdot \frac{t^2}{1+t^2} \cdot (-dt) = -\int \frac{t^4 \mathbf{-1+1}}{1+t^2}\, dt = -\int \Big(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\Big)\, dt =$$
$$= -\Big(\frac{t^3}{3} - t - \operatorname{arccotg} t\Big) + C = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{cotg} x \quad \text{pro } x \in (0,\,\pi) \\ \text{je } \operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} x) = x \end{array} \right| = -\frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \operatorname{cotg} x + x + C,$$
$$x \in (0,\,\pi);$$

f) $$\int \frac{1}{\sin^4 x\,\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\sin^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} x = t, & \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\big(1+t^2\big)^2}{t^4}\, dt = \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^4}\, dt = \int \Big(\frac{1}{t^4} + \frac{2}{t^2} + 1\Big)\, dt = -\frac{1}{3t^3} - \frac{2}{t} + t + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \frac{1}{t} = \operatorname{cotg} x \end{array} \right| = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - 2\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x + C,$$

$$x \neq k\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(k\,\frac{\pi}{2},\,(k+1)\,\frac{\pi}{2}\right),\; k \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 115**. **a)** $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx$; **b)** $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$; **c)** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^3 x\,\cos x}\,dx$;
d) $\displaystyle\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,dx$; **e)** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x dx$; **f)** $\displaystyle\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$.

Řešení: V těchto příkladech se dají použít všechny čtyři substituce uvedené na začátku této kapitoly. Vybereme vždy tu nejvhodnější a zbývající ponecháme čtenáři.

a) $$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx = \left| \begin{array}{c} \cos x \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{4t^4} + C = \frac{1}{4\cos^4 x} + C,$$

$$x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z};$$

b) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = dt \end{array} \right| = \int t^3\,dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C,$$

$$x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z};$$

c) $$\int \frac{1}{\sin^3 x\,\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\sin x\,\cos x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{cotg} x = t, & \frac{dx}{\sin^2 x} = -dt \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, & \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{-dt}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}} = -\int \frac{1+t^2}{t}\,dt = -\int \left(\frac{1}{t} + t\right)dt = -\ln|t| - \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -\ln|\operatorname{cotg} x| - \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + C = \ln|\operatorname{tg} x| - \frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + C,$$

$$x \neq k\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(k\cdot\frac{\pi}{2},\,(k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z};$$

d) $$\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,dx = \frac{1}{8}\int \left(2\sin x\,\cos x\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int \sin^3 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - \cos^2 2x\right)\sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2\sin 2x\,dx = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\int \left(1 - t^2\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{16}\left(t - \frac{t^3}{3}\right) + C = -\frac{1}{16}\left(\cos 2x - \frac{\cos^3 2x}{3}\right) + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

e) $$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^3}\,dt = \int \left(-\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = \frac{1}{2\,\cos^2 x} + \ln|\cos x| + C,$$

$$x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in \mathbb{Z};$$

f) $$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x}{\sin^3 x}\,dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2 \cdot \cos x}{\sin^3 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^3}\,dt = \int \frac{1-2t^2+t^4}{t^3}\,dt = \int \left(\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t}+t\right)dt = \frac{-1}{2t^2} - 2\,\ln|t| + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\,\sin^2 x} - 2\,\ln|\sin x| + \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

$$x \neq k\,\pi \;\Rightarrow\; x \in \Big(k\,\pi,\ (k+1)\pi\Big), k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 116.** **a)** $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^4 x\,dx;$ **b)** $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx.$

Řešení:

a) Integrovaná funkce je lichá vzhledem k funkci $\sin x$, proto použijeme substituci $t = \cos x,\ dt = -\sin x\,dx$:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x\,dx = -\int \left(1-t^2\right) t^4\,dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

b) Integrovaná funkce je lichá k funkci $\cos x$, proto $t = \sin x,\ dt = \cos x\,dx$:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{t^2}{1-t^2}\,dt = -\int \frac{t^2 \mathbf{-1+1}}{t^2-1}\,dt =$$

$$= -\int \left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt = -\left(t + \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right) + C = -\left(\sin x + \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right|\right) + C\,,$$

$$x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right), k \in \mathbb{Z};$$

■

Příklad* 117. **a)** $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos 4x\,dx;$ **b)** $\displaystyle\int \cos 2x \cdot \sin 4x\,dx;$

c) $\displaystyle\int \sin 2x \cdot \sin\frac{x}{3}\,dx;$ **d)** $\displaystyle\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x\,dx.$

Řešení: Integrály těchto typů lze vypočítat použitím součtových vzorců;

(1) $\quad \sin ax \cdot \sin bx = \dfrac{1}{2}\Big(\cos\,(a-b)x - \cos\,(a+b)x\Big),$

(2) $\quad \sin ax \cdot \cos bx = \dfrac{1}{2}\Big(\sin\,(a+b)x + \sin\,(a-b)x\Big),$

(3) $\cos ax \cdot \cos bx = \dfrac{1}{2}\Big(\cos\,(a+b)x + \cos\,(a-b)x\Big).$

a) $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos 4x\,dx \overset{\mathbf{(2)}}{=} \frac{1}{2}\int \Big(\sin 5x + \sin\,(-3)x\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int \Big(\sin 5x - \sin 3x\Big)\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big(\frac{-\cos 5x}{5} + \frac{\cos 3x}{3}\Big) + C, \qquad x \in \mathbb{R};$

b) $\displaystyle\int \cos 2x \cdot \sin 4x\,dx \overset{\mathbf{(2)}}{=} \frac{1}{2}\int \Big(\sin 6x + \sin 2x\Big)\,dx = \frac{1}{2}\Big(-\frac{\cos 6x}{6} - \frac{\cos 2x}{2}\Big) + C, x \in \mathbb{R};$

c) $\displaystyle\int \sin 2x \cdot \sin\frac{x}{3}\,dx \overset{\mathbf{(1)}}{=} \frac{1}{2}\int \Big(\cos\frac{5}{3}\,x - \cos\frac{7}{3}\,x\Big)\,dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{3}{5}\,\sin\frac{5}{3}\,x - \frac{3}{7}\,\sin\frac{7}{3}\,x\Big) + C, x \in \mathbb{R};$

d) $\displaystyle\int \cos x \cdot \cos 3x \cdot \cos 5x\,dx \overset{\mathbf{(3)}}{=} \frac{1}{2}\int \Big(\cos 4x + \cos 2x\Big)\,\cos 5x\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \Big(\cos 4x \cdot \cos 5x + \cos 2x \cdot \cos 5x\Big)\,dx \overset{\mathbf{(3)}}{=} \frac{1}{4}\int \Big(\cos 9x + \cos x + \cos 7x + \cos 3x\Big)\,dx =$

$\displaystyle = \frac{1}{4}\Big(\frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 3x}{3} + \sin x\Big) + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$

■

- Vypočítejte integrály:

118. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ $\quad \left[\frac{-2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C,\ x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$

119. $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\big(1+\sin^2 x\big)\,\cos x}\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}\ln|\sin^2 x + 1| - \frac{1}{2}\ln|\sin x - 1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin x) + C,\ x \neq (2k+1)\,\frac{\pi}{2}\right]$

120. $\displaystyle\int \frac{(1+\cos x)\sin x}{2-\sin^2 x}\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{2}\ln|1+\cos^2 x| - \operatorname{arctg}(\cos x) + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

121. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ $\quad \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{2}\operatorname{tg} x\big) + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

122. $\displaystyle\int \sin^3 x\ \cos^2 x\,dx$ $\quad \left[-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

123. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$ $\quad \left[-\ln|\cos x| + \frac{\cos^2 x}{2} + C,\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right]$

124. $\displaystyle\int \big(\sin^2 x\ \cos^2 x + \cos^4 x\big)\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

125. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$ $\quad \left[-2\operatorname{cotg} 2x + C,\ x \neq k\cdot\frac{\pi}{2}\right]$

126. $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ $\quad \left[\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

127. $\displaystyle\int \cos 3x \cdot \cos^2 x\,dx$ $\quad \left[\frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 3x}{6} + \frac{\sin x}{4} + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

128. $\displaystyle\int \sin 4x \cdot \sin 7x \cdot \cos x\,dx$ $\quad \left[\frac{1}{4}\Big(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{4} - \frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin 12x}{12}\Big) + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

129. $\displaystyle\int \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x\,dx$ $\quad \left[-\frac{1}{32}\cos 8x + C,\ x \in \mathbb{R}\right]$

9.* Integrály typu $\int R\big(x,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx$ - Eulerovy substituce

Integrály tohoto typu lze řešit užitím substitucí:

(1) $a>0: \;\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm x\sqrt{a}+t$

(2) $c>0: \;\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$, kde $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$.

- Pomocí Eulerových substitucí vypočtěte integrály:

***Příklad* 130.** $\displaystyle\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+3}}\,dx$

Řešení: V tomto příkladě lze použít jak substituci **(1)**, tak i **(2)**. Vybereme si **(1)**, abychom pracovali s celočíselnými koeficienty:

$$\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+3}}\,dx=\left|\begin{array}{l} a=1:\ \sqrt{x^2+x+3}=x+t\\ x^2+x+3=x^2+2xt+t^2\ \Rightarrow\ x-2xt=t^2-3\\ x=\dfrac{t^2-3}{1-2t},\ dx=\dfrac{-2\big(t^2-t+3\big)}{(1-2t)^2}\,dt\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{1}{\dfrac{t^2-3}{1-2t}+\dfrac{t^2-3}{1-2t}+t}\cdot\frac{-2\big(t^2-t+3\big)}{(1-2t)^2}\,dt=-2\int\frac{t^2-t+3}{\big(2t^2-6+t-2t^2\big)(1-2t)}\,dt=$$

$$=2\int\frac{t^2-t+3}{(t-6)(2t-1)}\,dt=\left|\begin{array}{l}\text{vydělíme } 2\big(t^2-t+3\big):\big(2t^2-13t+6\big)\\ \text{a rozložíme na parciální zlomky}\end{array}\right|=\int\Big(1+\frac{6}{t-6}-$$

$$-\frac{1}{2t-1}\Big)\,dt=t+6\ln|t-6|-\frac{1}{2}\ln|2t-1|+C=|t=\sqrt{x^2+x+3}-x|=\sqrt{x^2+x+3}-$$

$$-x+6\ln|\sqrt{x^2+x+3}-x-6|-\frac{1}{2}\ln|2\sqrt{x^2+x+3}-2x-1|+C.$$

Z podmínky $x+\sqrt{x^2+x+3}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq-3 \quad\Rightarrow\quad x\in(-\infty,-3), x\in(-3,+\infty)$.

■

***Příklad* 131.** $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx$

Řešení: Zde je $a=-1<0$, ale $c=4>0$, proto použijeme druhou substituci:

$$\int\frac{1}{x\sqrt{4-2x-x^2}}\,dx=\left|\begin{array}{l}\sqrt{4-2x-x^2}=xt+2\\ 4-2x-x^2=x^2t^2+4xt+4\ \Rightarrow\ -2-x=xt^2+4t\\ x=\dfrac{-2-4t}{1+t^2},\ dx=\dfrac{4t^2+4t-4}{\big(1+t^2\big)^2}\,dt\end{array}\right|=$$

$$= \int \frac{1}{\frac{-2-4t}{1+t^2} \cdot \left(\frac{-2-4t}{1+t^2} \cdot t + 2\right)} \cdot \frac{4t^2+4t-4}{\left(1+t^2\right)^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{4t^2+4t-4}{(-2-4t)\left(-2t-4t^2+2+2t^2\right)}\, dt = \int \frac{4\left(t^2+t-1\right)}{-2(1+2t)\cdot(-2)\left(t^2+t-1\right)}\, dt =$$

$$= \int \frac{1}{1+2t}\, dt = \frac{1}{2}\, \ln|1+2t| + C = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4-2x-x^2} = xt+2 \\ t = \dfrac{\sqrt{4-2x-x^2}-2}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\, \ln\left|1 + \frac{2\left(\sqrt{4-2x-x^2}-2\right)}{x}\right| + C.$$

Z podmínek $x \neq 0$ a $4-2x-x^2 > 0 \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+2x-4<0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5} \\ x \in \left(-1-\sqrt{5},\, -1+\sqrt{5}\right) \smallsetminus \{0\} \end{array} \right\} =$

dostáváme $x \in \left(-1-\sqrt{5},\, 0\right),\ x \in \left(0,\, -1+\sqrt{5}\right)$.

