Obsah

I. Lineární algebra **2**
I.1. Vektory, vektorové prostory 2
I.2. Matice a determinanty 7
I.3. Soustavy lineárních rovnic 21
I.4.* Lineární zobrazení 32
I.5. Vlastní čísla a vlastní vektory matice 39

II. Analytická geometrie v $\mathbb{E}_3$ **45**
II.1. Skalární součin dvou vektorů 45
II.2. Vektorový součin dvou vektorů v E_3 48
II.3. Smíšený součin v E_3 50
II.4. Rovina v $\mathbb{E}_3$ 52
II.5. Přímka v $\mathbb{E}_3$ 57
II.6. Kvadriky v $\mathbb{E}_3$ 66
II.7.* Některé technické křivky 70

I. Lineární algebra

I.1. Vektory, vektorové prostory

***Příklad* 1.** Jsou dány vektory $\vec{a} = (-4, 7)$, $\vec{b} = (-2, 0)$, $\vec{c} = (5, 1)$. Napište souřadnice vektorů: **a)** $(-\vec{a})$; **b)** $3\,\vec{c}$; **c)** $\vec{c} + \vec{a}$; **d)** $2\,\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$; **e)** $2\,\vec{c} - 3\,\vec{b} + \vec{a}$.

Řešení:

a) Vektor $(-\vec{a})$ je vektor opačný k vektoru $\vec{a}$ a podle definice jeho souřadnice budou $(-\vec{a}) = -\vec{a} = -(-4, 7) = (4, -7)$.

b) Podle definice o násobení vektoru reálným číslem spočítáme $3\,\vec{c} = 3\,(5, 1) = (15, 3)$.

V dalších příkladech jde o lineární kombinaci vektorů:

c) $\vec{c} + \vec{a} = (5, 1) + (-4, 7) = (5 - 4, 1 + 7) = (1, 8)$;

d) $2\,\vec{a} + \vec{b} - 4\,\vec{c} = (-8, 14) + (-2, 0) - (20, 4) = (-8 - 2 - 20, 14 + 0 - 4) = (-30, 10)$;

e) $2\,\vec{c} - 3\,\vec{b} + \vec{a} = (10, 2) - (-6, 0) + (-4, 7) = (12, 9)$.

■

***Příklad* 2.** Pro jaká m, n jsou si vektory $\vec{a} = (2\,m, 3)$ a $\vec{b} = (2, m + n)$ rovny?

Řešení: Dva vektory se rovnají právě tehdy, když se rovnají jejich odpovídající souřadnice:

$$\begin{cases} 2\,m = 2 & \Rightarrow \quad m = 1 \\ 3 = m + n & \Rightarrow \quad n = 2 \end{cases} . \qquad \text{Pak} \quad \vec{a} = \vec{b} = (2, 3).$$

■

***Příklad* 3.** Jsou dány vektory $\vec{a} = (y - 1, x)$, $\vec{b} = (x + 1, 3\,y)$. Určete čísla x a y tak, aby platilo **a)** $3\,\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$; **b)** $\vec{b} - \vec{a} = (0, 8)$.

Řešení:

a) $\big(3\,(y - 1), 3\,x\big) - (x + 1, 3\,y) = (0, 0) \quad \Rightarrow \quad (3\,y - 3 - x - 1, 3\,x - 3\,y) = (0, 0)$,

$$\begin{cases} 3\,y - 3 - x - 1 = 0 \\ 3\,x - 3\,y = 0 \end{cases} \Rightarrow \; x = y \; \Rightarrow \; 3\,x - 3 - x - 1 = 0 \; \Rightarrow \; 2\,x = 4,$$

$x = y = 2 \;\Rightarrow\; \vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (3, 6) \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = 3\,\vec{a}$;

b) $(x + 1, 3y) - (y - 1, x) = (0, 8) \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} x + 1 - y + 1 = 0 \\ 3\,y - x = 8 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x - y = -2 \\ -x + 3\,y = 8 \end{cases} .$$ Po sečtení obou rovnic dostaneme $2\,y = 6$. Tedy $y = 3$ a $x = 1$.

■

***Příklad* 4.** Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (4, 1, 0)$, $\vec{w} = (-3, 5, 1)$. Určete vektor $\vec{x}$, který vyhovuje rovnici: **a)** $\vec{x} = 2\,\vec{u} + \vec{v} - 3\,\vec{w}$; **b)** $\vec{x} - 2\,\vec{u} = 3\,\vec{x} + 2\,(\vec{u} - \vec{v} - 2\,\vec{w})$.

Řešení:

a) Rozepíšeme lineární kombinaci na pravé straně v souřadnicích, a tím spočítáme

souřadnice vektoru $\vec{x}$:
$\vec{x} = 2\,(1,-2,3) + (4,1,0) - 3\,(-3,5,1) = (2,-4,6) + (4,1,0) + (9,-15,-3) =$
$= (2+4+9,\ -4+1-15,\ 6+0-3) = (15,-18,3).$

b) Z dané rovnice si vyjádříme vektor $\vec{x}$ jako lineární kombinaci zbývajících vektorů:
$-2\,\vec{x} = 2\,\vec{u} + 2\,\vec{u} - 2\,\vec{v} - 4\,\vec{w} \Rightarrow \vec{x} = -2\,\vec{u} + \vec{v} + 2\,\vec{w}$, potom v souřadnicích dostaneme
$\vec{x} = -2(1,-2,3) + (4,1,0) + 2(-3,5,1) = (-2+4-6, 4+1+10, -6+0+2) =$
$= (-4, 15, -4).$

■

***Příklad* 5.** Jsou dány vektory $\vec{a} = (2,3,0)$, $\vec{b} = (1,2,-3,-5)$, $\vec{c} = (0,-1,4,2)$, $\vec{d} = (1,3,-4,0)$. Určete vektor $\vec{x}$ splňující **a)** $\vec{x} = 2(\vec{a} + \vec{b})$;
b) $2\,\vec{b} = \vec{c} - 3\,\vec{x} + \vec{d}$.

Řešení:
a) $\vec{x}$ neexistuje, protože vektor $\vec{a} \in V(\mathbb{E}_3)$ a vektor $\vec{b} \in V(\mathbb{E}_4)$ (víme, že $\vec{a} + \vec{b}$ existuje jenom když $\vec{a} \in V(\mathbb{E}_k)$ a také $\vec{b} \in V(\mathbb{E}_k)$).

b) $3\,\vec{x} = \vec{c} + \vec{d} - 2\,\vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{c} + \vec{d} - 2\,\vec{b}\right) \quad \Rightarrow$

$$\vec{x} = \frac{1}{3}\Big((0,-1,4,2) + (1,3,-4,0) - (2,4,-6,-10)\Big) = \frac{1}{3}\Big(-1,-2,6,12\Big) =$$
$$= \Big(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 2, 4\Big).$$

■

***Příklad* 6.** Vyjádřete vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:
a) $\vec{a} = (0,-7)$, $\vec{b} = (7,0)$, $\quad \vec{u} = (1,-3)$, $\vec{v} = (2,1)$;
b) $\vec{a} = (10,9,4)$, $\vec{b} = (0,3,1)$, $\quad \vec{u} = (-1,0,2)$, $\vec{v} = (4,3,0)$.

Řešení:
a) Sestavíme lineární kombinaci, kterou potom vyjádříme v souřadnicích:
$\vec{a} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (0,-7) = \alpha_1(1,-3) + \alpha_2\,(2,1)$,

$$(0,-7) = (\alpha_1 + 2\,\alpha_2, -3\,\alpha_1 + \alpha_2) \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{r} \alpha_1 + 2\,\alpha_2 = 0 \\ -3\,\alpha_1 + \alpha_2 = -7 \end{array}\right. .$$

Po vynásobení první rovnice číslem 3 a po sečtení obou rovnic dostáváme

$$7\,\alpha_2 = -7 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -1, \alpha_1 = 2. \text{ Potom} \quad \vec{a} = 2\,\vec{u} - \vec{v}.$$

Podobně $\vec{b} = \beta_1\vec{u} + \beta_2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (7,0) = \beta_1(1,-3) + \beta_2(2,1) \quad \Rightarrow$
$\left\{\begin{array}{r} \beta_1 + 2\,\beta_2 = 7 \\ -3\,\beta_1 + \beta_2 = 0 \end{array}\right.$. Řešíme podobně jako pro vektor $\vec{a}$ a postupně dostáváme

$$7\,\beta_2 = 21 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = 3,\ \beta_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \vec{u} + 3\,\vec{v}.$$

b) $\vec{a} = \alpha_1\vec{u} + \alpha_2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (10,9,4) = \alpha_1(-1,0,2) + \alpha_2(4,3,0) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad (10,9,4) = (-\alpha_1 + 4\,\alpha_2, 3\,\alpha_2, 2\,\alpha_1) \quad \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lll} -\alpha_1 + 4\,\alpha_2 = 10 & & \\ \qquad\quad 3\,\alpha_2 = 9 & \Rightarrow & \alpha_2 = 3 \\ 2\,\alpha_1 \qquad\quad = 4 & \Rightarrow & \alpha_1 = 2 \end{array}\right. .$$

Dosazením se přesvědčíme, že i první rovnice je splněna, tedy $\vec{a} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$. Podobně
$\vec{b} = \beta_1\vec{u} + \beta_2\vec{v} \quad \Rightarrow \quad (0,3,1) = \beta_1(-1,0,2) + \beta_2(4,3,0) \quad \Rightarrow$
$\Rightarrow \quad (0,3,1) = (-\beta_1 + 4\,\beta_2, 3\,\beta_2, 2\,\beta_1) \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} -\beta_1 + 4\,\beta_2 = 0 & & \\ \qquad\quad 3\,\beta_2 = 3 & \Rightarrow & \beta_2 = 1 \\ 2\,\beta_1 \qquad\quad = 1 & \Rightarrow & \beta_1 = 1/2 \end{cases}.$$

Nyní po dosazení do první rovnice dostáváme nepravdivý výrok $-1/2+4 = 0$. Z toho plyne, že neexistují žádná čísla β_1, β_2 splňující požadovaný vztah a vektor $\vec{b}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.
Jinými slovy: vektory $\vec{b}$, $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně nezávislé. ■

***Příklad* 7.** Rozhodněte, zda následující soustavy vektorů jsou lineárně závislé nebo lineárně nezávislé.

a) $\vec{a} = (2,3)$, $\vec{b} = (1,-4)$, $\vec{c} = (-1,5)$;
b) $\vec{a} = (2,3,-1,0)$, $\vec{b} = (0,4,3,-5)$, $\vec{c} = (0,0,0,0)$;
c) $\vec{a} = (3,-1,5)$, $\vec{b} = (0,2,3,)$, $\vec{c} = (0,0,2)$;
d) $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (1,0,2)$, $\vec{c} = (-4,2,-6)$;
e) $\vec{a} = (1,1,-1,-1)$, $\vec{b} = (2,0,1,0)$, $\vec{c} = (0,1,0,3)$.

Řešení:

a) Ve dvojrozměrném prostoru každá skupina tří a více vektorů je **závislá**.

b) Každá skupina vektorů obsahující nulový vektor je **závislá**.

c) I když vektory jsou zřejmě lineárně nezávislé, přesvědčíme se o tom podle definice. Sestavíme lineární kombinaci $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ a určíme konstanty α, β, γ.

$$\alpha(3,-1,5) + \beta(0,2,3) + \gamma(0,0,2) = (0,0,0) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (3\,\alpha, -\alpha + 2\,\beta, 5\,\alpha + 3\,\beta + 2\,\gamma) = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 3\,\alpha & = 0 \\ -\alpha + 2\,\beta & = 0 \\ 5\,\alpha + 3\,\beta + 2\,\gamma & = 0 \end{cases}.$$

Postupně vypočítáme, že jedině $\alpha = 0$, pak $\beta = 0$ a $\gamma = 0$ splňují vztah $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$, což podle definice znamená, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou **nezávislé**.

d) Podíváme-li se pozorně na vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, snadno zjistíme, že $\vec{c} = -2\,\vec{a}$ a proto celá trojice je **lineárně závislá**.

e) Z rozepsané vektorové rovnice $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} = \vec{0}$ v souřadnicích

$$\alpha\,(1,1,-1,-1) + \beta\,(2,0,1,0) + \gamma\,(0,1,0,3) = (0,0,0,0)$$

obdržíme soustavu pro konstanty α, β, γ:

$$\begin{cases} \alpha + 2\,\beta & & = 0 \\ \alpha & + \gamma & = 0 \\ -\alpha + \beta & & = 0 \\ -\alpha & + \gamma & = 0 \end{cases},$$

ze které určíme, že jediné řešení je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. To znamená, že vektory jsou **lineárně nezávislé**. ■

POZNÁMKA: V další kapitole **Matice a determinanty** se vrátíme k vyšetření lineární závislosti či nezávislosti skupiny vektorů.

***Příklad* 8.** Zjistěte, zda následující vektory tvoří bázi uvedeného vektorového prostoru:

a) $\vec{a} = (3,5,0)$, $\vec{b} = (0,0,4)$, $\vec{c} = (0,3,7)$, $V(\mathbb{E}_3)$;
b) $\vec{a} = (2,4)$, $\vec{b} = (-1,0)$, $\vec{c} = (0,3)$, $V(\mathbb{E}_2)$;
c) $\vec{a} = (-1,2,4)$, $\vec{b} = (3,1,0)$, $\vec{c} = (1,5,8)$, $V(\mathbb{E}_3)$;
d) $\vec{a} = (1,3,7)$, $\vec{b} = (-1,7,0)$, $V(\mathbb{E}_3)$;
e) $\vec{a} = (1,3,-2)$, $\vec{b} = (4,2,4)$, $\vec{c} = (0,0,0)$, $V(\mathbb{E}_3)$;
f) $\vec{a} = (2,0,-1)$, $\vec{b} = (-1,3,1)$, $\vec{c} = (0,1,0)$, $\vec{d} = (4,-3,1)$, $V(\mathbb{E}_3)$;
g) $\vec{a} = (1,2,3,1)$, $\vec{b} = (0,1,2,-3)$, $\vec{c} = (0,0,1,2)$, $\vec{d} = (0,0,0,1)$, $V(\mathbb{E}_4)$.