■

***Příklad* 132.** $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}\, dx$

Řešení: V tomto příkladě je $a=-1<0$ a $c=-3<0$. Zbývá poslední možnost, a sice existence reálných kořenů rovnice

$$-x^2+4x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ 3 \end{array} \right. .$$

Využijeme tyto kořeny a napíšeme daný kvadratický trojčlen pomocí kořenových činitelů

$-x^2+4x-3 = -\left(x^2-4x+3\right) = -(x-1)(x-3) = (x-1)(3-x).$

$$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{(x-2)\sqrt{(x-1)(3-x)}}\, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{rcl} \sqrt{(x-1)(3-x)} = t\cdot(x-1) & \Rightarrow & (x-1)(3-x) = t^2(x-1)^2 \\ \dfrac{3-x}{x-1} = t^2 & \Rightarrow & 3-x = t^2x - t^2 \\ x = \dfrac{3+t^2}{t^2+1} & \Rightarrow & dx = \dfrac{-4t}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\left(\frac{3+t^2}{t^2+1} - 2\right)\cdot\left[t\cdot\left(\frac{3+t^2}{t^2+1} - 1\right)\right]} \cdot \frac{-4t}{\left(t^2+1\right)^2}\, dt =$$

$$= \int \frac{-4t}{\left(3+t^2-2t^2-2\right)\cdot t\cdot\left(3+t^2-t^2-1\right)}\, dt = \int \frac{-4}{\left(1-t^2\right)\cdot 2}\, dt = 2\int \frac{dt}{t^2-1} \overset{(17)}{=}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\, \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \left| \begin{array}{l} t = \dfrac{\sqrt{(x-1)(3-x)}}{x-1} = \\ = \sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}} \end{array} \right| = \ln\left| \frac{\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}} - 1}{\sqrt{\dfrac{3-x}{x-1}} + 1} \right| + C =$$

$$= \ln \left| \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1}} \right| + C.$$

Z podmínek $x - 2 \neq 0$ a $-3 + 4x - x^2 > 0$ dostáváme $x \in (1,\, 2),\ x \in (2,\, 3)$.

$\blacksquare$

- Vypočítejte integrály:

133. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left[\ln \left| \frac{\sqrt{x^2+x+1} - x - 2}{\sqrt{x^2+x+1} - x} \right| + C \quad x \in (-\infty,\, -1),\ x \in (-1,\, +\infty) \right]$

134. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\, dx$ $\left[\frac{1}{x}\sqrt{2x^2-2x+1} + C \quad x \in (-\infty,\, 0),\ x \in (0,\, +\infty) \right]$

135. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$ $\left[\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C \quad x \in (-\infty,\, -4),\ x \in (1,\, +\infty) \right]$

136. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{3-2x^2-x^4}}$ $\left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{x^2+1}{2} + C \quad x \in (-1,\, 1) \right]$

Poznámka: Zpracování a dosazování Eulerových substitucí je velmi zdlouhavé až těžkopádné, ale má tu výhodu, že vždy vede na integraci racionální funkce vzhledem k proměnné t.

Poznámka: V další kapitole budeme opět řešit integrály $\displaystyle\int R\big(x,\, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\, dx$, avšak použijeme goniometrické substituce.

10. Integrály typu $\int R\big(x,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx$ - goniometrické substituce

Kvadratický výraz ax^2+bx+c upravíme na součet nebo rozdíl čtverců pomocí substituce $z = x + \dfrac{b}{2a}$ a označení $a = \pm m^2,\ c - \dfrac{b^2}{4a} = \pm n^2$:

$$I.\quad m^2z^2+n^2 \qquad\qquad II.\quad n^2-m^2z^2$$
$$III.\quad m^2z^2-n^2 \qquad\qquad IV.\quad -m^2z^2-n^2,$$

kde $IV.$ nenastane, protože pracujeme v oboru reálných čísel. Potom daný integrál $\int R\big(x,\,\sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx$ přejde v jeden z integrálů:

I. $\int R\big(z,\,\sqrt{m^2z^2+n^2}\big)\,dz$, **II**. $\int R\big(z,\,\sqrt{n^2-m^2z^2}\big)\,dz$, **III**. $\int R\big(z,\,\sqrt{m^2z^2-n^2}\big)\,dz.$

Možné substituce v jednotlivých případech jsou následující:

I. $\sqrt{m^2z^2+n^2} = n\sqrt{\dfrac{m^2z^2}{n^2}+1} \;\Rightarrow$ substituce : $\underline{\dfrac{mz}{n} = \operatorname{tg} t,}$ $\big(\text{resp. } \operatorname{cotg} t\big)$

$$z = \frac{n}{m}\operatorname{tg} t, \quad dz = \frac{n}{m}\,\frac{dt}{\cos^2 t},$$

$$\sqrt{m^2z^2+n^2} = n\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1} = n\sqrt{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}+1} = \frac{n}{\cos t};$$

II. $\sqrt{n^2-m^2z^2} = n\sqrt{1-\dfrac{m^2z^2}{n^2}} \;\Rightarrow$ substituce : $\underline{\dfrac{mz}{n} = \sin t,}$ $\big(\text{resp. } \cos t\big)$

$$z = \frac{n}{m}\sin t, \quad dz = \frac{n}{m}\cos t\,dt,$$

$$\sqrt{n^2-m^2z^2} = n\sqrt{1-\sin^2 t} = n\,\cos t;$$

III. $\sqrt{m^2z^2-n^2} = n\sqrt{\dfrac{m^2z^2}{n^2}-1} \;\Rightarrow$ substituce : $\underline{\dfrac{mz}{n} = \dfrac{1}{\sin t},}$ $\left(\text{resp. } \dfrac{1}{\cos t}\right)$

$$z = \frac{n}{m}\,\frac{1}{\sin t}, \quad dz = \frac{n}{m}\cdot\frac{-\cos t}{\sin^2 t}\,dt,$$

$$\sqrt{m^2z^2-n^2} = n\sqrt{\frac{1}{\sin^2 t}-1} = n\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}} = n\,\frac{\cos t}{\sin t}.$$

***Příklad* 137**. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx$

Řešení: Integrál je typu **I**.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}\,dx = \int \frac{3\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{9}+1}}{x}\,dx = 3\int \frac{\sqrt{\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+1}}{x}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{x}{3} = \operatorname{tg} t, \ \ x = 3 \operatorname{tg} t, \ \ dx = \dfrac{3}{\cos^2 t}\, dt, \\ \sqrt{\left(\dfrac{x}{3}\right)^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \dfrac{1}{\cos t} \end{array} \right| = 3 \int \frac{\frac{1}{\cos t}}{3 \operatorname{tg} t} \cdot \frac{3\, dt}{\cos^2 t} = 3 \int \frac{1}{\sin t \cdot \cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3 \int \frac{\sin t\, dt}{\sin^2 t \cdot \cos^2 t} = \left| \begin{array}{rl} \cos t & = u \\ -\sin t\, dt & = du \end{array} \right| = 3 \int \frac{-du}{\left(1-u^2\right)u^2} = -3 \int \frac{1 \boldsymbol{-u^2} \ \boldsymbol{+u^2}}{\left(1-u^2\right)u^2}\, du =$$

$$= -3 \int \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{1-u^2} \right) du = -3 \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \right) + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \cos t, \qquad \operatorname{tg} t = \dfrac{x}{3}, \\ t = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}, \quad u = \cos\left(\operatorname{arctg} \dfrac{x}{3}\right) \quad = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left[\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{x}{3}\right)\right]^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{9}}} = \dfrac{3}{\sqrt{9+x^2}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{použijeme-li, že } \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3\sqrt{9+x^2}}{3} - \frac{3}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}+3}{\sqrt{9+x^2}-3} \right| + C, \qquad x \in (-\infty, 0), \ \ x \in (0, \infty).$$

■

***Příklad* 138**. $\displaystyle\int \sqrt{2x - x^2}\, dx$

Řešení: Výraz pod odmocninou doplníme na čtverec a pak vybereme vhodnou substituci:

$$\int \sqrt{\mathbf{1} \ - \left(x^2 - 2x + \mathbf{1}\right)}\, dx = \int \sqrt{1 - (x-1)^2}\, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Podle } \mathbf{II}.\text{substituce} \\ x - 1 = \sin t, \quad dx = \cos t\, dt, \\ \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos t \cdot \cos t\, dt = \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \left| \begin{array}{l} \sin t = x - 1, \ \ t = \arcsin\,(x-1) \\ \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{2x - x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin\,(x-1) + (x-1)\sqrt{2x - x^2}\right) + C.$$

Z podmínky $2x - x^2 \geq 0$ plyne $x \in \langle 0, 2 \rangle$.

■

***Příklad* 139**. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4x^2 - 1}}\, dx$

Řešení: Substituce bude **III**. typu:

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4x^2 - 1}}\, dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{(2x)^2 - 1} \ \Rightarrow \ 2x = \dfrac{1}{\sin t}, \quad x = \dfrac{1}{2 \sin t}, \\ dx = \dfrac{-\cos t}{2 \sin^2 t}\, dt, \quad \sqrt{4x^2 - 1} = \sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 t} - 1} = \dfrac{\cos t}{\sin t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1}{4 \sin^2 t} \cdot \frac{\cos t}{\sin t}} \cdot \frac{-\cos t}{2 \sin^2 t}\, dt = -2 \int \sin t\, dt = 2 \cos t + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2\sin t},\ \sin t = \dfrac{1}{2x}, \\ \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2x}\right)^2} \end{array} \right| = 2\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}} + C = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} + C.$$

$$\text{Z podmínek } \ x \neq 0,\ 4x^2-1>0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right),\ x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right). \quad \blacksquare$$

Poznámka: Teoreticky v každém integrálu $\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx$ lze použít jak Eulerovy tak i goniometrické substituce, ale výběr výhodné substituce je závislý na konkrétním integrálu, který počítáme. Obecně můžeme psát:

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx \xrightarrow{\text{Eul. sub.}} \int R_1(t)\,dt,$$

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx \xrightarrow{\text{gon. sub.}} \int R_1(\sin t, \cos t)\,dt \xrightarrow{\operatorname{tg}\frac{t}{2}=z} \int R_2(z)\,dz.$$

- Vypočítejte integrály:

140. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ $\left[\ \frac{1}{2}\Big(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\Big) + C,\quad x \in \langle -1, 1\rangle\ \right]$

141. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$ $\left[\ -\frac{1}{6}\Big(\arcsin\frac{3}{x} + \frac{3\sqrt{x^2-9}}{x^2}\Big) + C,\quad x \in (-\infty, -3\rangle,\ x \in \langle 3, +\infty)\ \right]$

142. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+9x^2}}{x^2}\,dx$ $\left[\ -\frac{\sqrt{1+9x^2}}{x} + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+9x^2}+3x}{\sqrt{1+9x^2}-3x}\right| + C,\quad x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)\ \right]$

143. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$ $\left[\ \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right| + C,\quad x \in \langle -a, 0),\ x \in (0, a\rangle\ \right]$

144. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$ $\left[\ \frac{1}{3}(x^2+5)\sqrt{x^2+5} + C,\quad x \in \mathbb{R}\ \right]$

145. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\,dx$ $\left[\ -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{2} + C,\quad x \in \langle -2, 0),\ x \in (0, 2\rangle\ \right]$

11. Smíšené příklady

- V jednotlivých příkladech uveďte všechny způsoby vedoucí k řešení integrálů, porovnejte je a vyberte nejvhodnější z nich ke konkrétnímu výpočtu:

***Příklad* 146.** $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-2)^{10}}\,dx$

Řešení:

1) První možností je rozklad na parciální zlomky, avšak představa, že jich bude 10

$\displaystyle\left(\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{(x-2)^2}+\ldots+\frac{A_{10}}{(x-2)^{10}}\right)$ nás okamžitě odradí.

2) Druhá možnost je použít substituci $x-2=t,\ dx=dt,\ x=t+2$. Potom

$$\int \frac{x^3}{(x-2)^{10}}\,dx=\int \frac{(t+2)^3}{t^{10}}\,dt=\int \frac{t^3+6t^2+12t+8}{t^{10}}\,dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^7}+\frac{6}{t^8}+\frac{12}{t^9}+\frac{8}{t^{10}}\right)dt=\frac{-1}{6t^6}-\frac{6}{7t^7}-\frac{12}{8t^8}-\frac{8}{9t^9}+C=$$

$$=\frac{-1}{6(x-2)^6}-\frac{6}{7(x-2)^7}-\frac{3}{2(x-2)^8}-\frac{8}{9(x-2)^9}+C,$$

$$x\in(-\infty,\,2),\ x\in(2,\,+\infty).$$

■

***Příklad* 147.** $\displaystyle\int x^3\left(1-2x^2\right)^{19}dx$

Řešení:

1) Čistě teoreticky můžeme $\left(1-2x^2\right)^{19}$ rozepsat pomocí binomické věty, potom vše člen po členu vynásobit x^3 a zintegrovat.

2) Vzhledem k tomu, že máme před závorkou lichou mocninu x^3, lze použít substituci $1-2x^2=t,\ x^2=\dfrac{1-t}{2},\ 2x\,dx=-\dfrac{1}{2}\,dt,\ x\,dx=-\dfrac{1}{4}\,dt$. Potom

$$\int x^3\left(1-2x^2\right)^{19}dx=\int x^2\left(1-2x^2\right)^{19}\cdot x dx=\int \frac{1-t}{2}\cdot t^{19}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{8}\int(1-t)\,t^{19}\,dt=-\frac{1}{8}\int\left(t^{19}-t^{20}\right)dt=-\frac{1}{8}\left(\frac{t^{20}}{20}-\frac{t^{21}}{21}\right)+C=$$

$$=-\frac{1}{8}\left(\frac{\left(1-2x^2\right)^{20}}{20}-\frac{\left(1-2x^2\right)^{21}}{21}\right)+C,\qquad x\in\mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 148.** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx$

Řešení: Jediná pro nás možná substituce je $\sin x = t,\ \cos x\,dx = dt$. Potom

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C = \ln\left|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right| + C,$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 149.** $\displaystyle\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Řešení:

1) Použijeme integrační metodu per partes.

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & v' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2} & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx = \sqrt{1+x^2}\cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x - \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C, \qquad x \in \mathbb{R};$$

2) Použijeme substituci $x = \operatorname{tg} t$, potom $\operatorname{arctg} x = t,\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt$,

$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t} = \dfrac{1}{\cos t}$:

$$\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg} t \cdot t}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int t \cdot \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt =$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t} \\ u' = 1 & v = \displaystyle\int \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{\cos t} \end{array} \right| = \frac{t}{\cos t} - \int \frac{1}{\cos t}\,dt = \dots$$

První možnost byla lepší, protože integrál jsme dopočítali bez použití substituce. Ve druhém případě jsme začali substitucí, potom jsme použili metodu per partes a je zapotřebí další substituce k výpočtu integrálu $\displaystyle\int \frac{1}{\cos t}\,dt$.

■

***Příklad* 150.** $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x\,dx$

Řešení: V tomto příkladu jsou možné všechny substituce z kapitoly 7.

1) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$: $\quad \displaystyle\int \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^5 \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$

2) $\sin x = t:\qquad \displaystyle\int \frac{t^5}{\left(1-t^2\right)^3}\,dt$

3) $\cos x = t:\qquad \displaystyle -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5}\,dt$

4) $\operatorname{tg} x = t:\qquad \displaystyle\int t^5 \cdot \frac{dt}{1+t^2}$

Z praktického hlediska je nejlepší **3**. substituce. O málo horší je **4**. substituce. Integrál dopočítáme právě pomocí **3**. substituce.

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \left|\cos x = t\right| = -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t^5}\,dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^5}\,dt =$$

$$= -\int \left(\frac{1}{t^5} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{t}\right) dt = \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{t^2} - \ln|t| + C = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \ln|\cos x| + C,$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

***Příklad* 151**. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Řešení:

1) 1. Eulerova substituce:

$$\sqrt{x^2+1} = x+t \ \Rightarrow\ x^2+1 = x^2+2xt+t^2 \ \Rightarrow\ x = \frac{1-t^2}{2t},\ dx = \frac{1}{2}\,\frac{-t^2-1}{t^2}\,dt,$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^3}{\frac{1-t^2}{2t}+t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-t^2-1}{t^2}\,dt = \int \frac{\left(1-t^2\right)^3\left(-t^2-1\right)}{8t^3 \cdot \frac{1-t^2+2t^2}{2t} \cdot 2t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{\left(1-t^2\right)^3}{t^4}\,dt;$$

2) 2. Eulerova substituce:

$$\sqrt{x^2+1} = xt+1 \ \Rightarrow\ x^2+1 = x^2t^2+2xt+1 \ \Rightarrow\ x = \frac{2t}{1-t^2},\ dx = \frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt,$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^3}{\frac{2t}{1-t^2}\cdot t+1} \cdot \frac{2\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{16t^3\left(1+t^2\right)}{\left(1-t^2\right)^3 \cdot \frac{2t^2+1-t^2}{1-t^2} \cdot \left(1-t^2\right)^2}\,dt = 16\int \frac{t^3}{\left(1-t^2\right)^4}\,dt;$$

3) $x = \operatorname{tg} t,\ dx = \dfrac{1}{\cos^2 t}\,dt,\ \sqrt{x^2+1} = \dfrac{1}{\cos t},$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{\operatorname{tg}^3 t}{\dfrac{1}{\cos t}} \cdot \frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t}\,dt.$$

4) Všimneme-li si, že integrál je typu $\int f(x^2)\cdot x\,dx$, kde $f(x^2) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$,
pak se nabízí jednoduchá substituce $x^2 = t$, dokonce výhodnější bude zvolit $1 + x^2 = t,\ 2x\,dx = dt$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t-1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} - 2t^{\frac{1}{2}}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{3}\,t\sqrt{t} - \sqrt{t} + C = \sqrt{t}\left(\frac{1}{3}\,t - 1\right) + C = \sqrt{x^2+1}\cdot\left(\frac{1}{3}\left(x^2+1\right) - 1\right) + C =$$

$$= \sqrt{x^2+1}\cdot\frac{x^2-2}{3} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 152**. $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Řešení: K výpočtu tohoto integrálu lze použít čtyři odlišné postupy:

1) 2. Eulerova substituce:

$$\sqrt{1-x^2} = xt + 1 \ \Rightarrow\ 1 - x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1 \ \Rightarrow\ x = -\frac{2t}{1+t^2},\ dx = \frac{2\left(t^2-1\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt,$$

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1 - \dfrac{2t^2}{1+t^2} + 1}{1 + \dfrac{2t^2}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{2\left(t^2-1\right)}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = 2\int \frac{t^2-1}{t^2\left(1+t^2\right)^2}\,dt;$$

2) 3. Eulerova substituce:

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = (1+x)\cdot t \ \Rightarrow\ (1-x)(1+x) = (1+x)^2\,t^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1 - x = (1+x)\,t^2 \ \Rightarrow\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt,$$

$$\int \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1 + \left(1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot t}{1 - \left(1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot t} \cdot \frac{-4t}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = -4\int \frac{(1+t)^2\cdot t}{(1-t)^2\left(1+t^2\right)^2}\,dt;$$

3) Odmocninu upravíme, a tím dostaneme substituci jako v předcházejícím příkladu.

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(1-x)(1+x)}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}\cdot(1+x)^2}=(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}=t\ \Rightarrow\ \frac{1-x}{1+x}=t^2.$$

4) $\sqrt{1-x^2}=|x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt|=\cos t$

$$\int\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\cdot\cos t\,dt=\int\frac{(1+\cos t)^2\,\cos t}{(1-\cos t)(1+\cos t)}\,dt=$$

$$=\int\frac{\left(1+2\cos t+\cos^2 t\right)\cdot\cos t}{1-\cos^2 t}\,dt=\int\frac{\cos t+2\cos^2 t+\cos^3 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{\cos t+\cos^3 t}{\sin^2 t}\,dt+$$

$$+2\int\frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt=|\text{ označme zkráceně}|=\mathcal{J}_1+2\mathcal{J}_2=$$

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{J}_1=\displaystyle\int\frac{\cos t+\cos^3 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{\left(1+\cos^2 t\right)\,\cos t}{\sin^2 t}\,dt=\left|\begin{array}{l}\sin t=z\\ \cos t\,dt=dz\end{array}\right|=\\ =\displaystyle\int\frac{1+1-z^2}{z^2}\,dz=\int\left(\frac{2}{z^2}-1\right)dz=-\frac{2}{z}-z=-\frac{2}{\sin t}-\sin t,\end{array}\right|$$

$$\left|\mathcal{J}_2=\int\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\operatorname{cotg} t-t,\right|$$

$$=-\frac{2}{\sin t}-\sin t-2\operatorname{cotg} t-2t+C=\left|\sin t=x,\ \cos t=\sqrt{1-x^2},\ t=\arcsin x\right|=$$

$$=-\frac{2}{x}-x-2\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-2\arcsin x+C,$$

Z podmínek $1-x^2\geq 0,\ 1-\sqrt{1-x^2}\neq 0$ plyne $x\in\langle -1,\,0),\ x\in(0,\,1\rangle$.

■

***Příklad* 153**. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx$

Řešení: V tomto příkladu vyjmenujeme všechny pro nás použitelné substituce (provedení ponecháme čtenářům). Napíšeme výsledný integrál a pak vybereme jednu z možností k výpočtu.

1) $\sqrt{x^2+2x}=x+t$, (1. Eulerova substituce),

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2-t)^2}{(1-t)^2}\,dt;$$

2) $\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{x(x+2)}=xt$, (3. Eulerova substituce),

$$\int\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx=-4\int\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt;$$

3) $\sqrt{x^2+2x} = x\sqrt{\dfrac{x+2}{x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{\dfrac{x+2}{x}} = t,$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx = -4\int \frac{t^2}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt;$$

4) $\sqrt{x^2+2x} = \sqrt{(x+1)^2-1} \;\Rightarrow\; x+1 = \dfrac{1}{\sin t},$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\,dx = -\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} + \frac{1}{\sin t}\right) dt.$$

Jako nejjednodušší se jeví poslední integrál, proto vybereme 4. možnost k výpočtu integrálu (viz příklad **37**e)

$$\int -\frac{1}{\sin^2 t}\,dt - \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \operatorname{cotg} t - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + C =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \sin t = \dfrac{1}{x+1},\ \cos t = \sqrt{1-\dfrac{1}{(x+1)^2}} = \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} \\[2ex] \operatorname{cotg} t = \sqrt{x^2+2x},\ \operatorname{tg}\dfrac{t}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos t}{1+\cos t}} = \sqrt{\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x}}{x+1+\sqrt{x^2+2x}}} \end{array} \right| =$$

$$= \sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x}}{x+1+\sqrt{x^2+2x}}\right| + C, \qquad x \in (-\infty,\,-2\rangle,\ x \in (0,\,+\infty).$$

■

Příklad **154**. $\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx$

Řešení: Příklad se dá spočítat použitím příkladu **29c),** kde $a=1, n=2$.