Řešení:

a) Snadno zjistíme, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně nezávislé, a tedy **tvoří** bázi prostoru $V(\mathbb{E}_3)$. Vzpomeňme si na definici: *V prostoru $V(\mathbb{E}_n)$ každá lineárně nezávislá skupina n vektorů tvoří bázi tohoto prostoru.*

b) Tři vektory ve dvojrozměrném prostoru jsou vždy závislé, což znamená, že dané vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ **netvoří** bázi $V(\mathbb{E}_2)$.

c) Zde zjistíme, že pro vektory platí závislost $2\,\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ a proto dané vektory **netvoří** bázi $V(\mathbb{E}_3)$.

d) Odpověď je zřejmá: vektory **netvoří** bázi, jelikož báze $V(\mathbb{E}_3)$ je tvořena třemi lineárně nezávislými vektory a zde jsou dány jen vektory dva.

e) Opět **netvoří**, protože každá skupina vektorů obsahující nulový vektor je **vždy** závislá.

f) **Netvoří** bázi, protože počet vektorů je větší než 3, což je dimenze prostoru, tedy vektory jsou závislé.

g) Z vektorové rovnice $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d} = \vec{0}$ obdržíme soustavu

$$\begin{cases} \alpha & = 0 \\ 2\,\alpha + \beta & = 0 \\ 3\,\alpha + 2\,\beta + \gamma & = 0 \\ \alpha - 3\,\beta + 2\,\gamma + \delta & = 0 \end{cases},$$

ze které snadno vypočítáme: $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Tedy daná skupina čtyř vektorů je lineárně nezávislá a **tvoří** bázi prostoru $V(\mathbb{E}_4)$.

■

***Příklad* 9.** Ověřte, zda množina V spolu s uvedenými operacemi je vektorovým prostorem:

a) $V = \{a_1 + a_2x + a_3x^2;\ a_1, a_2, a_3, x \in \mathbb{R}\}$, kde operace sčítání mnohočlenů a násobení reálným číslem jsou definovány obvyklým způsobem;

b) $V = \{(a, 1-a, b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$, kde sčítání a násobení číslem jsou běžné operace mezi vektory;

c) V je množina všech rostoucích funkcí definovaných na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Řešení: Aby neprázdná množina V tvořila vektorový prostor, musí pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in V$ a $k, k_1, k_2 \in R$ platit následující podmínky:

1) $\vec{u}, \vec{v} \in V \longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$,
2) $\vec{u} \in V \longrightarrow k\,\vec{u} \in V$,
3) $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in V$,
4) $\vec{u} \in V \longrightarrow (-\vec{u}) \in V$ a $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
5) $k_1\,(k_2\,\vec{u}) = (k_1\,k_2)\,\vec{u}$,
$(k_1 + k_2)\,\vec{u} = k_1\,\vec{u} + k_2\,\vec{u}$,
$k\,(\vec{u} + \vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v}$.

a) Přiřadíme-li mnohočlenu $a_1 + a_2x + a_3x^2$ vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, pak velmi snadno ověříme platnost všech podmínek. Např.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3):$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad \Longleftrightarrow$$
$$a_1 + a_2x + a_3x^2 + b_1 + b_2x + b_3x^2 = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)\,x + (a_3 + b_3)\,x^2;$$

$$k\,\vec{a} = (k\,a_1, k\,a_2, k\,a_3) \quad \Longleftrightarrow \quad k(a_1 + a_2x + a_3x^2) = k\,a_1 + k\,a_2x + k\,a_3x^2;$$

$$\vec{0} = (0,0,0) \quad \Longleftrightarrow \quad 0 + 0\,x + 0\,x^2 \qquad \text{atd.}$$

Zde jsme uvažovali množinu mnohočlenů 2. stupně, avšak snadno se můžeme přesvědčit, že množina všech mnohočlenů n-tého stupně též **tvoří** vektorový prostor.

b) Zvolme dva prvky $\vec{u} = (a_1, 1 - a_1, b_1)$ a $\vec{v} = (a_2, 1 - a_2, b_2)$ množiny V a zkusme utvořit $\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, 2 - a_1 - a_2, b_1 + b_2)$. Je zřejmé, že $\vec{u} + \vec{v} \notin V$, protože $2 - a_1 - a_2 \neq 1 - (a_1 + a_2)$. Další ověřování podmínek je zbytečné.
Množina V **netvoří** vektorový prostor.

c) Mějme dvě rostoucí funkce f a g na $\langle a, b\rangle$. Potom $f + g$ je též rostoucí funkce, avšak $(-f)$ je funkce klesající čili $(-f) \notin V$ a daná množina V **netvoří** vektorový prostor.

$\blacksquare$

10. Jsou dány vektory $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (0, -1, 3)$, $\vec{c} = (4, 5, -3)$. Spočítejte vektor $\vec{x}$:
a) $\vec{x} = 2\,\vec{a} + 3\,\vec{b} - \vec{c}$; **b)** $2\,(\vec{x} + \vec{a}) = 3\,(\vec{c} + \vec{b}) - \vec{x}$.

$\left[\textbf{a)}\ (-2, -4, 12);\ \textbf{b)}\ \frac{1}{3}\Big(10, 8, 0\Big)\right]$

11. Určete čísla x, y, $z \in \mathbb{R}$ tak, aby pro vektory $\vec{a} = (x, y, 1)$, $\vec{b} = (1, x, z)$, $\vec{c} = (4, 3, -3)$ platila rovnost $\vec{a} + 2\,\vec{b} = \vec{c}$.

$[x = 2,\ y = -1,\ z = -2]$

12. Určete vektor $\vec{x}$ splňující rovnici $2\,(\vec{x} - \vec{u}) = \vec{x} - 4\,(\vec{x} + 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v})$, kde $\vec{u} = (-1, 2, 5, 1)$ a $\vec{v} = (4, -2, -3, 0)$.

$\left[\frac{1}{5}\Big(-42, 12, 6, -6\Big)\right]$

13. Určete vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jako lineární kombinace vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a naopak $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jako lineární kombinace $\vec{a}$ a $\vec{b}$, jestliže $\vec{a} = (0, -11)$, $\vec{b} = (11, 0)$, $\vec{u} = (3, -1)$, $\vec{v} = (2, 3)$.

$$\left[\begin{array}{c} \vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v},\quad \vec{b} = 3\vec{u} + \vec{v} \\ \vec{u} = \frac{1}{11}\Big(3\vec{b} + \vec{a}\Big),\quad \vec{v} = \frac{1}{11}\Big(2\vec{b} - 3\vec{a}\Big) \end{array}\right]$$

14. Zjistěte zda vektory tvoří bázi vektorového prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.
a) $(2, 2, 4)$, $(0, 3, 7)$, $(3, 5, 0)$;
b) $(3, 8, 2)$, $(4, -7, 3)$;
c) $(1, 5, -3)$, $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 1)$;
d) $(2, 3, -1)$, $(1, 0, 0)$, $(2, 3, 0)$, $(0, 1, -2)$;
e) $(2, -1, 4)$, $(0, 1, 3)$, $(0, 0, 5)$.

[a) ano; b) ne; c) ne; d) ne; e) ano]

I.2. Matice a determinanty

***Příklad* 15.** Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Spočítejte matici: **a)** $3\,\boldsymbol{A}$; **b)** $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$; **c)** $2\,\boldsymbol{A} - 3\,\boldsymbol{B}$; **d)** $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$.

Řešení:

a) $3\,\boldsymbol{A} = 3\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 0 \\ -3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$;

b) Matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou stejného typu $(2,3)$, proto je lze sčítat:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 4+2 & 0+3 \\ -1+0 & 2+2 & 5-7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

c) $2\,\boldsymbol{A} - 3\,\boldsymbol{B} = 2\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 0 & 6 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3 & 8-6 & 0-9 \\ -2-0 & 4-6 & 10+21 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 31 \end{pmatrix};$$

d) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ neexistuje, protože součin $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ je definován jedině když matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(m,\underline{n})$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(\underline{n},p)$, pak matice $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ je typu (m,p).

■

***Příklad* 16.** Nechť $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Spočítejte $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$, pokud takové matice existují.

Řešení: Součiny $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ existují. Označme $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}$. Matice $\boldsymbol{A}$ je typu $(2,3)$ a matice $\boldsymbol{B}$ je typu $(3,2)$, tedy matice $\boldsymbol{C}$ bude typu $(2,2)$ a matice $\boldsymbol{D}$ bude typu $(3,3)$.

Prvky matice $\boldsymbol{C}$ spočítáme podle pravidla o součinu:

$$c_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31} = 1\cdot 2 + (-2)\cdot 0 + 3\cdot(-2) = -4,$$
$$c_{12} = a_{11}\,b_{12} + a_{12}\,b_{22} + a_{13}\,b_{32} = 1\cdot(-1) + (-2)\cdot 3 + 3\cdot 5 = 8,$$
$$c_{21} = a_{21}\,b_{11} + a_{22}\,b_{21} + a_{23}\,b_{31} = 4\cdot 2 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot(-2) = 4,$$
$$c_{22} = a_{21}\,b_{12} + a_{22}\,b_{22} + a_{23}\,b_{32} = 4\cdot(-1) + (-1)\cdot 3 + 2\cdot 5 = 3.$$

Tento součin se dá též spočítat velmi přehledně pomocí tabulky:

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B} \\
\hline
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1\cdot 2 - 2\cdot 0 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-1) - 2\cdot 3 + 3\cdot 5 \\ \hline 4\cdot 2 - 1\cdot 0 + 2\cdot(-2) & 4\cdot(-1) - 1\cdot 3 + 2\cdot 5 \\ \hline \end{array} = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}
\end{array}$$

Podobně spočítáme $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}$ opět pomocí tabulky.

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} & =\boldsymbol{A} \\
\hline
\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2\text{-}4 & \text{-}4\text{+}1 & 6\text{-}2 \\ \hline 0\text{+}12 & 0\text{-}3 & 0\text{+}6 \\ \hline \text{-}2\text{+}20 & 4\text{-}5 & \text{-}6\text{+}10 \\ \hline \end{array} & =\begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 12 & -3 & 6 \\ 18 & -1 & 4 \end{pmatrix}=\boldsymbol{D}
\end{array}$$

Součin $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ neexistuje a podobně rozdíl $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ též neexistuje, protože součiny $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{BA}$ nejsou matice stejného typu.

■

***Příklad* 17.** Nechť $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Spočítejte $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^T$.

Řešení:

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot3+5\cdot6 & 3\cdot5+5\cdot(-1) \\ 6\cdot3-1\cdot6 & 6\cdot5+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 39 & 10 \\ 12 & 31 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9+25 & 18-5 \\ 18-5 & 36+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 & 13 \\ 13 & 37 \end{pmatrix}.$$

■

***Příklad* 18.** Spočítejte $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6+4+25+5 \\ 4+6+15-20 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 40 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 & -6 \\ 4 & 5 & 6 & -3 \\ -20 & -25 & -30 & 15 \\ 20 & 25 & 30 & -15 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8+5-30-15 \end{pmatrix}=(-32).$$

■

***Příklad* 19.** Spočítejte matici $\boldsymbol{X}$, pro kterou platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=2\,\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^T$, kde

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^T \Rightarrow \boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}^T\right)$,

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 17 \\ 8 & -20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3, & 4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 17 \\ 11 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{17}{2} \\ \dfrac{11}{2} & -12 \end{pmatrix}.$$

■

***Příklad* 20**. Nalezněte $x, y \in R$ taková, aby platila rovnice

$$\begin{pmatrix} 7 & x+y \\ x-y & 12 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right]^T.$$

Řešení: Především provedeme součin na pravé straně, potom určíme transponovanou matici a nakonec porovnáme vzniklou matici s maticí na levé straně.

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} 3+4 & -3+5 \\ -2+8 & 2+10 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & x+y \\ x-y & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Z toho dostáváme soustavu $\begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \quad x=4,\ y=2.$

■

***Příklad* 21**. Určete hodnost matice $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice je typu $(4,5)$, a to znamená, že její hodnost bude $h \leq 4$. Abychom určili hodnost h, převedeme matici na trojúhelníkový tvar pomocí úprav, které zachovávají její hodnost. První úprava bude změna pořadí sloupců: jako první napíšeme čtvrtý, pak pátý, třetí, druhý a první sloupec.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim}$$

$$\overset{3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \overset{4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 3.$$

Popis úprav:

1) Ke třetímu řádku přičteme první řádek vynásobený (-1), ostatní řádky opíšeme.
2) Vyměníme druhý a třetí řádek.
3) Ke čtvrtému řádku přičteme druhý řádek.
4) Ke čtvrtému řádku přičteme třetí vynásobený (-1).

V trojúhelníkovém tvaru zbyly tři nenulové řádky, což znamená, že hodnost $h(\boldsymbol{A})$ =min{3,5}=3. Poslední úprava 4) byla celkem zbytečná. Stačilo si všimnout, že poslední dva řádky jsou závislé a jeden z nich jsme mohli okamžitě vynechat a napsat $h = 3$. ■

***Příklad* 22**. Určete hodnost matice v závislosti na volbě parametru $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1-k \\ 3 & 1+k & 0 \\ k & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Třetí sloupec napíšeme jako první a ostatní posuneme o jedno místo vpravo

$$\begin{pmatrix} 1-k & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1+k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1+k \\ 0 & 0 & 6-k-k^2 \end{pmatrix}.$$

1) K trojnásobku třetího řádku přičteme druhý řádek vynásobený $-k$. Pro $k = 0$ je matice regulární. Tím dostáváme trojúhelníkovou matici, jejíž hodnost je závislá na prvcích na hlavní diagonále.

a) $h = 3 \iff \left\{ \begin{array}{r} 1-k \neq 0 \\ 6-k-k^2 \neq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} k \neq 1 \\ k \neq \{2,-3\} \end{array} \right.,$

$h = 3 \iff k \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}.$

b) Dosadíme-li do trojúhelníkové matice některé $k \in \{-3, 1, 2\}$, vždy nám zbydou dva nenulové nezávislé řádky, resp. sloupce. Tedy

$h = 2 \iff k \in \{-3, 1, 2\}.$

■

***Příklad* 23**. Určete hodnost matice v závislosti na volbě parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -10 & 1 \\ 1 & -1 & a-3 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & a-2 & 16 & 0 \\ 2 & 0 & 7-a & a^2-a+8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Napíšeme sloupce v následujícím pořadí: 5. sl., 2. sl., 1. sl., 3. sl., 4. sloupec:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & a-3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 7-a & a^2-a+8 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & a-3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7-a & a^2-a+8 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim}$$

$$\overset{2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & a-4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 7-a & a^2-a+8 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a & a^2-a \end{pmatrix} \overset{4)}{\sim}$$

$$\overset{4)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & -10 \\ 0 & -2 & 3 & a-2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a(a-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} h = 3 \text{ pro } a = 1, \\ h = 4 \text{ pro } a = 0, \\ h = 5 \text{ pro } a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}. \end{array}$$

Popis úprav:

1) nové pořadí řádků: 2. ř., 4. ř., 1. ř., 3. ř., 5. řádek,
2) ke 4. řádku přičteme 1. řádek,
3) ke 4. řádku přičteme 3. řádek a k 5. řádku přičteme 3. řádek vynásobený (-2),
4) k 5. řádku přičteme 4. řádek.

■

***Příklad* 24**. Mějme vektory $\vec{a} = (1,3,0,2)$, $\vec{b} = (-1,0,1,1)$, $\vec{c} = (0,1,4,-1)$, $\vec{d} = (0,4,5,2)$. Určete, zda vektory jsou lineárně nezávislé či závislé. Jaká je dimenze vektorového prostoru V, který je danými vektory generován?

Řešení: Z daných vektorů vytvoříme matici a určíme její hodnost h. Bude-li $h = 4$ (počet vektorů), pak vektory jsou nezávislé, bude-li $h < 4$, pak jsou vektory závislé a v obou případech je $\dim V = h$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad h = 3 \Rightarrow \text{ vektory jsou lineárně závislé a } \dim V = 3.$$

Popis úprav:

1) ke 2. řádku přičteme 1. řádek,
2) vyměníme 2. a 3. řádek,
3) ke 3. řádku přičteme 2. řádek vynásobený (-3) a ke 4. řádku přičteme 2. řádek vynásobený (-4).

■

***Příklad* 25**. Určete, pro které hodnoty parametru $k \in \mathbb{R}$ bude vektor $\vec{c}$ lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$: $\vec{a} = (-1,-1,2)$, $\vec{b} = (2,1,-1)$, $\vec{c} = (k,0,2k+1)$.

Řešení: Vektor $\vec{c}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ právě tehdy, když trojice vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je lineárně závislá. To nastane právě tehdy, když matice utvořená ze souřadnic vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ má hodnost $h < 3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ k & 0 & 2k+1 \end{pmatrix} \overset{1)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & k & 2k+1 \end{pmatrix} \overset{2)}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2k+1 \end{pmatrix} \overset{3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix} \Rightarrow k+1 = 0 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow \quad \vec{c} = (-1,0,-1) = -\vec{a} - \vec{b}.$$

Popis úprav:

1) vyměníme 1. a 2. sloupec,
2) ke 2. řádku přičteme 1. řádek,
3) ke 3. řádku přičteme 2. řádek vynásobený $(-k)$.

■

***Příklad* 26**. Vypočtěte determinanty:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}; \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 2+i & 3-2\,i \\ 3+2\,i & 2-i \end{vmatrix}; \qquad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}.$$

Řešení:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \;=\; 3\cdot 2-(-4\cdot 5) \;=\; 26;$

b) $\begin{vmatrix} 2+i & 3-2\,i \\ 3+2\,i & 2-i \end{vmatrix} \;=\; (2+i)(2-i)-(3+2\,i)(3-2\,i) \;=\; 4+1-(9+4) \;=\; -8;$

c) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} \;=\; \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \;=\; \sin(\alpha-\beta).$

∎

***Příklad* 27**. Vypočtěte determinanty Sarrusovým pravidlem:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -7 \end{vmatrix}; \qquad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & a & a\,c \\ 1 & b & b\,c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}; \qquad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} 4 & 49 & 80 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & 21 & 40 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

a) K determinantu připíšeme první dva řádky, potom sečteme součiny ve směru hlavní diagonály a odečteme součiny ve směru vedlejší diagonály:

$$\begin{array}{c} \searrow + \qquad\qquad - \swarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 5 & -7 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{matrix} \end{array} \begin{aligned} &= 1\cdot(-3)\cdot(-7)+2\cdot 5\cdot 1+(-3)\cdot 2\cdot 4-\Big(1\cdot(-3)\cdot(-3)+ \\ &+4\cdot 5\cdot 1+(-7)\cdot 2\cdot 2\Big) = 21+10-24-9-20+28 \;=\; 6. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{c} \searrow + \qquad\qquad - \swarrow \\ \begin{vmatrix} 1 & a & a\,c \\ 1 & b & b\,c \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & a & a\,c \\ 1 & b & b\,c \end{matrix} \end{array} \;=\; b\,c^2+a\,c^2+a\,b\,c-a\,b\,c-b\,c^2-a\,c^2 \;=\; 0.$$

Ke stejnému výsledku bychom mohli dospět po úpravě příslušné matice. Stačí si všimnout, že třetí sloupec je násobkem druhého sloupce, čili sloupce jsou lineárně závislé a determinant má hodnotu 0.

c) Jistě si všimneme, že ze druhého sloupce lze vytknout 7 před determinant a ze třetího sloupce 40. Tím zjednodušíme zápis a potom dopočítáme:

$$\begin{vmatrix} 4 & 49 & 80 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & 21 & 40 \end{vmatrix} \;=\; 7\cdot 40\cdot \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 4 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array} \;=\; 7\cdot 40\cdot(4-6-4+7) \;=\; 280.$$

∎

***Příklad* 28**. Vypočtěte determinant rozvojem podle některého řádku nebo sloupce:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 9 & -7 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Zvolíme rozvoj podle prvního řádku, jelikož jeho prvky jsou poměrně vysoká čísla

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}\, A_{11} + a_{12}\, A_{12} + a_{13}\, A_{13} + a_{14}\, A_{14},$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j}\, A^*_{ij}$ a A^*_{ij} je determinant matice typu (3, 3) vzniklé z původní matice $\boldsymbol{A}$ vynecháním i - tého řádku a j - tého sloupce.

$$\det \boldsymbol{A} = 7 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 9 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} - 7 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 7(6+3+12+12-2+9) - 6(18+6+3+6-6+9) + 9(-9+2+6-3-12+3) +$$

$$+7(3-2+6-3+12-1) = 7 \cdot 40 - 6 \cdot 36 + 9 \cdot (-13) + 7 \cdot 15 = 280 - 216 - 117 + 105 = 52.$$

Doufáme, že se čtenář přesvědčil, že takový přímý rozvoj je velmi zdlouhavý.
V dalších příkladech budeme postupovat šikovněji.

■

***Příklad* 29**. Vypočtěte determinant vhodnou úpravou a vhodným rozvojem podle řádku nebo sloupce:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -4 & -1 \end{vmatrix}.$$

Řešení: Z prvního řádku vytkneme 2 před determinant a ze třetího sloupce 4, potom upravíme třetí sloupec tak, aby na prvním místě zůstala 1 a dále byly samé nuly:

$$\det \boldsymbol{A} = 2 \cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

(nyní provedeme rozvoj podle 3. sloupce a tím dostaneme jediný determinant matice 3. řádu)

$$= 8 \cdot \boxed{1} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{2} \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \text{(opět provedeme rozvoj podle 3. sloupce)} =$$

$$= 8 \cdot \boxed{2} \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -16 \cdot (1+1) = -32.$$

■

***Příklad* 30**. Vypočtěte determinant úpravou matice na trojúhelníkový tvar:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -7 & 8 \\ 2 & 10 & 4 & -9 \\ 2 & 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Řešení:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ -2 & -4 & -7 & 8 \\ 2 & 10 & 4 & -9 \\ 2 & 12 & 5 & 7 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 13 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{vmatrix} \overset{3)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} \overset{4)}{=} 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -7 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} \overset{5)}{=} 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} -6 & -7 \\ 0 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-6) \cdot 14 = -168.$$

Popis úprav:

1) k 2. řádku přičteme 1. řádek vynásobený 2, ke 3. řádku přičteme 1. řádek vynásobený (-2) a ke 4. řádku přičteme 1. řádek vynásobený (-2);
2) ke 3. řádku přičteme 2. řádek vynásobený (-2) a ke 4. řádku přičteme 2. řádek vynásobený (-3);
3) od 4. řádku odečteme 3. řádek;
4) provedeme rozvoj podle 1. sloupce;
5) provedeme rozvoj podle 1. sloupce.

Podíváme-li se pozorně na trojúhelníkový tvar matice $\boldsymbol{A}$, pak zjistíme, že hodnota determinantu se rovná součinu čísel na hlavní diagonále, což je známé tvrzení. Tedy úpravy 4) a 5) byly zbytečné a

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 & -3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-6} & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14} \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-6) \cdot 14 = -168.$$

■

***Příklad* 31.** K daným maticím spočítejte matice inverzní, pokud existují.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}; \ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ neexistuje, protože $\boldsymbol{A}$ není čtvercová,

$\det \boldsymbol{B} = 6 - 2 = 4 \neq 0 \implies \boldsymbol{B}^{-1}$ existuje,

$\det \boldsymbol{C} = 12 - 12 = 0 \implies \boldsymbol{C}^{-1}$ neexistuje,

$\det \boldsymbol{D} = -10 + 3 = -7 \neq 0 \implies \boldsymbol{D}^{-1}$ existuje.

Označíme-li matici $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, pak $\boldsymbol{B}^{-1} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{B}} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}^T =$

$$= \frac{1}{\det \boldsymbol{B}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{D}^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

■

Příklad 32. Vypočítejte inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$, je-li $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

a) Použijeme výraz

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T, \ \det \boldsymbol{A} = -2+6-2 \neq 0 \Rightarrow \text{matice } \boldsymbol{A}^{-1} \text{ existuje.}$$

Nyní spočítáme jednotlivé algebraické doplňky:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Dosadíme do $\boldsymbol{A}^{-1}$ a dopočítáme

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Spočítáme $\boldsymbol{A}^{-1}$ ještě jednou pomocí Gaussova algoritmu, podle kterého upravujeme matici $\left(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}\right)$ tak, aby vznikla matice $\left(\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A}^{-1}\right)$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{1)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{3)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \overset{4)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & -2 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \overset{5)}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{3}{2} & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Popis postupu: Veškeré úpravy jsou řádkové,

1) 1. řádek vynásobíme (-2) a přičteme k 2. řádku,
2) 2. řádek vydělíme 4,
3) 2. řádek vynásobíme (-3) a přičteme k 3. řádku,
4) 3. řádek přičteme k 2. řádku a k 1. řádku přičteme 3. řádek vynásobený (-2),
5) 3. řádek vynásobíme (2) a k 1. řádku přičteme 2. řádek.

Poznámka: Je-li matice $\boldsymbol{A}$ typu $(4,4)$ nebo vyšší, pak k nalezení $\boldsymbol{A}^{-1}$ je Gaussův algoritmus výhodnější.

■

***Příklad* 33.** Určete matici $\boldsymbol{X}$, pro kterou platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}=2\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, kde

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix};\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-5\\1&-3\end{pmatrix}.$$

Řešení: Danou rovnici vynásobíme zleva maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\Big(2\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\Big)$$

pak použijeme rovnost $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ a postupně vznikne

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}=2\,\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}=2\,\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}.$$

Nyní obě strany rovnice vynásobíme zprava maticí $\boldsymbol{B}^{-1}$:

$$\boldsymbol{X}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{B}^{-1}=\Big(2\,\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\Big)\,\boldsymbol{B}^{-1}\quad \text{a po úpravě dostáváme}$$

$$\boldsymbol{X}=\Big(2\,\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\Big)\,\boldsymbol{B}^{-1}.$$

Spočítáme si matice $\boldsymbol{A}^{-1}$, $\boldsymbol{B}^{-1}$, dosadíme a dopočítáme matici $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}-3&5\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-5\\1&-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}=\left[2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&\frac{3}{2}\\1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}3&-5\\1&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{2}\\1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-5\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-3\\\frac{9}{2}&-8\end{pmatrix}.$$

■

***Příklad* 34.** Určete matici $\boldsymbol{X}$, pro kterou platí $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\5&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&10&-3\\-6&20&-7\end{pmatrix}.$$

Řešení: Z dané rovnice zjistíme, že matice $\boldsymbol{X}$ musí být typu $(2,3)$, aby platil vztah $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$. K tomu, abychom hledanou matici spočítali, vynásobíme zleva danou rovnici maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ a obdržíme $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{12-10}\begin{pmatrix}4&-2\\-5&3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-5&3\end{pmatrix},\ \text{potom}$$

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 10 & -3 \\ -6 & 20 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -8 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

■

***Příklad* 35**. Řešte maticovou rovnici $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^T$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Rovnici upravíme vytknutím matice $\boldsymbol{X}$ za závorku zprava $\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^T$,

potom vynásobením zleva maticí $\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}$ získáme matici $\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^T$.

Nyní spočítáme potřebné matice a pak dosadíme:

$$\left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 26 \\ 14 & 48 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{X} = \left(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 26 \\ 14 & 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 30 \\ -14 & -64 \end{pmatrix}.$$

■

***Příklad* 36**. Určete matici $\boldsymbol{X}$ z rovnice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešení: Danou rovnici napíšeme v maticovém zápisu:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{C}.$$

Podle předcházejícího příkladu bychom mohli vyjádřit matici $\boldsymbol{X}$ pomocí maticového součinu $\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}^{-1}$, avšak je zřejmé, že $\boldsymbol{A}^{-1}$ neexistuje, protože jsou řádky závislé, a tedy $\det \boldsymbol{A} = 0$. Proto použijeme jen matici $\boldsymbol{B}^{-1}$, která existuje.

Vypočítáme $\boldsymbol{B}^{-1}$ a součin $-\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$, takže $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X} = -\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$.

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$-\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme dostali rovnici $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

Napíšeme matici $\boldsymbol{X}$ v prvcích: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a rozepišme předcházející součin, ze kterého dostaneme soustavu pro neznámé $a,\ b,\ c,\ d$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ 4a+2c & 4b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2a & + & c & = & -1 \\ 4a & + & 2c & = & -2 \\ 2b & + & d & = & 2 \\ 4b & + & 2d & = & 4 \end{array} \right. .$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení: $c = -1-2a,\ d = 2-2b,\quad a,b \in \mathbb{R}$.

Potom řešením dané úlohy je nekonečně mnoho matic

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ -1-2\,a & 2-2\,b \end{pmatrix}, \quad \text{kde } a,\ b\ \in \mathbb{R}.$$

■

37. Vypočítejte součiny:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; **b)** $\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\left[\textbf{a)} \begin{pmatrix} 3 \\ 23 \end{pmatrix};\ \textbf{b)} \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 23 & 5 \end{pmatrix};\ \textbf{c)} \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 7 & 20 \end{pmatrix};\ \textbf{d)}\ \text{neexistuje};\ \textbf{e)} \begin{pmatrix} 10 \\ 21 \\ 23 \end{pmatrix};\ \textbf{f)} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$

38. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Určete součiny $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ a $\left(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}\right)^T$.

$\left[\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix},\quad \left(\boldsymbol{BA}\right)^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

39. Spočítejte matici $\boldsymbol{X}$, která vyhovuje rovnici $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}^T - \boldsymbol{E}\right) = 2\boldsymbol{X} - \boldsymbol{B}$, je-li $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\left[\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}\right]$

40. Určete hodnost matic:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 11 & 10 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$[h(\boldsymbol{A}) = 3,\quad h(\boldsymbol{B}) = 3,\quad h(\boldsymbol{C}) = 2]$

41. Určete hodnost matice v závislosti na volbě parametru $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2k-2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{l} h = 4 \text{ pro } k \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1, 3\} \\ h = 3 \text{ pro } k \in \{-2, 1\} \\ h = 2 \text{ pro } k = 3 \end{array}\right]$$

42. Rozhodněte, zda dané vektory tvoří bázi prostoru $V(\mathbb{E}_4)$ (použijte hodnost matice):

a) $(2,-1,1,3),\ (1,0,2,-1),\ (0,1,-1,1),\ (3,0,2,3)$;

b) $(1,2,-1,-2),\ (0,1,1,1),\ (2,1,0,1),\ (1,-2,-2,1)$;

c) $(1,2,-3,0),\ (1,1,0,1),\ (0,0,2,1),\ (0,1,0,1),\ (3,-1,1,0)$.