Ukážeme i další možnost, a sice substituci $x = \operatorname{tg} t$, pak

$$x^2+1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t},\ dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt.$$

Potom

$$\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\,dx = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)+C = \frac{1}{2}\left(t+\sin t\,\cos t\right)+C = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg} t = x, & t = \operatorname{arctg} x \\ \sin t = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 155.** $\displaystyle\int \frac{3x^2+14x}{\big(x^2+2x+2\big)\big(x^2+4x+8\big)}\,dx$

Řešení: Provedeme rozklad na parciální zlomky:

$$\frac{3x^2+14x}{\big(x^2+2x+2\big)\big(x^2+4x+8\big)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+8},$$

$$3x^2+14x = \big(Ax+B\big)\big(x^2+4x+8\big) + \big(Cx+D\big)\big(x^2+2x+2\big).$$

Konstanty A, B, C a D určíme porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x :

$$\left.\begin{array}{lcrcrcrcrcr} x^3 & \Rightarrow & 0 = & A & & & + & C & & \\ x^2 & \Rightarrow & 3 = & 4A & + & B & + & 2C & + & D \\ x^1 & \Rightarrow & 14 = & 8A & + & 4B & + & 2C & + & 2D \\ x^0 & \Rightarrow & 0 = & & & 8B & & & + & 2D \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} A=3, & B=1, \\ C=-3 & D=-4 \end{array}$$

Nyní dopočítáme daný integrál (viz kapitolu 5):

$$\int \frac{3x^2+14x}{\big(x^2+2x+2\big)\big(x^2+4x+8\big)}\,dx = \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\,dx - \int \frac{3x+4}{x^2+4x+8}\,dx =$$

$$= \frac{3}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2\,x+\ 2}}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{1-\mathbf{3}}{(x+1)^2+1}\,dx - \frac{3}{\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2\,x+\ 4}}{x^2+4x+8}\,dx + \int \frac{-4+\mathbf{6}}{(x+2)^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2+2x+2| - 2\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{3}{2}\ln|x^2+4x+8| + 2\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C, \quad x \in R.$$

■

***Příklad* 156.** $\displaystyle\int \frac{\big(x^2+3\big)\,x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$

Řešení: Okamžitě je vidět, že lze použít substituci $x^2=t,\ 2x\,dx=dt$.

$$\int \frac{\big(x^2+3\big)\,x}{\sqrt{x^4-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{t+3}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \left|\begin{array}{l}\text{Integrál vypočítáme přímo, viz kapitolu 5,}\\ \text{ostatní substituce jsou pracné.}\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\cdot\mathbf{2}}\int \frac{\mathbf{2t}}{\sqrt{t^2-1}}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \frac{1}{4}\cdot 2\sqrt{t^2-1} + \frac{3}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^4-1} + \frac{3}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4-1}\right| + C, \qquad x \in (-\infty,\,-1),\ x \in (1,\,+\infty).$$

■

***Příklad* 157.** $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-6e^x+18}\,dx$

Řešení: Použijeme substituci $\mathrm{e}^x = t,\ \mathrm{e}^x\,dx = dt$. Potom

$$\int \frac{2\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-6e^x+18}\,dx = \int \frac{2\ dt}{t^2-6t+18} = 2\int \frac{1}{(t-3)^2+9}\,dt = 2\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t-3}{3} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{e}^x-3}{3} + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 158.** $\displaystyle\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,dx$

Řešení: Použijeme substituci $\ln x = t \;\Rightarrow\; x = \mathrm{e}^t,\; dx = \mathrm{e}^t\,dt$:

$$\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}\,dx = \int \frac{t-1}{t^2}\cdot \mathrm{e}^t\,dt = \int \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt - \int \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,dt = \left| \begin{array}{l} \text{První integrál nelze spočítat,} \\ \text{ve druhém použijeme per partes.} \end{array} \right| =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \mathrm{e}^t & v' = \frac{1}{t^2} \\ u' = \mathrm{e}^t & v = -\frac{1}{t} \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt - \left(-\frac{\mathrm{e}^t}{t} + \int \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt \right) + C = \frac{\mathrm{e}^t}{t} + C = \frac{x}{\ln x} + C,$$

$$x \in (0,\,1),\; x \in (1,\,+\infty).$$

■

- Vypočítejte integrály:

159. $\displaystyle\int \frac{2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x}\,dx$ (Návod: vyjádřete $\sin 2x$ a $\cos 2x$ pomocí jednoho x a napište integrál jako součet dvou integrálů, z nichž jeden se bude počítat metodou per partes a druhý přímo.)

$\left[x \operatorname{tg} x + C,\; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\, \frac{\pi}{2} + k\pi \right) \right]$

160. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}$ (Návod: $1 + \cos x = t^2$)

$\left[\frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left| \frac{\sqrt{1+\cos x} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{2}} \right| + C,\; x \in \big(k\pi, (k+1)\pi\big),\; k \in \mathbb{Z} \right]$

161. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}$

$\left[-\frac{1}{2x^2}\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln\left| \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{x} \right| + C,\; x \in (-\infty,\, 0),\; x \in (0,\, +\infty) \right]$

162. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x-1}}$

$\left[\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C,\; x \in (1,\, +\infty) \right]$

163. $\displaystyle\int \frac{dx}{x \sqrt{4 - \ln x}}$

$\left[-2\sqrt{4 - \ln x} + C,\; x \in (0,\, \mathrm{e}^4) \right]$

164. $\displaystyle\int \frac{4x+1}{2x^3 + x^2 - x}\,dx$

$\left[\ln \frac{(2x-1)^2}{|x^2+x|} + C,\; x \in (-\infty,\, -1),\; x \in (-1,\, 0),\; x \in \left(0,\, \frac{1}{2}\right),\; x \in \left(\frac{1}{2},\, +\infty\right) \right]$

165. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3 - x^2}\,dx$

$\left[x + \frac{1}{x} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|} + C,\; x \in (-\infty,\, 0),\; x \in (0,\, 1),\; x \in (1,\, +\infty) \right]$

166. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1 - x^4}\,dx$

$\left[\frac{1}{4} \ln\left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C,\; x \in (-\infty,\, -1),\; x \in (-1,\, 1),\; x \in (1,\, +\infty) \right]$

167. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^4 - 1}$

$\left[\frac{1}{4} \ln\left| \frac{x^2-1}{x^2+1} \right| + C,\; x \in (-\infty,\, -1),\; x \in (-1,\, 1),\; x \in (1,\, +\infty) \right]$

168. $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}\,dx$

$\left[-\frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} + C,\; x \in \big(k\pi,\, (k+1)\pi\big),\; k \in \mathbb{Z} \right]$

169. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

$\left[3\sqrt{x^2+2} - \ln|x + \sqrt{x^2+2}| + C,\; x \in \mathbb{R} \right]$

170. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$\left[-\sqrt{4-x^2} - \arcsin \frac{x}{2} + C,\; x \in (-2,\, 2) \right]$

171. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ $\left[\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C,\quad x \in \mathbb{R}\ \right]$

172. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ $\left[\ \dfrac{1}{\cos x} + \cos x + C,\quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}\ \right]$

173. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\left(x^2-2x\right)\sqrt{x^2-2x}}\, dx$ $\left[\ -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}} + C,\quad x \in (-\infty,\ 0),\ x \in (2,\ +\infty)\ \right]$

174. $\displaystyle\int \sqrt{16-9x^2}\, dx$ $\left[\ \dfrac{8}{3} \arcsin \dfrac{3x}{4} + \dfrac{x}{2}\sqrt{16-9x^2} + C,\quad x \in \left\langle -\frac{4}{3},\ \frac{4}{3} \right\rangle\ \right]$

175. $\displaystyle\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx$ $\left[\ 2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - x + C,\quad x \in (-\pi + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\ \right]$

176. $\displaystyle\int \left(\sin x\ \cos^2 x + 2\sin^2 x\ \cos x\right) dx$ $\left[\ -\dfrac{\cos^3 x}{3} + \dfrac{2}{3}\sin^3 x + C,\quad x \in \mathbb{R}\ \right]$

12. Řešení diferenciálních rovnic separací proměnných

Diferenciální rovnicí se **separovatelnými proměnnými** nazýváme rovnici typu $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, *kde* $f_1(x)$ *je spojitá funkce na intervalu* I_1 *a* $f_2(y)$ *a* $f_2'(y)$ *jsou spojité funkce na intervalu* I_2. *Jestliže v bodě* $y_1 \in I_2$ *je* $f_2(y_1) = 0$, *pak funkce* $y(x) = y_1$ *je konstantním řešením dané rovnice.*

Předpokládejme, že je $f_2(y) \neq 0$ pro všechna y na podintervalech I_{2_i} intervalu I_2, potom každým bodem $[x_0,\, y_0] \in I_1 \times I_{2_i}$ prochází právě jedna maximální integrální křivka nebo jedno maximální řešení dané diferenciální rovnice. Bod $[x_0,\, y_0]$ se nazývá **počáteční bod**, resp. $y(x_0) = y_0$ se nazývá **počáteční podmínkou**. Úloha určit řešení dané rovnice splňující počáteční podmínku se nazývá **Cauchyovou úlohou**.

***Příklad* 177**. Najděte řešení diferenciálních rovnic separací proměnných a stanovte obory existence řešení:

a) $x\,y' + y^2 = y$; **b)** $y' \operatorname{tg} x = y + 3$;

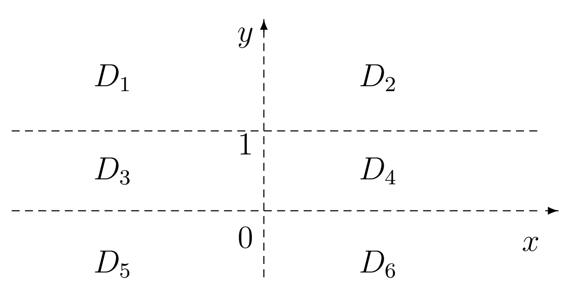
c) $y' = 3^{2x+y}$; **d)** $x\,y\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

Řešení: Ve všech příkladech upravíme rovnici na tzv. normální tvar $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, zjistíme obory spojitosti funkcí $f_1(x)$, $f_2(y)$ a $f_2'(y)$, z podmínky $f_2(y) = 0$ určíme konstantní řešení (pokud existuje), pak provedeme separaci proměnných s podmínkou $f_2(y) \neq 0$ a nakonec zintegrujeme obě části rovnice.

a) $x\,y' + y^2 = y \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{x} \cdot \left(y - y^2\right)$, kde $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(y) = y - y^2$, $f_2'(y) = 1 - 2y$ jsou spojité pro všechna $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$.

Z $f_2(y) = y - y^2 = y(1-y) = 0$ dostáváme dvě konstantní řešení $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Dále za předpokladu, že $x \neq 0$, $y \neq 0$ a $y \neq 1$, načrtneme obory existence řešení:



Nyní provedeme separaci a integraci:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left(y - y^2\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y - y^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1 \boldsymbol{- y + y}}{y(1-y)}\,dy = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}\right) dy = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| - \ln|y-1| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{y-1}\right| = \ln C\,|x| \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{y-1}\right| = C\,|x|.$$

Po vynechání absolutních hodnot, mohou nastat tyto dva případy: $\dfrac{y}{y-1} = C\,x$ nebo $\dfrac{y}{y-1} = -C\,x$. Napíšeme je společně $\dfrac{y}{y-1} = \pm\,C\,x$ a upravíme:

$$y = \pm\,C\,x\,(y-1) \quad \Rightarrow \quad y = \pm\,C\,x\,y \mp\,C\,x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \pm\,C\,x = \pm\,C\,x\,y - y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\pm\,C\,x}{\pm\,C\,x-1}.$$

Označíme-li nyní $C = \pm K$, $K \neq 0$, pak $\quad y = \dfrac{K\,x}{K\,x-1}$, kde $K\,x \neq 1$.

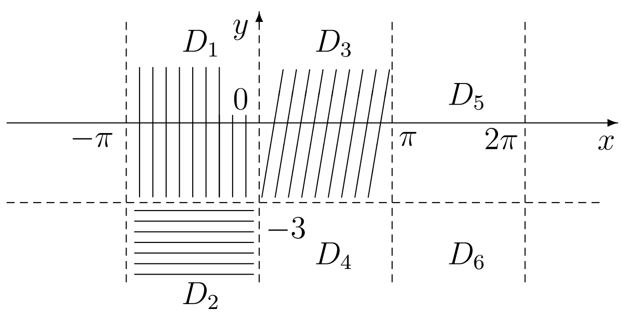
Poznámka: V dalších příkladech po odlogaritmování ponecháme konstantu C s jediným předpokladem $C \neq 0$.

b) $y'\,\mathrm{tg}\,x = y+3 \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{y+3}{\mathrm{tg}\,x} \quad \Rightarrow \quad y' = \mathrm{cotg}\,x \cdot (y+3) \quad \Rightarrow$

$x \in \big(k\pi,\ (k+1)\pi\big)$ a $y \in \mathbb{R}$.

Konstantní řešení je $y_1 = -3$.

Je-li $y \neq -3$, pak obory existence řešení jsou:



$D_1 = \{[x,\,y] \in \mathbb{E}_2 : -\pi < x < 0,\ y > -3\}$,

$D_2 = \{[x,\,y] \in \mathbb{E}_2 : -\pi < x < 0,\ y < -3\}$,

$D_3 = \{[x,\,y] \in \mathbb{E}_2 : 0 < x < \pi,\ y > -3\}$, ...

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{cotg}\,x \cdot (y+3) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y+3} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx \quad \Rightarrow$$

$\ln|y+3| = \ln|\sin x| + \ln C, \quad C > 0$ (viz úpravu předcházejícího příkladu) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y+3 = C\sin x \quad \Rightarrow \quad y = C\sin x - 3.$$

c) $y' = 3^{2x+y} \quad \Rightarrow \quad y' = 3^{2x}\cdot 3^y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 9^x \cdot 3^y$.

V tomto příkladě konstantní řešení neexistuje a obor existence řešení je $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

$$\frac{dy}{3^y} = 9^x dx \quad \Rightarrow \quad \int 3^{-y}\,dy = \int 9^x\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{3^{-y}}{\ln 3} = \frac{9^x}{\ln 9} + C \quad \Rightarrow$$

$$-\frac{3^{-y}}{\ln 3} = \frac{9^x}{2\ln 3} + C \quad \Rightarrow -2\cdot 3^{-y} = 9^x + 2C\ln 3 \quad \Rightarrow \quad 3^{-y} = -\frac{1}{2}\,9^x - C\ln 3 \quad \Rightarrow$$

označme $-C\cdot\ln 3 = K$. pak $3^{-y} = -\dfrac{1}{2}\,9^x + K \quad \Rightarrow \quad -y = \log_3\Big(K - \dfrac{1}{2}\,9^x\Big) \quad \Rightarrow$

$$y = \log_3 \frac{1}{K - \frac{1}{2}\,9^x}, \quad K - \frac{1}{2}\,9^x > 0.$$

d) $x\,y\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\,dy = -xy\,dy \quad \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot y \quad \Rightarrow \quad x \in (-1,\,1)$$

Konstantní řešení je $y_1 = 0$.

Dále předpokládáme, že $y \neq 0$. Pak obory existence řešení jsou:

$[x,\,y] \in (-1,\,1)\times(-\infty,\,0) = D_1$ a $[x,\,y] \in (-1,\,1)\times(0,\,+\infty) = D_2$.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int \frac{\boldsymbol{-\,2\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| = \sqrt{1-x^2} + \ln C,\; C > 0 \;\Rightarrow$$

$y = C\,\mathrm{e}^{\sqrt{1-x^2}}$, kde platí $C > 0$ pro řešení v D_2 a $C < 0$ pro řešení v D_1. ■

- Řešte Cauchyovy úlohy:

***Příklad* 178**. $y' = y^2\sin 2x, \quad y\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = -4$

Řešení: Funkce $f_1(x) = \sin 2x$, $f_2(y) = y^2$, $f_2'(y) = 2y$ jsou spojité pro $[x,\,y] \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Konstantní řešení diferenciální rovnice je $y_1 = 0$.

Pro $y \neq 0$ provedeme separaci:

$$\frac{dy}{y^2} = \sin 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int \sin 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{\cos 2x + C}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{\cos 2x + C}.$$

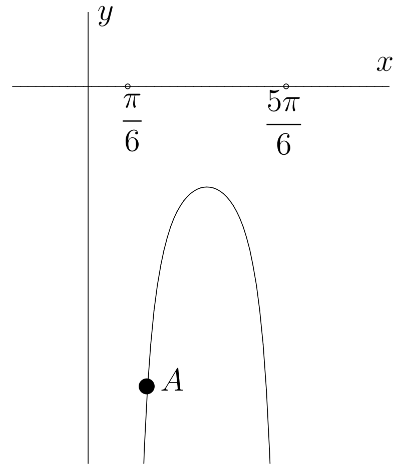
Nyní použijeme počáteční podmínku $y\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big) = -4$ nebo též bod $A = \Big[\dfrac{\pi}{4},\,-4\Big]$,

kterým musí procházet hledaná integrální křivka:

$$-4 = \frac{2}{\cos\frac{\pi}{2} + C} \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{\cos 2x - \frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{2\cos 2x - 1}.$$

Z podmínky $2\cos 2x - 1 \neq 0$ zpřesníme interval existence :

$$\cos 2x \neq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x \neq \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$$



Dostali jsme $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$, protože $\frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

Maximální řešení je $\quad y = \dfrac{4}{2\cos 2x - 1}, \quad x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$.

■

***Příklad* 179**. $y' = \dfrac{x\left(y^2-4\right)}{y\left(x^2-9\right)}, \quad y(0) = -1.$

Řešení: Funkce $y_1 = -2$ a $y_2 = 2$ jsou konstantní řešení diferenciální rovnice. Obecné řešení existuje pro $x \neq \pm 3,\ y \neq 0,\ y \neq \pm 2$.

Vyřešíme rovnici a pak z počáteční podmínky najdeme konstantu C a upřesníme obor existence maximálního řešení:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2-9} \cdot \frac{y^2-4}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{y^2-4}\,dy = \frac{x}{x^2-9}\,dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-4}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-9}\,dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|y^2-4| = \frac{1}{2}\ln|x^2-9| + \frac{1}{2}\ln C, \quad C > 0$$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 4 = C\left(x^2-9\right) \quad \Rightarrow \; y^2 = 4 + C\left(x^2-9\right) \quad \Rightarrow$$

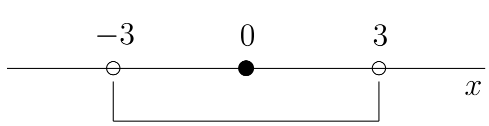
$$y = \pm\sqrt{4 + C\left(x^2-9\right)}.$$

Z počáteční podmínky $y(0) = -1$ je jasné, že před odmocninou vybereme znaménko minus:

$$y = -\sqrt{4 + C\left(x^2-9\right)} \quad \Rightarrow \quad -1 = -\sqrt{4 - 9\,C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{3},$$

$$y = -\sqrt{4 + \frac{1}{3}\left(x^2-9\right)} \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}.$$

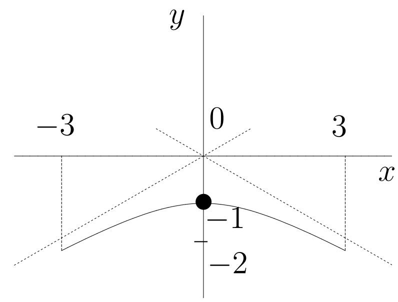
Interval existence maximálního řešení Cauchyovy úlohy je $x \in (-3,\,3)$ a oblast existence tohoto řešení je $G = (-3,\,3) \times (-2,\,0)$.



Řešením je známá křivka:

$$y^2 = 1 + \frac{x^2}{3} \quad \Rightarrow \quad y^2 - \frac{x^2}{3} = 1.$$

Jde o část dolní větve hyperboly, která prochází bodem $A = [0,\, -1]$.



$\blacksquare$

***Příklad* 180**. $y' x \ln x = y$, **a)** $y(\mathrm{e}) = 2$; **b)** $y\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -3$.

Řešení:

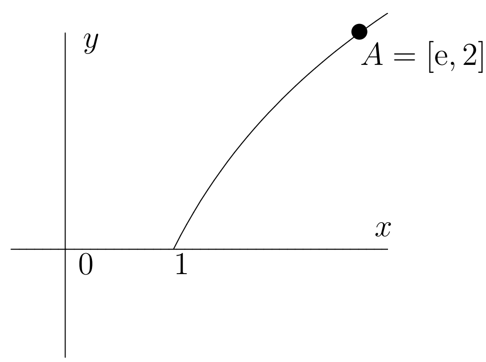
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x \ln x} \quad \Rightarrow \quad x > 0,\ x \neq 1.$$

Konstantní řešení je $y_1 = 0$. Pro $y \neq 0$:

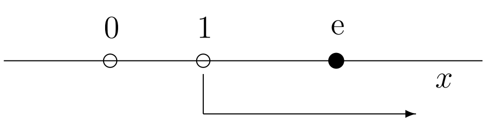
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x} \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\ln x| + \ln C, \quad C > 0 \quad \Rightarrow \quad y = C \ln x.$$

a) $y(\mathrm{e}) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = C \ln \mathrm{e} \quad \Rightarrow \quad C = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \ln x.$

Graf maximálního řešení Cauchyovy úlohy:



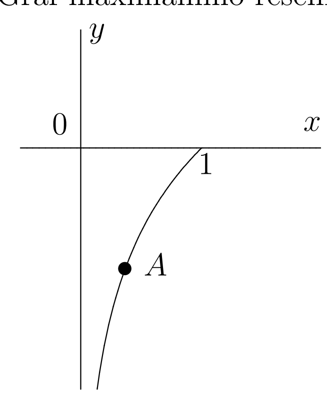
Interval existence Cauchyovy úlohy je $I = (1,\, +\infty)$.



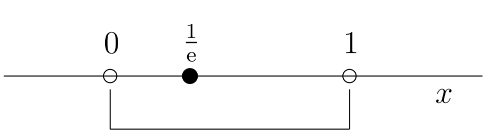
<u>Závěr:</u> Maximální řešení Cauchyovy úlohy: $y = 2 \ln x, \quad x \in (1,\, +\infty)$.
Oblast existence Cauchyovy úlohy: $G = (1,\, +\infty) \times (0,\, +\infty)$.

b) $y\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -3 \quad \Rightarrow \quad -3 = C \ln \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad C = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \ln x.$

Graf maximálního řešení Cauchyovy úlohy:



Interval existence Cauchyovy úlohy je $I = (0,\, 1)$.



<u>Závěr:</u> Maximální řešení Cauchyovy úlohy: $y = 3\ln x,\ x \in (0,\, 1)$.
Oblast existence Cauchyovy úlohy: $G = (0,\, 1) \times (-\infty,\, 0)$.

$\blacksquare$

***Příklad* 181**. $y' = \dfrac{xy^2 + x}{y - x^2 y}$, **a)** $y(-2) = -1$; **b)** $y(0) = 1$.

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y^2+1)}{y(1-x^2)} \quad \Rightarrow \quad y \neq 0,\ x \neq \pm 1$$

Konstantní řešení neexistuje.