[a) ne; b) ano; c) ne]

43. Určete, pro které hodnoty parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ jsou dané vektory lineárně závislé:

a) $(2,-1,3),\ (4,1,5),\ (-1,2,\lambda)$;

b) $(1,2,4),\ (2,\lambda,-4),\ (-1,-2,2\lambda)$;

c) $(2,-1,-1,3),\ (3,1,2,-1),\ (1,-3,-4,7),\ (1,3,\lambda,4)$.

[a) $\lambda = -2$; b) $\lambda \in \{-2, 4\}$; c) $\lambda \in \mathbb{R}$]

44. Zjistěte, zda vektory jsou lineárně závislé či nezávislé a určete dimenzi vektorového prostoru, který je jimi generován:

a) $(2,1,4),\ (3,-2,1),\ (3,5,11)$;

b) $(2,-1,1,3),\ (1,1,3,1),\ (-1,3,2,1),\ (-1,0,-3,2)$.

[a) LN, dim = 3; b) LZ, dim = 3]

45. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

[a) 1; b) 0; c) 9]

46. Vypočtěte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 12 & 16 & 24 & 33 \\ 20 & 25 & 35 & 45 \\ 20 & 27 & 36 & 55 \\ 28 & 38 & 51 & 78 \end{vmatrix}$.

[a) 24; b) 0; c) −20]

47. Jsou dány matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Určete $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{B}^{-1}, (\boldsymbol{AB})^{-1}$.

$$\left[\boldsymbol{A}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},\ (\boldsymbol{AB})^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -14 & -10 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}\right]$$

48. Určete inverzní matice k maticím:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left[\textbf{a)}\ \text{neexistuje};\ \textbf{b)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \textbf{c)} \begin{pmatrix} 10 & -1 & -4 & -9 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

49. Spočítejte matici $\boldsymbol{X}$ z rovnice

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 15 & 25 \\ -10 & 20 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}^T$

c) $2\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}$, kde $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

(použijte $2\,\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} - E)\boldsymbol{X}$)

[**a)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$]

I.3. Soustavy lineárních rovnic

***Příklad* 50**. Vyřešte danou soustavu lineárních rovnic

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & + & z & = & 1 \\ 2\,x & & & + & z & = & -4 \\ 5\,x & - & 3\,y & + & z & = & -13 \end{array}\right.$$

pomocí **a)** Cramerova pravidla; **b)** inverzní matice.

Řešení: K tomu, abychom mohli použít jak Cramerova pravidla, tak i inverzní matice, musí být matice soustavy $\boldsymbol{A}$ regulární (jinak řečeno: čtvercová s nenulovým determinantem). Připomeňme si, že regulární matice $\boldsymbol{A}$ zaručuje existenci jediného řešení. Danou soustavu napíšeme ve tvaru $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Spočítáme $\det\boldsymbol{A}=0+10-6-0+3-4=3\neq 0$. Nyní víme, že $\boldsymbol{A}$ je regulární a přejdeme k řešení soustavy.

a) Vypočítáme determinanty $\det\boldsymbol{A}_x$, $\det\boldsymbol{A}_y$, $\det\boldsymbol{A}_z$ odpovídající jednotlivým neznámým:

$$\det\boldsymbol{A}_x=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -13 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-26+12+3+8=-3,$$

kde $\det\boldsymbol{A}_x$ je determinant matice vzniklé z matice $\boldsymbol{A}$ tak, že sloupec odpovídající neznámé x je nahrazen sloupcem $\boldsymbol{B}$. Podobně

$$\det\boldsymbol{A}_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 5 & -13 & 1 \end{vmatrix}=-4-26+5+20+13-2=6,$$

$$\det\boldsymbol{A}_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 5 & -3 & -13 \end{vmatrix}=-40-6-12+52=-6.$$

Potom $x=\dfrac{\det\boldsymbol{A}_x}{\det\boldsymbol{A}}=\dfrac{-3}{3}=-1,\quad y=\dfrac{\det\boldsymbol{A}_y}{\det\boldsymbol{A}}=\dfrac{6}{3}=2,\quad z=\dfrac{\det\boldsymbol{A}_z}{\det\boldsymbol{A}}=\dfrac{-6}{3}=-2.$

b) Vrátíme se k maticové rovnici $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, ze které spočítáme $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}$. Určíme

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ -5 & -4 & 13 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}^T,$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -6 & 13 & -4 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-5&2\\3&-4&1\\-6&13&-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-4\\-13\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3+20-26\\3+16-13\\-6-52+52\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix};\qquad x=-1,\ y=2,\ z=-2.$$

■

Poznámka: Čtenář se určitě přesvědčil, že oba použité postupy jsou i v tomto jednoduchém příkladě velmi pracné a použitelné jen v případě existence právě jednoho řešení.

***Příklad* 51**. Zjistěte, zda je možné použít při řešení následujících soustav rovnic Cramerovo pravidlo, resp. inverzní matice.

a) $\begin{cases}2x+3y=7\\3x-y=5\end{cases};$ **b)** $\begin{cases}6x-2y=10\\-3x+y=2\end{cases};$

c) $\begin{cases}x+3y-5z=-10\\-y+2z=5\\x+2y-4z=-7\end{cases};$ **d)** $\begin{cases}2x-y+3z=5\\-x+2y-z=3\\4x-5y+5z=0\end{cases}.$

Řešení: Všechny soustavy mají čtvercové matice soustav.

Je-li determinant matice dané soustavy $\left\langle\begin{matrix}=0\\\neq 0\end{matrix}\right.$; pak $\left\langle\begin{matrix}\textbf{nelze}\\\textbf{lze}\end{matrix}\right.$ použít jak Cramerova pravidla tak i inverzní matice.

a) $\begin{vmatrix}2&3\\3&-1\end{vmatrix}=-11\neq 0\quad\Rightarrow$ lze použít;

b) $\begin{vmatrix}6&-2\\-3&1\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow$ nelze;

c) $\begin{vmatrix}1&3&-5\\0&-1&2\\1&2&-4\end{vmatrix}=4+6-5-4=1\neq 0\quad\Rightarrow$ lze;

d) $\begin{vmatrix}2&-1&3\\-1&2&-1\\4&-5&5\end{vmatrix}=20+4+15-24-10-5=0\quad\Rightarrow$ nelze.

Poznámka: V případě, že determinant matice soustavy je roven 0 víme, že soustava nemůže mít právě jedno řešení, ale nerozhodli jsme, zda má nekonečně mnoho řešení nebo zda řešení neexistuje. ■

***Příklad* 52**. Řešte soustavu Gaussovou eliminační metodou:

$$\begin{cases}x-y+2z+3u=-6\\y+2z-u=-1\\2x+y+z+3u=3\\3x-y+z-u=-2\end{cases}.$$

Řešení: Podle Gaussovy eliminační metody potřebujeme rozšířenou matici soustavy upravit pomocí ekvivalentních úprav na trojúhelníkový tvar:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 15 \\ 0 & 2 & -5 & -10 & 16 \end{array}\right) \sim \text{(3. řádek vydělíme 3)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -10 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & -8 & 18 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right).$$

Z výsledného trojúhelníkového tvaru matice usoudíme podle Frobeniovy věty, že soustava $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ má jediné řešení, protože $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 4$ (počet neznámých). Napíšeme k této trojúhelníkové matici příslušnou soustavu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & 2z & + & 3u & = & -6 \\ & & y & + & 2z & - & u & = & -1 \\ & & & & -z & & & = & 2 \\ & & & & & & -8u & = & 0 \end{array}\right. , \text{ ze které snadno přečteme řešení: } u = 0,\ z = -2,\ y = 3,\ x = 1.$$

∎

***Příklad* 53**. Řešte soustavu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -x & + & y & + & z & + & 2u & = & 9 \\ 3x & - & y & - & z & + & 3u & = & -5 \\ 2x & + & y & & & + & u & = & -3 \\ 4x & + & y & & & + & 6u & = & 2 \end{array}\right. .$$

Řešení: Soustavu vyřešíme Gaussovou eliminační metodou, ale než napíšeme rozšířenou matici, prohlédneme si pozorně soustavu a stanovíme pořadí sloupců tak, aby úprava byla snadnější.

1. sloupec budou tvořit koeficienty před neznámou z,
2. sloupec budou tvořit koeficienty před neznámou y,
3. sloupec budou tvořit koeficienty před neznámou x,
4. sloupec budou tvořit koeficienty před neznámou u.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & y & x & u \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left| \begin{array}{c} \text{druhý řádek dáme jako poslední} \\ \text{a pak upravíme obvyklým způsobem} \end{array} \right| \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad h(\boldsymbol{A}) = 3 \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 4.$$

Podle Frobeniovy věty soustava nemá řešení. Stejný výsledek vyplývá z posledního řádku přepsaného do tvaru rovnice: $0 = 1,$ což je nepravdivý výrok.

$\blacksquare$

***Příklad* 54**. Řešte soustavu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & + & u & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & - & u & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & - & 3u & = & -1 \\ 5x & - & y & - & 4z & + & 6u & = & 4 \end{array}\right. .$$

Řešení: Sloupce napíšeme v pořadí neznámých $z,\ u,\ x,\ y$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & u & x & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 5 & -1 & 4 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -9 & 12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -9 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3 < 4 \ \Rightarrow$ podle Frobeniovy věty má soustava nekonečně mnoho řešení závislých na jednom parametru. Napišme soustavu příslušnou k poslední matici:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} -z & + & u & + & x & + & 2y & = & -2 \\ & & -u & + & x & + & 5y & = & -5 \\ & & & & 3x & + & y & = & 2 \end{array}\right. .$$

Zvolíme $x = t$, kde $t \in \mathbb{R}$ a postupně určíme

$y = 2 - 3t,\ u = x + 5y + 5 = t + 5(2 - 3t) + 5 = 15 - 14t,$
$z = u + x + 2y + 2 = 15 - 14t + t + 2(2 - 3t) + 2 = 21 - 19t.$

Výsledné řešení napíšeme jako čtveřici, která se dá zapsat vektorově
$(x, y, z, u) = (t, 2-3t, 21-19t, 15-14t) = (0, 2, 21, 15)+(1, -3, -19, -14)\cdot t, \quad t \in \mathbb{R}.$

Poznámka: Kdybychom zvolili jinou neznámou jako parametr, pak čtveřice řešení (x, y, z, u) by měla zcela odlišný zápis.

$\blacksquare$

***Příklad* 55**. Řešte soustavu.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & & & + & 7x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6 \end{array}\right. .$$

Řešení: Zvolme následující pořadí řádků: 2., 3., 4., 1. a upravme první sloupec

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 7 & -4 & -5 & -11 & -12 \end{array}\right).$$

Snadno zpozorujeme, že 4. řádek je součtem 2. a 3. řádku, a proto ho můžeme vynechat.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -6 & -4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 & -4 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3 < 5.$$

Zvolíme $x_2 = t,\ x_5 = s; \quad t,\ s \in \mathbb{R}$ a potom
$x_3 = -2\,x_2 + 6\,x_5 - 4 = -2\,t + 6\,s - 4,$
$-5\,x_4 = 5\,x_3 - 5\,x_2 + 5\,x_5 - 8 = 5\,(-2\,t + 6\,s - 4) - 5\,t + 5\,s - 8 = -15\,t + 35\,s - 28,$
$x_4 = 3\,t - 7\,s + \frac{28}{5},$
$x_1 = -2\,x_4 - 3\,x_3 + x_2 - 3\,x_5 + 5 = -2\,(3\,t - 7\,s + \frac{28}{5}) - 3\,(-2\,t + 6\,s - 4) + t - 3\,s + 5 =$
$= t - 7\,s - \frac{56}{5} + 17 = t - 7\,s + \frac{29}{5},$
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{29}{5} + t - 7\,s, t, -4 - 2\,t + 6\,s, \frac{28}{5} + 3\,t - 7\,s, s\right) =$
$= \left(\frac{29}{5}, 0, -4, \frac{28}{5}, 0\right) + (1, 1, -2, 3, 0) \cdot t + (-7, 0, 6, -7, 1) \cdot s \qquad t, s \in \mathbb{R}.$

■

***Příklad* 56**. Pomocí Frobeniovy věty proveďte diskuzi řešení soustav v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 3\,y & + & z & = & 6 \\ -x & + & 3\,y & - & z & = & -5 \\ a\,x & + & 6\,y & + & 2\,z & = & c \end{array}\right.$; **b)** $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & c \\ a\,x & + & 2\,y & - & 3\,z & = & 5 \\ 2\,x & - & b\,y & + & b\,z & = & 2 \end{array}\right.$;

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 5 \\ 3\,x & + & y & + & 2\,z & = & k \\ 2\,x & - & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$; **d)** $\left\{\begin{array}{rcrcr} a\,x & - & 2\,y & = & a \\ 3\,x & + & (a-5)\,y & = & 3 \end{array}\right.$
vyřešte soustavu pro $a = 2, a = 3$;

e) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ x & - & a\,y & = & a^2 \\ a\,x & - & y & = & a \end{array}\right.$.

Řešení:

a) Zvolíme následující pořadí sloupců: $z,\ y,\ x$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & -5 \\ 2 & 6 & a & c \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-4 & c-12 \end{array}\right).$$

Soustava
- má jediné řešení pro $a \neq 4,\ h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3,$
- má nekonečně mnoho řešení pro $a = 4$ a $c = 12,\ h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 2,$
- nemá řešení pro $a = 4$ a $c \neq 12,\ h(\boldsymbol{A}) = 2 \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3.$

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y & z & x \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 1 & c \\ 2 & -3 & a & 5 \\ -b & b & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrc|c} 1 & -1 & 1 & c \\ 0 & -1 & a-2 & 5-2\,c \\ 0 & 0 & 2+b & 2+b\,c \end{array}\right).$$

Soustava
- má jediné řešení pro $b \neq -2$, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3$,
- má nekonečně mnoho řešení pro $b = -2$ a $c = 1$, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 2$,
- nemá řešení pro $b = -2$ a $c \neq 1$, $h(\boldsymbol{A}) = 2 \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3$.

Parametr a neovlivňuje počet řešení, tj. $a \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & k \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & k-15 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & k-5 \end{array}\right)$$

Pro $k = 5 \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 2$,
pro $k \neq 5 \quad \Rightarrow$ řešení neexistuje, $h(\boldsymbol{A}) = 2 \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3$,
soustava pro žádné k nemůže mít jediné řešení.

d) Zde bude lepší začít determinantem matice soustavy

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -2 \\ 3 & a-5 \end{vmatrix} = a\,(a-5) + 6 = a^2 - 5\,a + 6 = (a-2)\,(a-3),$$

$\Delta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{2,3\} \quad \Rightarrow$ existuje jediné řešení.

Postupně dosadíme do dané soustavy $a = 2$ a $a = 3$:

$a = 2: \begin{cases} 2\,x - 2\,y = 2 \\ 3\,x - 3\,y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení: $y = x - 1$, $(x,y) = (t, t-1)$, $t \in \mathbb{R}$;

$a = 3: \begin{cases} 3\,x - 2\,y = 3 \\ 3\,x - 2\,y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow$ nekonečně mnoho řešení: $y = \dfrac{3\,x-3}{2}$, $(x,y) = \left(t, \dfrac{3\,t-3}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

<u>Závěr</u>: soustava má pro všechna $a \in \mathbb{R}$ řešení.

e)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ a & -1 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-1 & a^2-1 \\ 0 & -1-a & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-1 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{array}\right)$$

Pro $a \neq \pm 1$ řešení neexistuje, $h(\boldsymbol{A}) = 2 \neq h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 3$,
pro $a = 1$ existuje jediné řešení, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 2$,
pro $a = -1$ existuje nekonečně mnoho řešení, $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = 1$.

■

***Příklad* 57**. Řešte homogenní soustavy Gaussovou eliminační metodou

a) $\begin{cases} x + y - 4\,z = 0 \\ x + 2\,y + 3\,z = 0 \\ x + 6\,y + 10\,z = 0 \\ 4\,x + 7\,y + 5\,z = 0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x - 3\,y + 5\,z - 5\,u = 0 \\ 2\,x + 4\,y - 5\,z + 3\,u = 0 \\ 4\,x - 2\,y + 5\,z - 7\,u = 0 \\ 6\,x + 2\,y + 3\,u = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + y - z + u = 0 \\ 2\,x - 3\,y + 2\,z + 3\,u - v = 0 \\ -x + y + z + u = 0 \\ 2\,x - y + 2\,z + 5\,u - v = 0 \end{cases}$.

Řešení: Víme, že homogenní soustava má vždy triviální řešení. Zbývá určit, zda existuje též netriviální řešení. Ve všech případech napíšeme matici soustavy, nulový sloupec pravých stran nepíšeme. Je-li $h(\boldsymbol{A}) = n$ (počet neznámých), pak existuje **jen triviální** řešení, je-li $h(\boldsymbol{A}) < n$ existuje **též netriviální** řešení.

Množina všech řešení tvoří vektorový prostor V dimenze $n - h(\boldsymbol{A})$.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 14 \\ 0 & 3 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 3 \Rightarrow$$

jediné řešení je **triviální** $x = y = z = 0$.

b)

$$\begin{array}{c} \quad z \quad\; y \quad\; x \quad\; u \\ \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -5 \\ -5 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$h = 3 \quad \Rightarrow \quad$ soustava má **netriviální** řešení, $\dim V = 1$,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 5z & - & 3y & + & x & - & 5u & = & 0 \\ & & y & + & 3x & - & 2u & = & 0 \\ & & & & & & 7u & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad u = 0,\ x = t,\ y = -3t,\ z = -2t,$$

$(x, y, z, u) = (1, -3, -2, 0)\, t, \quad t \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{array}{c} \quad x \quad\; y \quad\; z \quad\; u \quad\; v \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{c} \quad x \quad\; v \quad\; z \quad\; u \quad\; y \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad h = 3 \quad \Rightarrow$$

soustava má **netriviální** řešení a $\dim V = 2$.

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & & -z & + & u & + & y = 0 \\ & & -v & + & 4z & + & u & - & 5y = 0 \\ & & & & & & u & + & y = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} y = t,\ z = s \\ u = -t, \\ v = 4z + u - 5y = 4s - 6t, \\ x = z - u - y = s + t - t = s \end{array}$$

$(x, y, z, u, v) = (s, t, s, -t, 4s - 6t) = (0, 1, 0, -1, -6)\, t + (1, 0, 1, 0, 4)\, s, \quad t, s \in \mathbb{R}$.

■

***Příklad* 58**. Mějme vektory $\vec{a} = (2, 1, -3, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{c} = (3, -1, 0, -2)$, $\vec{d} = (10, 7, 3, 12)$. Určete všechny konstanty $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ splňující rovnici $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d} = \vec{0}$.

Řešení: Spočítáme konstanty a provedeme diskuzi:

a) existuje-li pouze triviální řešení $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$, pak vektory budou lineárně nezávislé.

b) existuje-li aspoň jedno netriviální řešení (aspoň jedna z konstant $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ je různá od nuly), pak vektory budou lineárně závislé.

Nalézt $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ znamená vyřešit homogenní soustavu. Vektory napíšeme ve sloupcích

$$\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}+\delta\,\vec{d}=\alpha\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\-2\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}10\\7\\3\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

a po porovnání souřadnic dostáváme homogenní soustavu:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}2\,\alpha&+&\beta&+&3\,\gamma&+&10\,\delta&=&0\\\alpha&+&2\,\beta&-&\gamma&+&7\,\delta&=&0\\-3\,\alpha&+&3\,\beta&&&+&3\,\delta&=&0\\\alpha&+&4\,\beta&-&2\,\gamma&+&12\,\delta&=&0\end{array}\right.,$$

kterou vyřešíme Gaussovou eliminační metodou: 3. řádek vydělíme třemi a napíšeme jako první

$$\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\2&1&3&10\\1&2&-1&7\\1&4&-2&12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&3&3&12\\0&3&-1&8\\0&5&-2&13\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&4\\0&3&-1&8\\0&5&-2&13\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}-1&1&0&1\\0&1&1&4\\0&0&-4&-4\\0&0&-7&-7\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad h=3\quad\Rightarrow$$ existuje **netriviální** řešení, tedy vektory jsou **závislé** a

$\delta=-t,\ \gamma=t,\ \beta=3t,\ \alpha=2t,\quad(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(2,3,1,-1)t.$

Konkrétní závislost vektorů bude

$2\,\vec{a}+3\,\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}=\vec{0}$ nebo $\vec{d}=2\,\vec{a}+3\,\vec{b}+\vec{c}.$

■

***Příklad* 59**. Kolik řešení mají následující soustavy v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů? Pro zadané hodnoty parametrů soustavy vyřešte:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&+&y&-&2\,z&=&0\\x&+&a\,y&+&z&=&0\\x&-&y&-&z&=&0\end{array}\right.;$ $a=2$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl}a\,x&-&2\,y&+&z&=&0\\x&-&2\,a\,y&+&z&=&0\\x&-&2\,y&+&a\,z&=&0\end{array}\right.;$ $a=1$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl}x&-&3\,y&+&2\,z&=&0\\2\,x&+&y&+&z&=&0\\3\,x&+&a\,y&+&b\,z&=&0\end{array}\right.,\qquad a=2,\ b=6.$

Řešení:

a)

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x&z&y\end{array}\\\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&1&a\\1&-1&-1\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-1&-1\\1&1&a\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-1&2\\0&3&a-1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a+5 \end{pmatrix} \quad \left\langle \begin{array}{l} \text{pro } a=-5 \ \text{ existuje nekonečně mnoho řešení} \\ \text{pro } a \neq -5 \ \text{ existuje jen triviální řešení} \end{array} \right. .$$

Pro dané $a = 2 \neq -5$ platí $x = y = z = 0$.

b)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z & y & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & -2\,a & 1 \\ a & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & -2\,a+2 & 1-a \\ 0 & -2+2\,a & 1-a^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 2\,(1-a) & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 2\,(1-a) & 1-a \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{pro } \ a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \ \text{ je } \ h(\boldsymbol{A}) = 3 \ \text{ a soustava má jen triviální řešení,} \\ \text{pro } \ a \in \{-2, 1\} \ \text{ je } \ h(\boldsymbol{A}) < 3, \ \text{ existuje nekonečně mnoho řešení.} \end{array} \right.$$

Pro dané $a = 1$ je $h(\boldsymbol{A}) = 1$, dimenze prostoru řešení je 2. Jediný nenulový řádek nám dá rovnici $z - 2\,y + x = 0$, ze které dostáváme $z = 2\,y - x$ a potom všechna řešení budou $(x, y, z) = (t, s, 2\,s - t) = (1, 0, -1)\,t + (0, 1, 2)\,s, \qquad s, t \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & a & b \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & a+9 & b-6 \end{pmatrix} \Rightarrow h = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} \right. , \text{ jestliže poslední}$$

dva řádky budou $\left\langle \begin{array}{l} \text{závislé} \\ \text{nezávislé} \end{array} \right.$ nebo bude-li determinant $\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ a+9 & b-6 \end{vmatrix} =$

$$= 7\,(b-6) + 3\,(a+9) = 7\,b + 3\,a - 15 \ \left\langle \begin{array}{l} = 0, \quad a = 5 - \dfrac{7}{3}\,b \\ \neq 0, \quad a \neq 5 - \dfrac{7}{3}\,b \end{array} \right. .$$

Pro $a = 2,\ b = 6$ máme $2 \neq 5–7 \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad$ řešení bude triviální $x = y = z = 0$.

■

• Řešte soustavy:

60. Cramerovým pravidlem

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & - & y & + & 3\,z & = & 13 \\ x & + & 3\,y & - & z & = & -8 \\ x & + & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. ;$$

$[x = 1,\ y = -2,\ z = 3]$

61. Pomocí inverzní matice

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & 2\,y & + & z & = & -1 \\ 3\,x & + & 2\,y & + & 3\,z & = & 3 \end{array} \right. ;$$

$[x = 2,\ y = 0,\ z = -1]$

62. Gaussovou eliminační metodou

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & 2\,v & = & 9 \\ -x & + & 3\,y & - & z & + & 3\,v & = & -5 \\ x & + & 2\,y & & & + & v & = & -3 \\ & & y & + & 3\,z & - & v & = & -2 \end{array}\right. ;$$

[$x = 1,\ y = -3,\ z = 1,\ v = 2$]

63.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2\,y & - & z & + & u & = & -3 \\ 2\,x & - & y & & & + & 2\,u & = & 3 \\ 3\,x & & & + & 2\,z & - & u & = & 7 \\ & & 3\,y & + & z & + & u & = & -1 \end{array}\right. ;$$

[$x = 1,\ y = -1,\ z = 2,\ u = 0$]

64.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 4\,y & + & 2\,z & & & = & 1 \\ 3\,x & - & 7\,y & + & 11\,z & - & 15\,u & = & 3 \\ & & y & + & z & - & 3\,u & = & 0 \\ 4\,x & - & 11\,y & + & 13\,z & - & 15\,u & = & 4 \end{array}\right. ;$$

[$(x, y, z, u) = (1, 0, 0, 0) + (12, 3, 0, 1)\,t + (-6, -1, 1, 0)\,s$]

65.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2\,x_2 & - & 3\,x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 5 \\ -2\,x_1 & + & x_2 & + & 4\,x_3 & - & x_4 & + & 2\,x_5 & = & 7 \\ & & x_2 & + & 3\,x_3 & + & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 2\,x_5 & = & 0 \end{array}\right. .$$

[řešení neexistuje]

- Použitím Frobeniovy věty proveďte diskuzi řešení soustav v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů:

66.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & + & 4\,z & = & 7 \\ 2\,x & + & 3\,y & - & 3\,z & = & -4 \\ 3\,x & + & a\,y & + & z & = & c+1 \end{array}\right. ;$$

[pro $a \neq 1$ je jediné řešení
pro $a = 1, c = 2$ je nekonečně mnoho řešení
pro $a = 1, c \neq 2$ řešení neexistuje]

67.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} a\,x & - & y & = & 2 \\ x & + & a\,y & = & a \end{array}\right. ;$$

[jediné řešení pro všechna $a \in \mathbb{R}$]

68.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & a\,z & = & 1 \\ x & + & a\,y & + & z & = & 1 \\ a\,x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. .$$

[jediné řešení pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
nekonečně mnoho řešení pro $a = 1$
žádné řešení pro $a = -2$]

• Řešte homogenní soustavy:

69.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & u & = & 0 \\ x & + & y & - & z & + & u & = & 0 \\ x & + & y & + & z & + & 3u & = & 0 \end{array}\right. ;$$

[$\dim V = 1, \quad (x,y,z,u) = (1,1,1,-1)\,t; \quad t \in \mathbb{R}$]

70.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 4z & - & 3u & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & 6z & - & 4u & = & 0 \\ 4x & + & 5y & - & 3z & + & 3u & = & 0 \\ 3x & + & 8y & + & 24z & - & 19u & = & 0 \end{array}\right. ;$$

[$\dim V = 2, \quad (x,y,z,u) = (8,-6,1,0)\,t + (-7,5,0,1)\,s; \quad t,s \in \mathbb{R}$]

71.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 9y & - & 8z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

[$(x,y,z) = (0,0,0)$]

72. Mějme dány vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Určete všechna čísla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak, aby platilo $\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b} + \gamma\,\vec{c} + \delta\,\vec{d} = \vec{0}$.

a) $\vec{a} = (1,2,-3)$, $\vec{b} = (0,-2,-1)$, $\vec{c} = (2,4,0)$, $\vec{d} = (2,-2,3)$;

b) $\vec{a} = (1,0,2,3)$, $\vec{b} = (4,2,-6,1)$, $\vec{c} = (6,1,1,2)$, $\vec{d} = (-1,1,-5,2)$;

c) $\vec{a} = (3,0,0,0)$, $\vec{b} = (4,-1,0,0)$, $\vec{c} = (2,3,-1,0)$, $\vec{d} = (1,2,-2,5)$.