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{2}\ y}{y^2+1}\, dy = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \int \frac{\mathbf{-2}\ x}{1-x^2}\, dx \ \Rightarrow\ \frac{1}{2} \ln|y^2+1| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \frac{1}{2}\ln C,\ C > 0,$$

$$y^2 + 1 = \frac{C}{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{C}{1-x^2} - 1}.$$

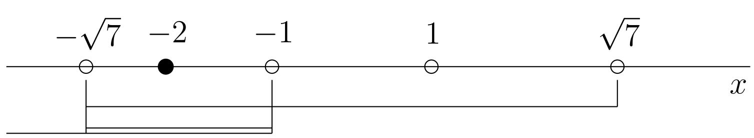
Nyní použijeme počáteční podmínky:

a) $y(-2) = -1 < 0 \quad \Rightarrow\ y = -\sqrt{\dfrac{C}{1-x^2} - 1},\ -1 = -\sqrt{\dfrac{C}{-3} - 1} \quad \Rightarrow \quad C = -6,$

$$y = -\sqrt{\frac{-6}{1-x^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{\frac{7-x^2}{x^2-1}}$$

$$y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{7-x^2}{x^2-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pro}\ \ x = -2 \in (-\infty,\, -1)\ \text{je}\ x^2 - 1 > 0\ \Rightarrow$$

$7 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| < \sqrt{7}$ a nyní vše znázorníme na ose x:



Maximální řešení Cauchyovy úlohy je $y = -\sqrt{\dfrac{7-x^2}{x^2-1}}, \quad x \in (-\sqrt{7},\, -1)$.

b) $y(0) = 1 > 0 \quad \Rightarrow\ y = +\sqrt{\dfrac{C}{1-x^2} - 1},\ 1 = \sqrt{C-1} \quad \Rightarrow \quad C = 2,$

$$y = \sqrt{\frac{2}{1-x^2} - 1} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in (-1,\, 1)$$

Maximální řešení Cauchyovy úlohy je $y = \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}, \quad x \in (-1,\, 1)$.

$\blacksquare$

***Příklad* 182.** $y' = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}, \quad y(0) = 0$

Řešení: Tato rovnice jako všechny rovnice typu $y' = f(x)$ nemá konstantní řešení.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \quad \Rightarrow \quad x \neq -1,\ x \neq 2.$$

$$y = \int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \frac{x^2 - x - 2 + 3}{x^2 - x - 2}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{(x-2)(x+1)}\right) dx =$$

$$\left|\ \frac{3}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\ \right| = \int \left(1 + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) dx =$$

$$= x + \ln|x-2| - \ln|x+1| + C,$$

$$y = x + \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C,$$

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \ln 2 + C \quad \Rightarrow \quad C = -\ln 2,$$

Maximální řešení Cauchyovy úlohy je $y = x + \ln\left|\dfrac{x-2}{x+1}\right| - \ln 2, \quad x \in (-1,\ 2).$

■

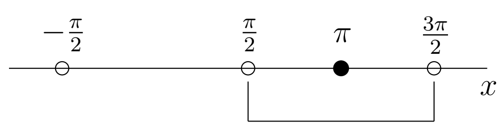
***Příklad* 183.** $y' = \cos^2 x - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad y(\pi) = 0$

Řešení: $\cos x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,$

$$y = \int \left(\cos^2 x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}\right) dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx + \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{\cos x} + C,$$

$$y(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{\pi}{2} + 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\pi}{2} - 1,$$



Maximální řešení Cauchyovy úlohy:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) - \frac{1}{\cos x} - \frac{\pi}{2} - 1, \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

■

***Příklad* 184.** Určete křivku procházející bodem $A = [2, 5]$, jestliže směrnice tečny v libovolném bodě křivky je rovna čtyřnásobku podílu x-ové a y-ové souřadnice bodu dotyku.

Řešení: Víme, že směrnice tečny ke křivce v libovolném bodě je rovna hodnotě derivace v tomto bodě. Podle zadání $y' = k_t = 4\,\dfrac{x}{y}$. Dostali jsme velmi jednoduchou diferenciální rovnici, kterou snadno vyřešíme:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,\frac{x}{y},\ y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \int y\,dy = 4\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = 2x^2 + \frac{C}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 4x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4x^2 + C}.$$

Nyní použijeme bod $A = [2, 5] \quad \Longrightarrow \quad y(2) = 5$.

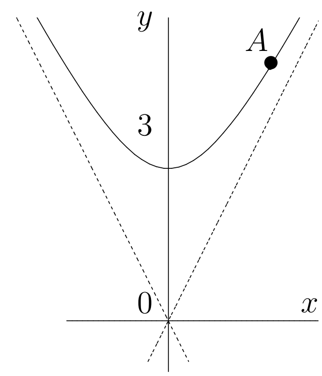
Jelikož je $y_A = 5 > 0$, pak $y = +\sqrt{4x^2 + C} \quad \Rightarrow \quad 5 = \sqrt{16 + C} \quad \Rightarrow \quad C = 9$.

Maximální řešení je $y = +\sqrt{4x^2 + 9}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$.

Tento vztah upravíme a nakreslíme graf řešení:
$y = \sqrt{4x^2 + 9} \ \Rightarrow\ y^2 = 4x^2 + 9 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad y^2 - 4x^2 = 9 \ \Rightarrow\ \frac{y^2}{9} - \frac{4x^2}{9} = 1.$$

Obdrželi jsme horní větev hyperboly.



■

***Příklad* 185.** Rychlost ochlazování libovolného tělesa na vzduchu je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a teploty vzduchu. Řešte tuto úlohu: je-li teplota vzduchu 20°C a těleso se za 20 minut ochladilo ze 100°C na 60°C, za jak dlouho se těleso ochladí na 30°C?

Řešení: Označme teplotu tělesa v závislosti na čase $y(t)$. Rychlost změny teploty bude $\dfrac{dy}{dt}$ a podle úlohy sestavíme diferenciální rovnici:

$$\frac{dy}{dt} = k(y - 20), \quad \text{kde } k \text{ je konstanta úměrnosti a 20 je teplota vzduchu.}$$

Rovnici vyřešíme obecně:

$$\frac{dy}{y - 20} = k\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y - 20} = k\int dt \quad \Rightarrow \quad \ln|y - 20| = kt + \ln C,\ C > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y - 20 = C\,\mathrm{e}^{kt} \quad \Rightarrow \quad y(t) = 20 + C\,\mathrm{e}^{kt}.$$

Nyní použijeme dané podmínky:

1) $t_0 = 0\,\text{minut} \quad \Rightarrow \quad y_0 = 100^{\circ}\text{C}$,
2) $t_1 = 20\,\text{minut} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 60^{\circ}\text{C}$,
3) $t_2 =? \quad \Rightarrow \quad y_2 = 30^{\circ}\text{C}$.

Dosazením prvních dvou vztahů určíme konstanty k a C:

1) $100 = 20 + C \quad \Rightarrow \quad C = 80$,

2) $60 = 20 + 80\,\mathrm{e}^{20k} \quad \Rightarrow \quad 80e^{20k} = 40 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{20k} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 20k = -\ln 2 \quad \Rightarrow$

$k = -\dfrac{\ln 2}{20}$. Tím jsme dostali teplotu y jako funkci času t : $\quad y(t) = 20 + 80\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{20}\,t}$.

Zbývá dopočítat, za jak dlouho bude teplota 30°C.

3) $\quad 30 = 20 + 80\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{20}\,t} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{20}\,t} = \dfrac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{\ln 2}{20}\,t = -\ln 8 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{\ln 8}{\ln 2} \cdot 20 = \frac{3\ln 2}{\ln 2} \cdot 20 \quad \Rightarrow \quad t_2 = 3 \cdot 20 = 60\,\text{minut}.$$

Těleso se ochladí na 30°C za 1 hodinu.

■

***Příklad* 186**. Motorová loď se pohybuje v klidné vodě rychlostí 10 km/h. V plné rychlosti byl vypnut motor. Za 20 sekund rychlost lodi klesla na 6 km/h. Vypočítejte její rychlost za 2 minuty po vypnutí motoru, víte-li, že odpor vody je přímo úměrný rychlosti lodi.

Řešení: Označíme rychlost v a čas t, pak $\dfrac{dv}{dt} = k\,v$, kde k je konstanta úměrnosti.

Rovnici vyřešíme:

$$\frac{dv}{v} = k\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = k\,t + \ln C,\ C > 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = C\,\mathrm{e}^{kt}.$$

Nyní zapíšeme a použijeme počáteční podmínky:

1) $\quad t_0 = 0\,\text{hodin} \quad \Rightarrow \quad v_0 = 10\,\text{km/h},$

2) $\quad t_1 = 20\,\text{sekund} = \dfrac{20}{3600}\,\text{hodin} = \dfrac{1}{180}\,\text{hodiny} \quad \Rightarrow \quad v_1 = 6\,\text{km/h},$

3) $\quad t_2 = 2\,\text{minuty} = \dfrac{1}{30}\,\text{hodin} \quad \Rightarrow \quad v_2 = ?$

Dosadíme a dokončíme:

1) $\quad 10 = C\,\mathrm{e}^0 \quad \Rightarrow \quad C = 10,$

2) $\quad 6 = 10\,\mathrm{e}^{k\cdot\frac{1}{180}} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{k}{180} = \ln\dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad k = 180 \cdot \ln\dfrac{3}{5} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow v(t) = 10\,\mathrm{e}^{180\cdot t\cdot\ln\frac{3}{5}},\ \text{kde}\ \ln\frac{3}{5} = -\ln\frac{5}{3} < 0,$$

3) $\quad v_2 = v\left(\dfrac{1}{30}\right) = 10 \cdot \mathrm{e}^{180\cdot\frac{1}{30}\cdot\ln\frac{3}{5}} = 10\,\mathrm{e}^{6\,\ln\frac{3}{5}} = 10 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^6 = \dfrac{10 \cdot 729}{15625} = 0{,}466$ km/h.

Za 2 minuty po vypnutí motoru se loď pohybuje rychlostí 0,466 km/h.

■

***Příklad* 187**. Určete funkci f a nčrtněte její graf, je-li dána směrnice k tečny ke grafu funkce f a bod A, kterým graf funkce f prochází:

a) $k = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}},\ A = [4, 6]$; $\qquad$ **b)** $k = \dfrac{1}{4x^2+1},\ A = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right]$;

c) $k = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}},\ A = [0, 2]$.

Řešení: Označme $y = f(x)$, pak $k = f'(x) = y'$.

a) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} \quad \Rightarrow \quad y = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \sqrt{x^2+9} + C.$

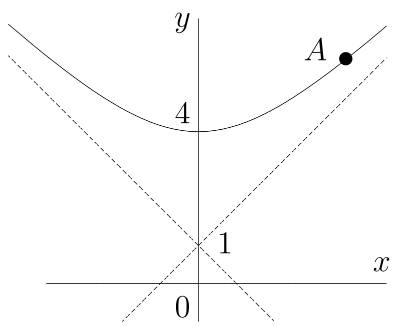
Obecné řešení je $y(x) = \sqrt{x^2+9} + C$.

Konstantu C určíme z podmínky $A = [4,6] \quad \longrightarrow \quad y(4) = 6:$

$6 = \sqrt{16+9} + C \quad \Rightarrow \quad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2+9} + 1,\ x \in \mathbb{R}.$

Řešení upravíme a určíme o jakou křivku se jedná:

$y - 1 = \sqrt{x^2+9} \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 = x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2 - x^2 = 9.$



Obdrželi jsme rovnici rovnoosé hyperboly se středem v bodě $S = [0,1]$ a s ohnisky na ose y. Grafem řešení $y = \sqrt{x^2+9} + 1$ je horní větev hyperboly.

b) $y' = \dfrac{1}{4x^2+1} \quad \Rightarrow \quad y = \displaystyle\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{(2x)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C.$

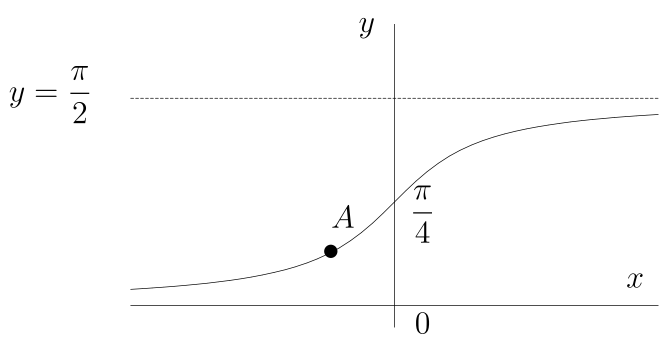
Obecné řešení je $y(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$.

Z bodu $A = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\pi}{8}\right] \quad \Rightarrow \quad y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{8}$ spočítáme C:

$\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(-1) + C \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad C = \dfrac{\pi}{4}.$

Maximální řešení Cauchyovy úlohy je $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + \dfrac{\pi}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Graf maximálního řešení:



c) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}} \quad \Rightarrow \quad y = \displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = -\sqrt{9-x^2} + C$

s podmínkou existence řešení $x \in (-3, 3)$.

Obecné řešení je $y(x) = -\sqrt{9-x^2} + C$.

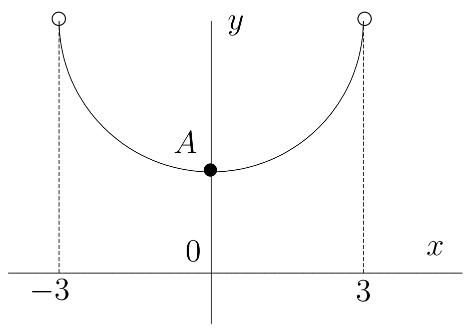
$A = [0,2] \quad \Longrightarrow \quad y(0) = 2: \quad 2 = -\sqrt{9} + C \ \Rightarrow \ C = 5.$

Hledaná funkce je $y(x) = -\sqrt{9 - x^2} + 5,\ x \in (-3,\, 3)$.

Určíme o jakou křivku jde a načrtneme její graf:

$$y - 5 = -\sqrt{9 - x^2} \quad \Rightarrow \quad (y-5)^2 = 9 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-5)^2 = 9.$$

Dostali jsme rovnici kružnice se středem $S = [0, 5]$ a poloměrem $r = 3$. Grafem maximálního řešení je dolní polovina kružnice.



■

- Najděte řešení diferenciálních rovnic se separovatelnými proměnnými a stanovte jejich intervaly existence:

188. $x^2 y' - y + 10 = 0$ $\left[\begin{array}{l}\text{konstantní řešení je } y = 10,\\ y = 10 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}},\ x \in (-\infty, 0),\ x \in (0, +\infty)\end{array}\right]$

189. $y^2 y' = 1 - 4x$ $\left[y = \sqrt[3]{3x - 6x^2 + C},\ x \in \mathbb{R}\right]$

190. $\sqrt{1 - y^2}\, dx - \sqrt{2 + x^2}\, dy = 0$ $\left[\begin{array}{l}\text{konstantní řešení: } y = 1 \text{ a } y = -1,\\ y = \sin\bigl(\ln|x + \sqrt{2 + x^2}| + C\bigr),\ x \in \mathbb{R}\end{array}\right]$

- Řešte Cauchyovy úlohy:

191. $\bigl(y^2 + 1\bigr)\, dx + \bigl(x^2 - 2x\bigr) y\, dy = 0,\ y(1) = -2$ $\left[y = -\sqrt{\dfrac{2 - 6x}{x - 2}},\ x \in \left\langle \frac{1}{3}, 2\right)\right]$

192. $y' = y^2 \operatorname{tg} x,\ y(\pi) = -\dfrac{1}{3}$ $\left[y = \dfrac{1}{\ln|\cos x| - 3},\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right]$

193. $y' = y \cdot \dfrac{x + 2}{x^2 + 4x + 7},\ y(0) = 7$ $\left[y = \sqrt{7\bigl(x^2 + 4x + 7\bigr)},\ x \in \mathbb{R}\right]$

194. $\sqrt{x^2 - 9}\, y' = y + 2,\ y(5) = 16$ $\left[y = 2\Bigl(x + \sqrt{x^2 - 9}\Bigr) - 2,\ x \in (3, +\infty)\right]$

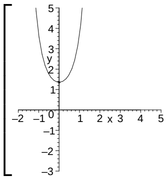
195. $y' = \dfrac{y^2}{x^2\bigl(1 + x^2\bigr)},\ y(1) = \dfrac{4}{\pi}$ $\left[y = \dfrac{x}{1 + x \operatorname{arctg} x - x},\ x \in (0, +\infty)\right]$

196. $y' = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x,\ y\Bigl(\dfrac{\pi}{4}\Bigr) = 0$ $\left[y = \ln\bigl(\operatorname{tg} x\bigr),\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$

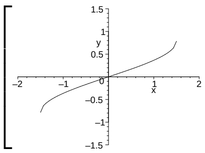
197. $y' = x\sqrt{4 - x^2},\ y(0) = -3$ $\left[y = -\frac{1}{3}\Bigl(\bigl(4 - x^2\bigr)\sqrt{4 - x^2} + 1\Bigr),\ x \in \langle -2, 2\rangle\right]$

- Určete funkci f a načrtněte její graf, jestliže graf funkce má v libovolném bodě danou směrnici k a prochází daným bodem A:

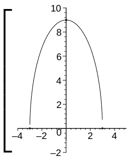
198. $k = x\,\mathrm{e}^{x^2+1},\ A = [0, \mathrm{e}/2]$

[ $y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x^2+1},\ x \in \mathbb{R}$]

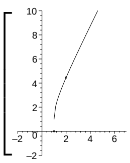
199. $k = \dfrac{1}{\sqrt{9-4x^2}},\ A = [0, 0]$

[ $y = \dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{2x}{3},$ $x \in \left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$]

200. $k = \dfrac{-3x}{\sqrt{9-x^2}},\ A = [0, 9]$

[ $y = 3\sqrt{9-x^2},$ $x \in (-3, 3)$]

201. $k = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}},\ A = [2,\ 2\sqrt{3}+1]$

[ $y = 1 + 2\sqrt{x^2-1},$ $x \in (1, +\infty)$]

13. Ukázky písemných testů

1. TEST

1. Určete matici $\boldsymbol{X}$ splňující maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -18 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Je-li dána funkce $y = 2x + \dfrac{1}{x}$, určete:
   a) definiční obor a limity v krajních bodech definičního oboru;
   b) intervaly ryzí monotónnosti;
   c) lokální extrémy funkce $f(x)$.

3. Vypočítejte integrál

$$\int \left(\cos^2 x + \sin^3 x \, \cos x\right) dx.$$

4. a) Napište Frobeniovu větu pro řešení nehomogenní lineární soustavy rovnic.
   b) Proveďte diskuzi řešení soustavy v závislosti na parametru k :

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & y & - & 4z & = & 10 \\ -x & + & 3y & + & z & = & k \end{array}.$$

   c) Určete řešení soustavy z bodu b), je-li $k = 5$.

5. a) Formulujte l´Hospitalovo pravidlo (včetně předpokladů).
   b) Vypočítejte:

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}.$$

6. Řešte Cauchyovu úlohu a napište interval existence maximálního řešení:

$$y' = \frac{1}{x^3 - x^2}, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

Řešení:

Příklad 1. Rovnici napíšeme ve zkráceném zápisu $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, ze kterého vyjádříme matici X, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -18 & -2 \end{pmatrix}.$$

Protože matice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ jsou regulární, existují matice inverzní.

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}^{-1} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}^{-1}.$$

Nyní spočítáme matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ a $\boldsymbol{B}^{-1}$.

$$\det \boldsymbol{A} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \boldsymbol{B} = -2 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -18 & -2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Příklad 2.

a) Definiční obor: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

funkce je lichá, protože $f(-x) = f(x)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \left(2x + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$;

Protože je funkce lichá, je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$;

b) $$f'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \begin{cases} > 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; 2 \;\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}\; \frac{1}{x^2} \;\Leftrightarrow\; x^2 \;\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}\; \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; |x| \;\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}\; \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$f(x)$ je rostoucí pro $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ a pro $x \in \left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$,

$f(x)$ je klesající pro $x \in \left\langle-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ a pro $x \in \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$;

c) $f'\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \quad\Longrightarrow\quad$ body $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ jsou stacionární.

Z chování funkce zleva a zprava kolem x_1 a x_2 zjistíme, že

v bodě $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nastává lokální maximum $M_1 = \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right]$,

kde $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$,

v bodě $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nastává lokální minimum $M_2 = \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right]$,

kde $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$.

Lokální extrémy jsme mohli též zpřesnit i podle znaménka druhé derivace:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad M_1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -2\sqrt{2}\right] \text{ je lokálním maximem,}$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad M_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right] \text{ je lokálním minimem.}$$

■

Příklad 3. $\displaystyle\int \left(\cos^2 x + \sin^3 x \, \cos x\right) dx = \int \cos^2 x \, dx + \int \sin^3 x \, \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx + \int t^3 \, dt = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

$x \in \mathbb{R}$.

■

Příklad 4.

a) Věta Frobeniova: Je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} .$$

Užijeme-li označení:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

pak soustava $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ má $\left\langle \begin{array}{l} \text{jediné řešení, právě když } h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = n, \\ \text{nekonečně mnoho řešení, právě když } h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) < n. \end{array} \right.$

Je-li $h(\boldsymbol{A}) \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$, pak soustava nemá řešení.

b) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & -4 & 10 \\ -1 & 3 & 1 & k \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -2 & k+7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{array}\right)$$

Soustava pro žádné k nemůže mít jediné řešení, pro $k = -3$ má nekonečně mnoho řešení a pro $k \neq -3$ nemá řešení.

c) $k = 5 \neq -3 \;\Rightarrow\;$ soustava nemá řešení.

■

Příklad 5.

a) L´Hospitalovo pravidlo: Nechť limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, $c \in \mathbb{R}^*$ jsou buď obě nulové nebo nevlastní. Nechť existují derivace $f'(x)$, $g'(x)$ v okolí bodu c. Potom platí

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

jestliže limita vpravo existuje. Totéž platí pro limity zleva nebo zprava.

b) $$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \;|0\cdot\infty|\; = \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{l'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{x} = 0.$$

■

Příklad 6. $y = \displaystyle\int \frac{1}{x^3 - x^2}\,dx, \qquad x \neq 0,\ x \neq 1,$

$$\frac{1}{x^3-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} \;\Rightarrow$$

$$Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2 = 1,$$

$$\begin{array}{lrcl}
x^2 \Rightarrow & A + & C = 0 & \\
x^1 \Rightarrow & -A + B & = 0 & \Rightarrow \quad B=-1,\ A=-1,\ C=1,\\
x^0 \Rightarrow & -B & = 1 &
\end{array}$$

$$y = \int\left(\frac{-1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right)dx = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C,$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = 2: \quad 2 = 2 + \underbrace{\ln\left|\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right|}_{0} + C \quad\Rightarrow\quad C = 0,$$

$$y(x) = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|, \quad x \in (0,\,1).$$

■

2. TEST

1. Přímkou $p: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$ veďte rovinu ϱ kolmou k rovině $\sigma:\ 3x - y + 2z - 7 = 0$.

2. a) Ověřte, že rovnicemi $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - t \end{cases}$, $t \in (0, +\infty)$ je parametricky definována funkce $y = f(x)$. Určete její definiční obor $D(f)$.

   b) Určete $\dfrac{dy}{dx}$ v bodě $A = [2, ?]$.

   c) Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě A.

3. Řešte Cauchyovu úlohu $y' = \dfrac{x+7}{x^2 + 2x - 3} \cdot y, \quad y(0) = 5$ a určete definiční obor nalezeného řešení.

4. a) Napište Cramerovo pravidlo pro řešení lineární soustavy $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

   b) Vyřešte danou soustavu Cramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & z & = & -2 \end{array}.$$

5. a) Ověřte předpoklady Newtonovy metody pro přibližné řešení rovnice $\mathrm{e}^x - x - 3 = 0$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

   b) Zvolte počáteční aproximaci x_0 a vypočítejte následující aproximaci x_1.