[**a)** $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (2,-3,-2,1)\,t$, $t \in \mathbb{R}$;
b) $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (1,1,-1,-1)\,t$, $t \in \mathbb{R}$;
c) $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) = (0,0,0,0)$]

73. Pro jaká a má soustava nenulové řešení

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & 4y & + & 7z & = & 0 \\ 3x & - & 4y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & ay & + & 4z & = & 0 \end{array}\right. ?$$

[$a \in \{0,1\}$]

74. Kolik řešení mají následující soustavy v závislosti na hodnotách vyskytujících se parametrů? Pro zadané hodnoty parametrů soustavy vyřešte:

a) $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & 2y & = & 0 \\ x & + & by & = & 0 \end{array}\right. , \; a=1, \; b=3;$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & - & y & + & 7z & = & 0 \\ 3x & + & 4y & + & 20z & = & 0 \\ x & - & 4ay & + & 16z & = & 0 \end{array}\right. , \; a=2;$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 3y & + & 2z & = & 0 \\ ax & + & by & + & z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. , \; a=1, \; b=-5.$

[**a)** ∞ řešení pro $a \cdot b = 2$, pro $a=1$, $b=3$ jen nulové řešení;
b) ∞ řešení pro $a \in \left\{0, \dfrac{1}{4}\right\}$, pro $a=2$ jen nulové řešení;
c) ∞ řešení pro $b = 2 - 7a$, pro $a=1$, $b=-5$, $(x,y,z) = (7,1,-2)\,t$, $t \in \mathbb{R}$]

I.4.* Lineární zobrazení $\mathbb{E}_n$ do $\mathbb{E}_m$ resp. $V(\mathbb{E}_n)$ do $V(\mathbb{E}_m)$

***Příklad* 75.** Nechť L je lineární zobrazení $V(\mathbb{E}_n)$ do $V(\mathbb{E}_m)$ dané maticí $\boldsymbol{A}$. Určete obrazy vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix};$

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix};$

c) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1, 2, -3, 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = (-2, 3, 0, 2)^T, \quad \vec{v} = (0, 0, 0, 1)^T.$

Řešení:

$$L: \; V(\mathbb{E}_n) \quad \underset{\text{typu}(m,n)}{\overset{\boldsymbol{A}}{\longrightarrow}} \quad V(\mathbb{E}_m)$$

a) Matice $\boldsymbol{A}$ je typu (3, 2), a proto reprezentuje zobrazení L z prostoru $V(\mathbb{E}_2)$ do prostoru $V(\mathbb{E}_3)$.

$$L(\vec{u}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$L(\vec{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix};$$

b) $L: \; V(\mathbb{E}_3) \quad \underset{\text{typu}(2,3)}{\overset{\boldsymbol{A}}{\longrightarrow}} \quad V(\mathbb{E}_2),$

$$L(\vec{u}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$L(\vec{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix};$$

c) $L: \; V(\mathbb{E}_4) \quad \underset{\text{typu}(1,4)}{\overset{\boldsymbol{A}}{\longrightarrow}} \quad V(\mathbb{E}_1),$

$$L(\vec{u}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 1, 2, -3, 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2 + 6 + 8) = (12),$$

$$L(\vec{v}) = \boldsymbol{A} \cdot \vec{v} = (1, 2, -3, 4) \cdot (0, 0, 0, 1)^T = (4).$$

■

***Příklad* 76**. Nechť L je zobrazení E_3 do E_3 zadané soustavou:

$$\textbf{a)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& x &+& 2\,y &-& z \\ y' &=& x &+& 2\,y &-& z \\ z' &=& x &+& 2\,y &-& z \end{array}\right. ; \quad \textbf{b)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& x &+& y &+& z \\ y' &=& & & y &-& z \\ z' &=& x &+& 2\,y & & \end{array}\right. ;$$

$$\textbf{c)}\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& x &-& y &+& 3\,z \\ y' &=& & & y &+& 2\,z \\ z' &=& & & & & -z \end{array}\right. .$$

Určete matici $\boldsymbol{A}$ odpovídající zobrazení L a stanovte dimenzi obrazu $L(\mathbb{E}_3)$. Zjistěte, zda existuje zobrazení L^{-1} a v kladném případě najděte matici inverzního zobrazení.

Řešení:

a)

Matice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ je tvořená z koeficientů transformačních vzorců.

Víme, že $h(\boldsymbol{A}) = \dim L(\mathbb{E}_n)$. V našem případě $h(\boldsymbol{A}) = 1 = \dim L(\mathbb{E}_3)$. Skutečně, ze zápisu je vidět, že $x' = y' = z'$, tedy $L(\mathbb{E}_3) = \{[t,t,t], t \in R\}$. Matice $\boldsymbol{A}$ není regulární $(\det \boldsymbol{A} = 0)$, $\boldsymbol{A}^{-1}$ neexistuje a též inverzní zobrazení L^{-1} neexistuje.

b)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h = 2,\ \dim L(\mathbb{E}_3) = 2.$$

Opět matice $\boldsymbol{A}$ není regulární a $\boldsymbol{A}^{-1}$ spolu s L^{-1} neexistují.

c)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\boldsymbol{A}) = 3 = \dim L(\mathbb{E}_3).$$

Matice $\boldsymbol{A}$ je regulární a $\boldsymbol{A}^{-1}$ a L^{-1} existují. Mezi regulárními zobrazeními a jejími maticemi platí vztah:

$$\begin{array}{ll} L \longleftrightarrow \boldsymbol{A}, & L^{-1} \longleftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1}, \\ L^2 \longleftrightarrow \boldsymbol{A}^2, & L \circ L^{-1} = \text{identita} \longleftrightarrow E = \text{jednotková matice.} \\ \quad\vdots & \end{array}$$

Nyní vypočítáme $\boldsymbol{A}^{-1}$ Gaussovou metodou:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zvolíme vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a vypočítáme $L(\vec{u}),\ L^{-1}\Big(L\,(\vec{u})\Big)$:

$$L(\vec{u}) = \boldsymbol{A}\cdot\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$L^{-1}\Big(L(\vec{u})\Big) = \boldsymbol{A}^{-1}\Big(\boldsymbol{A}\,\vec{u}\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{u}.$$

■

***Příklad* 77**. Lineární zobrazení L je dané maticí $\boldsymbol{A}$. Vypočítejte $L(\vec{a})$, $L(2\,\vec{a})$, $L(2\,\vec{a}+3\,\vec{b})$, $L\big(L(\vec{a})\big)$, kde $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = (2,-1,3)^T$, $\vec{b} = (-2,1,-1)^T$.

Řešení:

$$L(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix};$$

Při výpočtu $L(2\,\vec{a})$ a $L(2\,\vec{a}+3\,\vec{b})$ využijeme vlastnosti, že zobrazení L je lineární:

$$L(2\,\vec{a}) = 2\,L(\vec{a}) = 2\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \end{pmatrix};$$

$$L(2\,\vec{a}+3\,\vec{b}) = 2\,L(\vec{a}) + 3\,L(\vec{b}) = \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-21 \\ -8+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Poslední obraz $L\big(L(\vec{a})\big)$ neexistuje, protože odpovídající maticový součin $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\,\vec{a})$ též neexistuje.

■

***Příklad* 78**. Mějme lineární zobrazení L_1, L_2 daná maticemi $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$. Nalezněte matice zobrazení $L_1\circ L_2$, $L_2\circ L_1$, L_1^{-1}, L_2^{-1}, $(L_1\circ L_2)^{-1}$ a $(L_2\circ L_1)^{-1}$ (pokud existují), kde

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

$$L_1 \longleftrightarrow \boldsymbol{A}_1, \qquad L_2 \longleftrightarrow \boldsymbol{A}_2,$$
$$L_1\circ L_2 \longleftrightarrow \boldsymbol{A}_1\,\boldsymbol{A}_2, \qquad L_2\circ L_1 \longleftrightarrow \boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{A}_1,$$
$$L_1^{-1} \longleftrightarrow \boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

Protože součin $\boldsymbol{A}_1\,\boldsymbol{A}_2$ neexistuje $(2,3)\times(2,2)$, neexistuje ani složené zobrazení $L_1\circ L_2$.

$$\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 6 & 5 & 5 \end{pmatrix} \longleftrightarrow L_2\circ L_1.$$

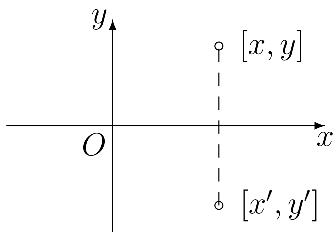
Z inverzních zobrazení existuje jediné, a to L_2^{-1} s maticí $\boldsymbol{A}_2^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ostatní inverzní neexistují.

■

***Příklad* 79**. Mějme dáno zobrazení bodů $E_2 \to E_2$. Napište matice odpovídající **a)** symetrii podle osy x, **b)** symetrii podle osy y, **c)** otočení souřadnicové soustavy kolem počátku o úhel α, **d)** symetrii podle přímky $y = k\,x$.

Řešení:

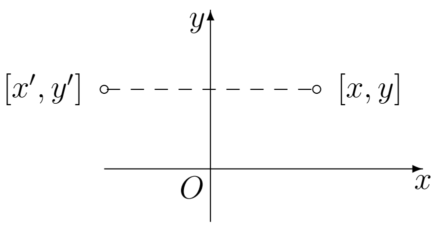
a)



$$\begin{cases} x' = & x \\ y' = & -y \end{cases}.$$

Symetrie podle osy x má matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

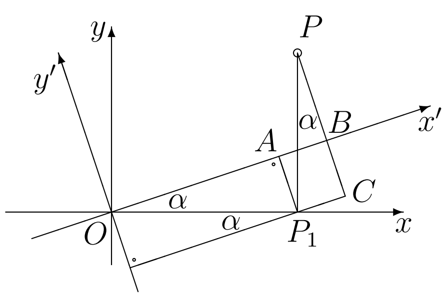
b)



$$\begin{cases} x' = & -x \\ y' = & y \end{cases}.$$

Symetrie podle osy y má matici $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Odvodíme transformační vzorce pro souřadnice pevného bodu P při otočení pravoúhlé souřadnicové soustavy kolem svého počátku o úhel α. Označme původní souřadnice bodu $P = [x, y]$ a po otočení $P = [x', y']$, kde



$$x = OP_1\,,\quad x' = OB\,,\quad AB = P_1C,$$
$$y = P_1P\,,\quad y' = BP\,,\quad CB = P_1A.$$

Nyní odvodíme x' a y' pomocí x, y a α:

$$x' = OB = OA + AB = OA + P_1C = OP_1 \cdot \cos\alpha + P_1P \cdot \sin\alpha = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha,$$
$$y' = BP = CP - CB = P_1P \cdot \cos\alpha - OP_1 \cdot \sin\alpha = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha.$$

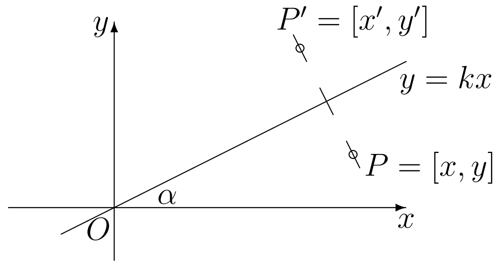
Otočení osy x o úhel α do polohy osy x' je totéž jako otočení bodu P kolem počátku o úhel $(-\alpha)$ při pevné ose x. Toto zobrazení splňuje transformační vzorce:

$$\begin{cases} x' = & x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha \\ y' = & -x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases} \quad \text{a má matici } \boldsymbol{A}\,(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Otočení bodu P o úhel α (osy x o úhel $-\alpha$) má matici $\boldsymbol{A}\,(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

která vznikla z matice $\boldsymbol{A(-\alpha)}$, kde za α jsme dosadili $(-\alpha)$ a využili vlastnosti $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ a $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

d)



$\operatorname{tg}\alpha = k.$

Na první pohled se zdá, že symetrie podle přímky $y = k\,x$ je dost složité zobrazení. Avšak použijeme zobrazení z **a)** a z **c)**. Označme hledané zobrazení $L = L_3 \circ L_2 \circ L_1$, $L(P) = L_3\Big(L_2\big(L_1(P)\big)\Big)$, kde jednotlivá zobrazení jsou:

L_1 je otočení bodu P o úhel $(-\alpha)$ tj. přímka $y = k\,x$ se dostane do polohy osy x,
L_2 je symetrie bodů podle osy x,
L_3 je otočení bodů o úhel α, tj. přímka $y = k\,x$ se dostane do původní polohy.

$$L = L_3 \circ L_2 \circ L_1 \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_3 \cdot \Big(\boldsymbol{A}_2 \cdot \boldsymbol{A}_1\Big) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha - \cos^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Nyní si spočítáme $\sin 2\alpha$ a $\cos 2\alpha$ pomocí $\operatorname{tg}\alpha = k$:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{2\,\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\,k}{k^2+1}, \quad \text{podobně} \quad \cos 2\alpha = \frac{1-k^2}{k^2+1}.$$

Výsledný tvar matice $\boldsymbol{A}$ odpovídající symetrii podle přímky $y = k\,x$ je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-k^2}{k^2+1} & \dfrac{2\,k}{k^2+1} \\ \dfrac{2\,k}{k^2+1} & \dfrac{k^2-1}{k^2+1} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \quad \det \boldsymbol{A} = -1.$$

■

80. Jsou dána zobrazení L_1, L_2 s odpovídajícími maticemi $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2$. Určete matice zobrazení

$L_1 \circ L_1$, $L_1 \circ L_2$, $L_2 \circ L_1$, L_1^{-1}, $(L_2 \circ L_1)^{-1}$, pokud existují, kde

a) $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

b) $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{a)}\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 12 & 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} -6 & 5 & -3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_1^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \text{ostatní neexistují} \\ \mathbf{b)}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix},\ \left(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \\ \text{ostatní neexistují} \end{array}\right]$$

81. Zobrazení $L : V(\mathbb{E}_3) \rightarrow V(\mathbb{E}_3)$ je dané maticí $\boldsymbol{A}$. Určete vektor $\vec{u}$, jehož obraz při zobrazení L je vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. [Návod: $\vec{v} = \boldsymbol{A}\vec{u}$.]

$[\vec{u} = (-\frac{1}{2}, -9, 4)^T]$

82. Nechť zobrazení $L : V(\mathbb{E}_3) \to V(\mathbb{E}_2)$ je dáno maticí $\boldsymbol{A}$. Určete všechny vektory, které se zobrazí na nulový vektor, je-li
$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. [Návod: $\boldsymbol{A}\vec{u} = \vec{0}$.]