6. a) Spočítejte integrál $\displaystyle\int \sqrt{16 - x^2}\, dx$.

   b) Uveďte existenční obor daného integrálu.

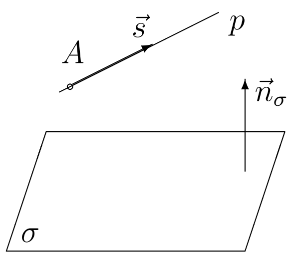
   c) Napište větu o substituci v neurčitém integrálu, kterou jste použili.

Řešení:

Příklad 1.

Z parametrických rovnic přímky $p: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = [2, -1, 3] + t\,(1, 2, -4),$

přečteme souřadnice bodu $A = [2,\ -1,\ 3]$ a souřadnice směrového vektoru $\vec{s} = (1,\ 2,\ -4)$. Z rovnice roviny $\sigma : 3x - y + 2z - 7 = 0$ přečteme souřadnice normálového vektoru $\vec{n}_\sigma = (3,\ -1,\ 2)$. Rovina ϱ prochází bodem A a je rovnoběžná s vektory $\vec{s}$ a $\vec{n}_\sigma$. Označme $M = [x,\ y,\ z]$ libovolný bod roviny ϱ. Potom vektory $\overrightarrow{AM}$, $\vec{n}_\sigma$ a $\vec{s}$ musí být komplanární (lineárně závislé), což zapíšeme pomocí smíšeného součinu $\overrightarrow{AM} \cdot (\vec{n}_\sigma \times \vec{s}) = 0$. Nyní vše provedeme v souřadnicích:



$$\overrightarrow{AM} = (x - 2, y + 1, z - 3) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$4(x - 2) + 2(y + 1) + 6(z - 3) + (z - 3) - 4(x - 2) + 12(y + 1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$14(y + 1) + 7(z - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y + z - 1 = 0.$$

Hledaná rovina $\varrho :\ 2y + z - 1 = 0$ je rovnoběžná s osou x.

■

Příklad 2.

a) $\dot{x} = 2t > 0$ pro všechna $t \in (0, +\infty)$. Tím jsme ověřili, že danými rovnicemi je definována jediná funkce $y = f(x)$.

$$t \in (0,\ +\infty) \quad \overset{x(t)\ \text{roste}}{\Longrightarrow} \quad x \in (1,\ +\infty) = D(f).$$

b)

$$\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - t \end{cases}, \quad A = [2,\ ?] \quad \begin{cases} 2 = t^2 + 1 \ \Rightarrow\ t_A = 1 \in (0,\ +\infty) \\ y(1) = 0 \ \Rightarrow\ A = [2,\ 0] \end{cases};$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2t - 1}{2t}\Big|_A = \frac{1}{2};$$

c) tečna: $y - y_A = f'(A) \cdot (x - x_A) \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{1}{2}\,(x - 2)$

■

Příklad 3. $y' = \dfrac{x + 7}{x^2 + 2x - 3} \cdot y \quad \Rightarrow \quad \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x + 7}{x^2 + 2x - 3}\, dx,$

$$\frac{x + 7}{x^2 + 2x - 3} = \frac{x + 7}{(x + 3)(x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 1} \quad \Rightarrow \quad x \neq 1,\ x \neq -3,$$

$$x+7=A(x-1)+B(x+3),$$

$$\begin{array}{llll} x=1 & \Rightarrow\ 8=4B & \Rightarrow & B=2 \\ x=-3 & \Rightarrow\ 4=-4A & \Rightarrow & A=-1 \end{array}.$$

Integrály dopočítáme:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{-1}{x+3} + \frac{2}{x-1}\right) dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\ln|x+3| + 2\ln|x-1| + \ln C,\ C>0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{C(x-1)^2}{x+3}; \quad y(0)=5 \quad \Rightarrow \quad 5=\frac{C}{3} \quad \Rightarrow \quad C=15,$$

Řešení Cauchyovy úlohy je $\quad y = \dfrac{15\,(x-1)^2}{x+3},\ x\in(-3,\ 1).$

■

Příklad 4.

a) Cramerovo pravidlo: Je-li matice $\boldsymbol{A}$ regulární (čtvercová s nenulovým determinantem), pak soustava $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ má jediné řešení a jednotlivé neznámé jsou $x_i=\dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, kde $\Delta=\det\boldsymbol{A}$ a Δ_i je determinant matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ výměnnou i-tého sloupce za sloupec pravých stran, tj. za sloupcovou matici $\boldsymbol{B}$.

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 6 \\ 2x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & z & = & -2 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1-2+18+3+3-4=17,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -6+4+9-6+18-2=17,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6-12-3-2-12=-34,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2+2+36+6-3+8=51,$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-2,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=3.$$

■

Příklad 5.

a) Platí-li předpoklady:

1) funkce má v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ druhou derivaci $f''(x)$, která zde nemění znaménko,
2) $f'(x) \neq 0$ a $f''(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle a,\, b\rangle$,
3) $f(a) \cdot f(b) < 0$,

potom rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $\langle a,\, b\rangle$ právě jeden kořen ξ.

Zvolíme-li počáteční aproximaci $x_0 \in \{a,\, b\}$, tak aby $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, pak

$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, obecně $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}$

a posloupnost $\{x_n\}$ konverguje ke ξ.

Nyní ověříme všechny podmínky 1), 2) a 3):

1) $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 3$, $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$, $f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ pro všechna $x \in \langle 1,\, 2\rangle$,
2) $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 1,\, 2\rangle$,
3) $f(1) = \mathrm{e} - 1 - 3 < 0$, $\quad f(2) = \mathrm{e}^2 - 2 - 3 \doteq 7.387 - 5 > 0$.

b) $x_0 = 2$, protože $f(2) \cdot f''(2) > 0$,

$$x_1 = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} \doteq 2 - \frac{2.387}{6.387} = 2 - 0.373 = 1.627.$$

■

Příklad 6.

a) $$\int \sqrt{16 - x^2}\, dx = \int 4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx = \left| \begin{array}{c} \dfrac{x}{4} = \sin t \\ \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{4}\right)^2} = \cos t \\ dx = 4\,\cos t \cdot dt \end{array} \right| = 16 \int \cos^2 t\, dt =$$

$$= 16 \int \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = 8\,(t + \sin t \cdot \cos t) + C = \left| t = \arcsin\frac{x}{4} \right| =$$

$$= 8\left(\arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}\right) + C = 8 \arcsin\frac{x}{4} + \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2} + C;$$

b) $16 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle -4,\, 4\rangle$;

c) Věta o substituci. Integrál $\int f(x)\, dx$ lze upravit substitucí $x = g(t)$, jestliže:

1) $g(t)$ je diferencovatelná a ryze monotónní na intervalu J,
2) $g(t)$ zobrazuje interval J na interval I,
3) $f(x)$ je definovaná na I a má primitivní funkci na I.

Potom

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\, dt.$$

■

3. TEST

1. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Stanovte globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 10, \quad x \in \langle 0,\, 3 \rangle$.

3. Určete funkci $f(x)$, víte-li že její graf prochází bodem $A = [0,\, 3]$ a směrnice tečny v libolném bodě má vyjádření:

$$k = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4. a) Napište obecný tvar homogenní soustavy m lineárních algebraických rovnic pro n neznámých.

   b) Jaká je dimenze vektorového prostoru, který je tvořen všemi řešeními této soustavy?

   c) Vyřešte soustavu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0\ . \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}$$

5. a) Napište Taylorův polynom n -tého stupně $T_n(x)$ v bodě x_0.

   b) Stanovte $T_4(x)$ funkce $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$ v bodě $x_0 = 0$.

6. a) Vypočítejte $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

   b) Napište větu, kterou jste použili při výpočtu daného integrálu.

Řešení:

Příklad 1. $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\boldsymbol{A}\,\vec{u} = \lambda \vec{u} \;\Rightarrow = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{rr} (2-\lambda)\,u_1 & -3u_2 = 0 \\ -2u_1 & +(1-\lambda)u_2 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-4)(\lambda+1) = 0.$$

$$\lambda_1 = 4: \; -2u_1 - 3u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = -\frac{2}{3}\,u_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\lambda_2 = -1: \; 3v_1 - 3v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot s, \qquad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\boldsymbol{A}\,\vec{u} = 4\vec{u}, \quad \boldsymbol{A}\,\vec{v} = -\vec{v}.$$

Vlastní čísla jsou 4 a -1 a jim odpovídají vlastní vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

■

Příklad 2. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 10, \quad x \in \langle 0,\, 3\rangle.$

1) Stanovíme stacionární body dané funkce

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6} = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ \frac{2}{3} \end{array} \right. .$$

Jelikož x_1 a x_2 patří do intervalu $\langle 0,\, 3\rangle$, spočítáme funkční hodnoty ve stacionárních bodech:

$$f(2) = 8 - 16 + 8 + 10 = 10 \;\text{ a }\; f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} + 10 = \frac{302}{27} = 11\,\frac{5}{27}.$$

2) Určíme funkční hodnoty v krajních bodech daného intervalu:

$$f(0) = 10, \quad f(3) = 27 - 36 + 12 + 10 = 13.$$

Globální maximum $= \max\left\{ f(2),\; f\left(\frac{3}{2}\right),\; f(0),\; f(3) \right\} = f(3) = 13,$

globální minimum $= \min\left\{ f(2),\; f\left(\frac{3}{2}\right),\; f(0),\; f(3) \right\} = f(0) = f(2) = 10.$

■

Příklad 3. Víme, že směrnice tečny v libovolném bodě je $k = f'(x) \quad \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \int \frac{\boldsymbol{2x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C = \sqrt{x^2+1} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C.$$

Konstantu C určíme z podmínky $f(0) = 3$, takže křivka prochází bodem $A = [0, 3]$:

$$3 = 1 + \ln 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Hledaná funkce je $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

■

Příklad 4.

a) Homogenní soustava má následující zápis:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\ldots+ & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

nebo v maticovém tvaru: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = 0$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

b) Vektorový prostor všech řešení má dimenzi $n - h(\boldsymbol{A})$.

c) $$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h(\boldsymbol{A}) = 2,\ n - h(\boldsymbol{A}) = 4 - 2 = 2.$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array} \qquad \text{zvolíme } x_3 = p \text{ a } x_4 = q,$$

pak $x_2 = 2p - q, \quad x_1 = -3p + q$. Tedy řešení je

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3p & + & q \\ 2p & - & q \\ p & & \\ & & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot p + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot q, \quad \text{kde } p,\ q \in \mathbb{R}.$$

■

Příklad 5.

a) $f(x) \doteq f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = T_n(x);$

b) $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^x = \left| \begin{array}{l} \text{použijeme známý polynom} \\ \mathrm{e}^x \doteq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} \text{ v bodě } x_0 = 0 \end{array} \right| \doteq x \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right) =$

$$= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} = T_4(x).$$

■

Příklad 6.

a) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & v' = x \\ u' = \dfrac{1}{1+x^2}, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + \mathbf{1} - \mathbf{1}}{1+x^2} \, dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

b) Použili jsme větu o integraci per partes. Mají-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ spojité derivace v intervalu I, potom na tomto intervalu platí

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx.$$

■

Doporučená literatura

[1] J. Neustupa: **Matematika I** ČVUT, Praha 1998 (*Základní literatura pro předmět Matematika I. Skriptum určené pro studenty FSI ČVUT v Praze.)*

[2] B. Budínský, J. Charvát: **Matematika I** SNTL/Alfa, Praha 1987 (*Podrobná, srozumitelně napsaná učebnice.)*

[3] J. Neustupa, S. Kračmar : **Sbírka příkladů z Matematiky I.** ČVUT, Praha 1998 (*Rozsáhlá sbírka neřešených příkladů z Matematiky I.)*

[4] K. Rektorys : **Přehled užité matematiky** SNTL Praha 1988 (*Rozsáhlá encyklopedie aplikované matematiky napsaná pro potřeby technických věd.)*