$[\vec{u} = \left(1, 1, 1\right)^T \cdot t,\ t \in R]$

83. Lineární zobrazení $L : E_n \to E_m$ je dané maticí $\boldsymbol{A}$. Určete čísla n, m a dimenzi prostoru $L(\mathbb{E}_n) \subset E_m$, je-li

a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$; **b)** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{l} \mathbf{a)}\ n=4,\ m=3,\ \dim=2 \\ \mathbf{b)}\ n=3,\ m=4,\ \dim=3 \end{array}\right]$$

84. Nechť zobrazení L_1 je otočení bodů o úhel α a L_2 otočení bodů o úhel β. Spočítejte matice zobrazení $L_1 \circ L_2$, L_1^{-1}. (Použijte př. **79.**)

$$\left[\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\right]$$

85. Nechť zobrazení L je symetrie podle přímky $y = 2\,x$. Spočítejte souřadnice obrazů bodů $P = [3, -1]$, $Q = [2, 4]$. (Použijte př. **79.**)

$$\left[\begin{array}{l} L \longleftrightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \\ L(P) = \left[-\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right] \\ L(Q) = [2, 4] = Q, \text{bod } Q \text{ leží na přímce } y = 2\,x \end{array}\right]$$

I.5. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

***Příklad* 86**. Najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory matic:

$$\textbf{a)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{b)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \textbf{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

a) Najít vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové matice $\boldsymbol{A}$ znamená najít vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$, pro který platí $\boldsymbol{A}\vec{u} = \lambda\vec{u}$. Jinými slovy: vzor a obraz jsou kolineární vektory pro lineární zobrazení dané maticí $\boldsymbol{A}$. Takový vektor $\vec{u}$ se nazývá **vlastním vektorem** a číslo λ **vlastním číslem** matice $\boldsymbol{A}$. Označíme $\vec{u} = (u_1, u_2)^T$ a rozepíšeme vztah $\boldsymbol{A}\vec{u} = \lambda\,\vec{u}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, u_1 \\ \lambda\, u_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} -3\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & \lambda\, u_1 \\ -2\,u_1 & + & u_2 & = & \lambda\, u_2 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow$$

$$(\mathbf{1}) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcl} (-3-\lambda)\, u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \\ -2\,u_1 & + & (1-\lambda)\, u_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Hledáme nenulové řešení této homogenní soustavy. K tomu je zapotřebí, aby determinant matice soustavy se rovnal nule:

$$(\mathbf{2}) \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-3-\lambda)(1-\lambda)+4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2+2\,\lambda+1 = 0.$$

Poslední rovnice se nazývá **charakteristická rovnice**.

$$(\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Nyní dosadíme $\lambda = -1$ do (1) a dopočítáme vektor $\vec{u}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \\ -2\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \end{array} \right. .$$ Zde máme záruku (z $\det \boldsymbol{A} = 0$), že rovnice budou závislé,

proto stačí dosadit jen do jedné z rovnic. V našem případě

$$u_1 = u_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Můžeme se též přesvědčit, že platí $\boldsymbol{A}\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u}$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka: V dalších příkladech budeme postupovat rychleji. Z dané matice $\boldsymbol{A}$ okamžitě sestavíme determinant matice $\boldsymbol{A} - \lambda\,\mathrm{E}$, tj. na hlavní diagonále matice $\boldsymbol{A}$ odečteme λ. A tento determinant položíme roven 0. Tak dostaneme charakteristickou rovnici.

$$\textbf{b)} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - 3\,\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-4)(\lambda+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 4.$$

Pro $\underline{\lambda_1 = -1}$ hledáme řešení rovnice $3\,u_1 + 2\,u_2 = 0$. Tuto rovnici lze zapsat jako skalární součin $(3,2)\cdot(u_1,u_2)^T = 0$. Vektor $\vec{u} = (u_1,u_2)^T$ je kolmý k vektoru $(3,2)$ a tedy je $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\cdot t_1, \quad t_1 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Pro $\underline{\lambda_2 = 4}$ hledáme řešení rovnice $-2\,v_1 + 2\,v_2 = 0$. Vektor $\vec{v} = (v_1,v_2)^T$ je kolmý k vektoru $(-2,2)$ a tedy je $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot t_2, \quad t_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Pro takto určené vektory platí : $\quad \boldsymbol{A}\,\vec{u} = -\vec{u}, \qquad \boldsymbol{A}\,\vec{v} = 4\,\vec{v}.$

Poznámka: Vlastní vektor často zapisujeme pomocí příslušného reprezentanta bez uvedení jeho nenulových násobků.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad (1-\lambda)^2 + 4 = 0 \quad\Rightarrow$

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 5 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = 1 \pm 2\,i.$$

[Víme, že daná matice musí mít prvky $a_{ij} \in \mathbb{C}$, ale vlastní čísla a vlastní vektory hledáme v oboru komplexních čísel.]

$\underline{\lambda_1 = 1 + 2\,i}$: $\quad \big(1-(1+2\,i)\big)\,u_1 + 2\,u_2 = 0 \;\Rightarrow\; -2\,i\,u_1 + 2\,u_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\cdot t_1,$

$\underline{\lambda_2 = 1 - 2\,i}$: $\quad \big(1-(1-2\,i)\big)\,v_1 + 2\,v_2 = 0 \;\Rightarrow\; 2\,i\,v_1 + 2\,v_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\cdot t_2,$

$t_1,\; t_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$

Přesvědčili jsme se, že dvěma vlastním komplexně sdruženým číslům odpovídají dva vlastní vektory, jejichž souřadnice jsou též komplexně sdružená čísla.

$\blacksquare$

***Příklad* 87**. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory daných matic:

$$\textbf{a)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 6 & 9 & 0 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \qquad \textbf{b)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešení:

a) $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 & -3 \\ 6 & 9-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Rightarrow\quad (5-\lambda)(9-\lambda)^2 - 9\,(9-\lambda) - 36\,(9-\lambda) = 0,$

$$(9-\lambda)\big[(5-\lambda)(9-\lambda) - 45\big] = 0 \quad\Rightarrow\quad (9-\lambda)(\lambda^2 - 14\,\lambda) = 0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad \lambda_1 = 9, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 14.$$

K výpočtu vlastních vektorů stačí dosadit do takových dvou řádků determinantu, aby vzniklé rovnice byly nezávislé.

$\underline{\lambda_1 = 9}$: $\left\{ \begin{array}{rcrcrl} -4\,u_1 & + & 6\,u_2 & - & 3\,u_3 & = 0 \\ 6\,u_1 & & & & & = 0 \end{array} \right. \quad\Rightarrow\quad u_1 = 0,\; u_3 = 2\,u_2 \quad\Rightarrow$

$$\vec{u} = (0,1,2)^T\cdot t_1, \qquad \boldsymbol{A}\,\vec{u} = 9\,\vec{u};$$

$$\underline{\lambda_2 = 0}: \quad \begin{cases} 6\,v_1 + 9\,v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\dfrac{2}{3}\,v_1 \\ -3\,v_1 + 9\,v_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = \dfrac{1}{3}\,v_1 \end{cases},$$

$$\vec{v} = (3, -2, 1)^T \cdot t_2, \qquad \boldsymbol{A}\,\vec{v} = \vec{0};$$

$$\underline{\lambda_3 = 14}: \quad \begin{cases} 6\,w_1 - 5\,w_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_2 = \dfrac{6}{5}\,w_1 \\ -3\,w_1 - 5\,w_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad w_3 = -\dfrac{3}{5}\,w_1 \end{cases},$$

$$\vec{w} = (5, 6, -3)^T \cdot t_3, \qquad \boldsymbol{A}\,\vec{w} = 14\,\vec{w}; \quad t_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

b) $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)\lambda(1+\lambda) + 2 - 2\,\lambda - (1+\lambda) = 0,$$

$$(2-\lambda)(\lambda+\lambda^2) + 1 - 3\,\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 + 1 - 3\lambda = 0,$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) + (\lambda - 1) = 0,$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i.$$

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad \begin{cases} u_1 + u_2 - 2\,u_3 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \quad \Rightarrow u_2 = -u_1 \Rightarrow u_3 = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_2) = 0 \end{cases},$$

$$\vec{u} = (1, -1, 0)^T, \qquad \boldsymbol{A}\,\vec{u} = \vec{u};$$

$$\underline{\lambda_2 = i}: \quad \begin{cases} (2-i)\,v_1 + v_2 - 2\,v_3 = 0 \\ -v_1 - i\,v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\dfrac{1}{i}\,v_1 \quad \Rightarrow v_2 = i\,v_1 \\ \qquad v_3 = \dfrac{1}{2}\Big((2-i)\,v_1 + v_2\Big) = v_1 \end{cases},$$

$$\vec{v} = (1, i, 1)^T.$$

$\underline{\lambda_3 = -i} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = (1, -i, 1)^T.$ Zde jsme využili, že $\vec{w}$ bude mít komplexně sdružené souřadnice s vektorem $\vec{v}$.

■

***Příklad* 88**. Budiž $\boldsymbol{A}$ čtvercová matice typu $(3,3)$ s reálnými prvky. Rozhodněte, zda její vlastní čísla a resp. reprezentanty vlastních vektorů by mohly být :

a) $1,\ -1,\ 1+i$; **b)** $2,\ 2+i,\ 2+i$;

c) $1,\ 1+i,\ 1-i$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$;

d) $1,\ 1+i,\ 1-i$ a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2-i \end{pmatrix}$;

e) $i,\ 1+i,\ 1-i$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$.

Řešení:

a) **NE,** protože rovnice 3.stupně s reálnými koeficienty má buď všechny kořeny reálné nebo má jeden reálný a dva komplexně sdružené.

b) **NE;**

c) čísla $1,\ 1+i,\ 1-i$ by mohla být vlastními čísly, ale vektory nemohou být vlastními vektory. Souhrnná odpověď je **NE**.

d) **ANO** čísla a souřadnice vektorů splňují požadavky.

e) **NE** viz **a).**

■

***Příklad* 89**. Mějme čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$. Určete její vlastní čísla a vektory. Jaká jsou vlastní čísla a vektory matice $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{A}^{-1}$, je-li $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Řešení: Nejdříve spočítáme vlastní čísla a vektory matice $\boldsymbol{A}$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)(3-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,$$

$$\underline{\lambda_1 = 2}: \quad u_1 + u_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p_1,$$

$$\underline{\lambda_2 \ = 3}: \quad -v_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2, \quad p_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nyní spočítáme $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

Z charakteristické rovnice $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 5 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9,$

$$\underline{\lambda_1 = 4}: \quad 5\,u_1 + 5\,u_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p_1,$$

$$\underline{\lambda_2 = 9}: \quad -5\,v_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2, \quad p_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\ .$$

K matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ určíme její vlastní čísla

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{3},$$

$$\underline{\lambda_1 = \frac{1}{2}}: \quad -\frac{1}{6} u_1 - \frac{1}{6} u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 + u_2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p_1,$$

$$\underline{\lambda_2 = \frac{1}{3}}: \quad -\frac{1}{6} v_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2, \quad p_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Vše shrneme:

Matice $\boldsymbol{A}$ má vlastní čísla $\left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{array} \right.$ a vlastní vektory $\left\langle \begin{array}{l} \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p_1 \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 \end{array} \right.$.

Matice $\boldsymbol{A}^2$ má vlastní čísla $\left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = 4 = 2^2 \\ \lambda_2 = 9 = 3^2 \end{array} \right.$ a vlastní vektory $\left\langle \begin{array}{l} \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p_1 \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 \end{array} \right.$.

Matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ má vlastní čísla $\left\langle \begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{1}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$ a vlastní vektory $\left\langle \begin{array}{l} \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} p_1 \\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_2 \end{array} \right.$,

kde $p_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Záměrně jsme spočítali vše přímým výpočtem. Samozřejmě jsme mohli počítat i takto:

$$\boldsymbol{A}\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^2\,\vec{u} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\,\vec{u}) = \boldsymbol{A}(\lambda\vec{u}) = \lambda \cdot \boldsymbol{A}\,\vec{u} = \lambda^2\,\vec{u},$$

dále podobně platí $\quad \boldsymbol{A}^3\,\vec{u} = \lambda^3\,\vec{u}, \ldots$

Vynásobíme-li vztah $\boldsymbol{A}\,\vec{u} = \lambda\,\vec{u}$ maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva, pak

$$\vec{u} = \lambda\,\boldsymbol{A}^{-1}\,\vec{u} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{-1}\,\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\,\vec{u}.$$

Vlastní vektory všech zobrazení $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}^2$, $\boldsymbol{A}^3$, $\boldsymbol{A}^{-1}\ldots$ jsou stejné.

■

***Příklad* 90**. Mějme matici $\boldsymbol{A}$ typu $(3,3)$ s vlastními čísly $-2, 1+i, 1-i$. Určete vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}^2$ a $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Řešení: Má-li matice $\boldsymbol{A}$ vlastní číslo λ, pak $\boldsymbol{A}^2$ má λ^2 a $\boldsymbol{A}^{-1}$ má $\dfrac{1}{\lambda}$.

Tedy matice $\boldsymbol{A}^2$ bude mít vlastní čísla $(-2)^2 = 4, \quad (1+i)^2 = 1 + 2\,i + i^2 = 2\,i,$
$(1-i)^2 = 1 - 2\,i + i^2 = -2\,i$

a matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ bude mít vlastní čísla $\quad -\dfrac{1}{2}, \quad \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2},$
$\dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1+i}{2}.$

■

91. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matic

a) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; **d)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **f)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

$\left[\begin{array}{ll} \textbf{a)}\ -2,4;\ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} p, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t; & \textbf{b)}\ \pm i;\ \begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix} p, \begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix} t; \\ \textbf{c)}\ 3,2;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} p, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t; & \textbf{d)}\ 3 \pm 2i;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} p_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} t; \\ \textbf{e)}\ 1,-1,2;\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} p, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} t, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s; & \textbf{f)}\ 1,2 \pm i;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} p, \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 2-2i \end{pmatrix} t, \begin{pmatrix} 1-i \\ 2 \\ 2+2i \end{pmatrix} s \end{array}\right]$

92. Ukažte, že obraz vektoru $\vec{u}$ v zobrazení daném maticí $\boldsymbol{A}$ je kolineární s $\vec{u}$. Existují další vektory s touto vlastností ? Nalezněte je, jestliže $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$[(1,3)^T]$

93. Matice má vlastní čísla $-3, i, -i$ a vlastní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Odpovězte, zda je možné, aby matice $\boldsymbol{A}^2$ měla následující vlastní čísla a vlastní vektory:

a) $9, -1, -1;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-i \end{pmatrix};$

b) $-9, 1, -1;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix};$

c) $9, -1, -1;\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1-i \end{pmatrix}.$

[**a)** čísla ano, vektory ne; **a)** čísla ne, vektory ano; **c)** čísla i vektory ano]

94. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matic $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^{-1}$, víte-li, že $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

$\left[\pm 3i, -9, \mp\frac{i}{3};\ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} t, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} s\right]$

II. Analytická geometrie v $\mathbb{E}_3$

II.1. Skalární součin dvou vektorů

***Příklad* 95**. Jsou dány body $A = [3, 4, -2]$, $B = [3, 6, 1]$, $C = [2, 4, 0]$. Určete souřadnice, velikosti a úhel vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$.

Řešení: Souřadnice vektoru $\overrightarrow{AB} = B - A = (3-3, 6-4, 1+2) = (0, 2, 3)$. Použijeme-li jednotkové vektory $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, pak stejný vektor se dá vyjádřit jako lineární kombinace těchto vektorů:

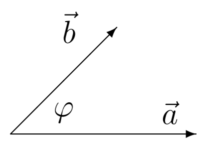
$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 3) = 0 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k} = 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}$

Podobně $\overrightarrow{AC} = C - A = (-1, 0, 2) = -\vec{i} + 2\,\vec{k}$

Velikost vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vypočítáme podle vzorce $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

V našem příkladě $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$.

Úhel dvou vektorů určíme ze skalárního součinu těchto vektorů, který zapíšeme jak podle definice tak i pomocí souřadnic:



$\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \to \quad \cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Dopočítáme úhel vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$:

$$\cos\varphi = \frac{(0, 2, 3) \cdot (-1, 0, 2)}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{5}} = \frac{0 + 0 + 6}{\sqrt{65}} = \frac{6}{\sqrt{65}} \neq 1,$$

což znamená, že $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

■

***Příklad* 96**. Vypočítejte skalární součiny vektorů: **a)** $(2, 1) \cdot (-1, 5)$, **b)** $(3, 4, -2) \cdot (3, 0, 1)$, **c)** $(2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) \cdot (-2\,\vec{j})$, **d)** $(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - 5\,\vec{k})$.

Řešení:

a) $(2, 1) \cdot (-1, 5) = -2 + 5 = 3$;

b) $(3, 4, -2) \cdot (3, 0, 1) = 9 + 0 - 2 = 7$;

c) $(2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) \cdot (-2\,\vec{j}) = -4\,\vec{i} \cdot \vec{j} - 6\,\vec{j} \cdot \vec{j} - 8\,\vec{k} \cdot \vec{j} = 4 \cdot 0 - 6 \cdot 1 - 8 \cdot 0 = -6$;
vektory můžeme zapsat i bez použití $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, pak

$$(2\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + 4\,\vec{k}) \cdot (-2\,\vec{j}) = (2, 3, 4) \cdot (0, -2, 0) = -6,$$

d) $(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - 5\,\vec{k}) = (3, 2, 1) \cdot (1, 1, -5) = 3 + 2 - 5 = 0$. Výsledek je nula, z toho vyplývá, že dané vektory jsou navzájem kolmé.

■

***Příklad* 97**. Úhel vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ a $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Spočítejte :

a) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$, **b)** $(3\,\vec{a}-2\,\vec{b})\cdot(2\,\vec{a}+\vec{b})$.

Řešení:

a) Roznásobíme součin člen po členu $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} =$

$$\Big|\ \text{víme, že}\quad \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2 \quad\text{a též}\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\ \Big|$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 + 2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi + 16 = 9 + 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{3} + 16 = 25 + 24\cdot\frac{1}{2} = 37.$$

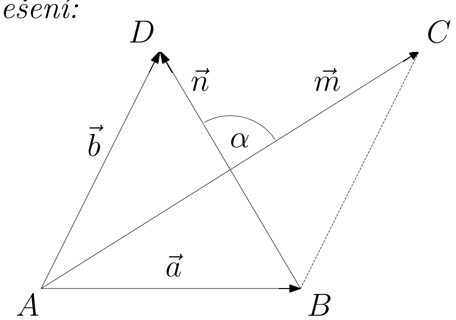
b) Součin roznásobíme a pokračujeme podobně jako v **a)** $(3\,\vec{a}-2\,\vec{b})\cdot(2\,\vec{a}+\vec{b}) =$

$$= 6\,\vec{a}\cdot\vec{a} - 4\,\vec{b}\cdot\vec{a} + 3\,\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\,\vec{b}\cdot\vec{b} = 6\,|\vec{a}|^2 - \vec{a}\cdot\vec{b} - 2\,|\vec{b}|^2 = 6\cdot 9 - 3\cdot 4\cdot\cos\frac{\pi}{3} - 2\cdot 16 =$$
$$= 54 - 6 - 32 = 16.$$

■

***Příklad* 98**. Najděte úhel úhlopříček rovnoběžníka $ABCD$, jestliže $\overrightarrow{AB} = 2\,\vec{i}+\vec{j}$ a $\overrightarrow{AD} = -\vec{j}+2\,\vec{k}$.

Řešení:



Úhlopříčky rovnoběžníka se dají vyjádřit pomocí vektorů stran $\vec{m} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\vec{n} = \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Potom $\vec{m} = 2\,\vec{i}+2\,\vec{k}$, $\vec{n} = 2\,\vec{i}+2\,\vec{j}-2\,\vec{k}$ a

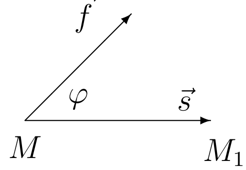
$$\cos\alpha = \frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|} = \frac{(2,0,2)\cdot(2,2,-2)}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}} = \frac{4-4}{\sqrt{96}} = 0 \quad\to\quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Příklad se dá spočítat i jiným způsobem. Stačí si všimnout, že oba vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AD}$ mají stejnou délku $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{5}$, což znamená, že uvažovaný rovnoběžník je kosočtverec a z planimetrie víme, že úhlopříčky každého kosočtverce jsou navzájem kolmé.

■

***Příklad* 99**. Působením síly $\vec{f} = (2,4,6)$ [N] se bod M posunul o orientovanou úsečku $\vec{s} = (3,2,-1)$ [m]. Vypočítejte práci A síly $\vec{f}$.

Řešení: Z fyziky víme, že práce se vypočítá pomocí skalárního součinu



$$A = \vec{f}\cdot\vec{s} = (2,4,6)\cdot(3,2,-1) =$$
$$= 6 + 8 - 6 = 8 \ \ [\mathrm{N\,m}].$$

■

***Příklad* 100**. K vektoru $\vec{a} = (-3,4)$ najděte všechny kolmé vektory s jednotkovou délkou.

Řešení: Označme hledaný vektor $\vec{b} = (b_1, b_2)$, který musí splňovat:

$$\vec{b}\perp\vec{a} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{b}\cdot\vec{a} = 0,\quad |\vec{b}| = 1.$$

V souřadnicích dostáváme soustavu:

$$\begin{cases} (b_1, b_2)\cdot(-3,4) = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3\,b_1 + 4\,b_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_2 = \dfrac{3}{4}\,b_1 \\ b_1^2 + b_2^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$b_1^2 + \left(\frac{3}{4}\,b_1\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{25}{16}\,b_1^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_1^2 = \frac{16}{25} \quad \to \quad b_1 = \pm\frac{4}{5}.$$

Výsledkem jsou dva vektory $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ a $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

■

***Příklad* 101**. Pro jakou hodnotu parametru p jsou dané vektory navzájem kolmé:
a) $(0,2,-3)$, $(p^2+p, 2\,p+1, 2)$; **b)** $(2\,p, p^2, -1)$, $(p, 2, 36)$;
c) $(1,-1,p,0)$, $(p-1, p^2, 1, 4)$?
Napište souřadnice jednotlivých vektorů.

Řešení:

a) $(0,2,-3)\cdot(p^2+p, 2\,p+1, 2) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,(2\,p+1) - 6 = 0 \;\Rightarrow\; 4\,p = 4 \;\Rightarrow\; p = 1$;

b) $(2\,p, p^2, -1)\cdot(p, 2, 36) = 0 \;\Rightarrow\; 2\,p^2 + 2\,p^2 - 36 = 0 \;\Rightarrow\; p^2 = 9 \;\Rightarrow\; p_{1,2} = \pm 3$;

c) $(1,-1,p,0)$, $(p-1, p^2, 1, 4) = 0 \;\Rightarrow\; p - 1 - p^2 + p = 0 \;\Rightarrow\; (p-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; p = 1$.

■

102. Vypočítejte skalární součiny: **a)** $(2,-5)\cdot(6,3)$; **b)** $(2\,\vec{i}+\vec{j})\cdot(3\,\vec{j}+\vec{k})$;
c) $(1,3,-5)\cdot(2,1,1)$; **d)** $(1,-2,0,3)\cdot(4,1,-1,0)$.

[**a)** -3; **b)** 3; **c)** 0; **d)** 2]

103. Je dán ΔABC, kde $A = [-1,2,3]$, $B = [1,1,1]$, $C = [0,0,5]$. Dokažte, že tento trojúhelník je pravoúhlý a vypočítejte úhel β.

[$\alpha = \pi/2,\ \beta = \pi/4$]

104.* Najděte úhel mezi vektory $\vec{a} = 2\,\vec{m} + \vec{n}$ a $\vec{b} = -3\,\vec{m} + 2\,\vec{n}$, jestliže vektory $\vec{m}, \vec{n}$ svírají úhel $\pi/3$ a mají jednotkovou délku. (Návod: zvolte $\vec{m} = (1,0)$.)

[$2\,\pi/3$]

105. Jsou dány 3 vektory $\vec{a} = (2,-1,3)$, $\vec{b} = (1,-3,2)$, $\vec{c} = (3,2,-4)$. Najděte vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, který splňuje podmínky $\vec{x}\cdot\vec{a} = -5$, $\vec{x}\cdot\vec{b} = -11$, $\vec{x}\cdot\vec{c} = 20$.

[$\vec{x} = (2,3,-2)$]

106. Určete pro jaká p jsou vektory navzájem kolmé:
a) $(2\,p, 1-p, 4)$, $(-1,1,2)$; **b)** $(-2, 1+p, p^2, 0)$, $(3-p, p, 2, p^2+1)$;
c) $(3,4,-1)$, $(4\,p, -3\,p, 0)$; **d)** $(1+p, 1-p, 3, -2)$, $(-2, 2, p, p+3)$;

[**a)** 3; **b)** -2, 1; **c)** $p \in R$; **d)** -2]

II.2. Vektorový součin dvou vektorů v $\mathbb{E}_3$

***Příklad* 107**. Vypočítejte vektorové součiny $\vec{a}\times\vec{b}$ a $\vec{b}\times\vec{a}$ a přesvědčte se, že $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a}$ a $(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{b}$, jestliže $\vec{a}=(5,3,1)$, $\vec{b}=(-1,3,2)$.

Řešení: Pro výpočet vektorového součinu použijeme jeho vyjádření v souřadnicích

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 2\end{vmatrix}=3\,\vec{i}-11\,\vec{j}+18\,\vec{k},$$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=(3,-11,18)$, $\quad \vec{d}=\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{c}=(-3,11,-18)$,

Ze skalárních součinů $\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=15-33+18=0 \quad$ a $\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-3-33+36=0$

vyplývá, že $\quad \vec{a}\perp\vec{c}$ a $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Poznámka: To samozřejmě vyplývá přímo z definice vektorového součinu.

■

***Příklad* 108**. Určete vektor $\vec{x}$ ze vztahu: $\vec{x}=2\,\vec{a}\times\vec{i}-3\,\vec{k}\times\vec{b}$, kde $\vec{a}=2\,\vec{i}-\vec{j}+3\,\vec{k}$, $\vec{b}=4\,\vec{j}+5\,\vec{k}$.

Řešení: Součiny $\vec{a}\times\vec{i}$ a $\vec{k}\times\vec{b}$ spočítáme přímým výpočtem, kde použijeme vztahy:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0} \text{ a } \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}=-\vec{j}\times\vec{i},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}=-\vec{k}\times\vec{j},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}=-\vec{i}\times\vec{k},$$

$$\vec{a}\times\vec{i}=(2\,\vec{i}-\vec{j}+3\,\vec{k})\times\vec{i}=2\,\vec{i}\times\vec{i}-\vec{j}\times\vec{i}+3\,\vec{k}\times\vec{i}=2\,\vec{0}+\vec{k}+3\,\vec{j}=3\,\vec{j}+\vec{k},$$

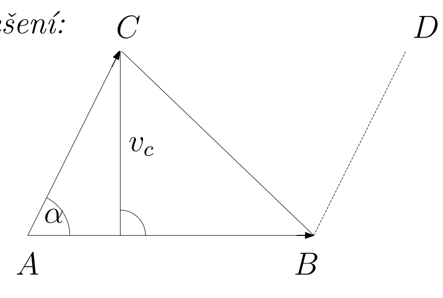
$$\vec{k}\times\vec{b}=\vec{k}\times(4\,\vec{j}+5\,\vec{k})=4\,\vec{k}\times\vec{j}+5\,\vec{k}\times\vec{k}=-4\,\vec{i}.$$

Potom $\vec{x}=2\,(3\,\vec{j}+\vec{k})-3\,(-4\,\vec{i})=12\,\vec{i}+6\,\vec{j}+2\,\vec{k}$.

■

***Příklad* 109**. Vypočítejte plošný obsah ΔABC a délku výšky v_c, kde $A=[7,3,4]$, $B=[1,0,6]$, $C=[4,5,-2]$.

Řešení:



Podle definice víme, že
$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|\,\sin\alpha=S_{ABCD}$.

tak, že $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$, kde $\overrightarrow{AB}=(-6,-3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3,2,-6)$.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -6 & -3 & 2\\ -3 & 2 & -6\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|14\,\vec{i}-42\,\vec{j}-21\,\vec{k}\right|=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\left|2\,\vec{i}-6\,\vec{j}-3\,\vec{k}\right|=$$

$$=\frac{7}{2}\sqrt{4+36+9}=\frac{49}{2}.$$

Délku výšky v_c spočítáme z plošného obsahu rovnoběžníka (resp. trojúhelníka):

$$S_{ABCD}=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|\cdot v_c \quad\Rightarrow\quad 49=\sqrt{36+9+4}\cdot v_c \quad\Rightarrow\quad v_c=\frac{49}{7}=7.$$

■

***Příklad* 110**. Vypočítejte $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|$, jestliže $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=\dfrac{3}{2},\ \vec{u}\cdot\vec{v}=3.$

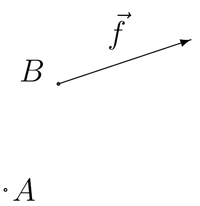
Řešení: Podle definice je $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\varphi$, kde úhel φ vypočítáme ze skalárního součinu:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{3}{2\cdot\frac{3}{2}}=1 \quad\Rightarrow\quad \varphi=0 \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=0.$$

■

***Příklad* 111**. Najděte moment síly $\vec{f}=3\,\vec{i}+\vec{k}$ vzhledem k bodu **a)** $A=[1,2,-1]$; **b)** $O=[0,0,0]$, jestliže $\vec{f}$ působí v bodě $B=[2,-1,3]$.

Řešení:



V mechanice se používá vektorový součin pro výpočet momentu $\vec{M}$ síly $\vec{f}$ působící v bodě B vzhledem k bodu A : $\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{f}.$

a) V našem případě $\overrightarrow{AB}=(1,-3,4),\ \vec{f}=(3,0,1)$ a

$$\vec{M}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3\,\vec{i}+11\,\vec{j}+9\,\vec{k};$$

b) $\overrightarrow{OB}=(2,-1,3)$, pak $\vec{M}=\overrightarrow{OB}\times\vec{f}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-\vec{i}+7\,\vec{j}+3\,\vec{k}.$

■

112. Spočítejte vektorové součiny: **a)** $(3,-1,2)\times(0,4,5)$; **b)** $(2\,\vec{i}+3\,\vec{j}-4\,\vec{k})\times(2\,\vec{j})$; **c)** $(\vec{i}+2\,\vec{j}-\vec{k})\times(2\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$.

[**a)** $(-13,-15,12)$ **b)** $8\,\vec{i}+4\,\vec{k}$ **c)** $(1,-3,-5)$]

113. Vypočítejte jednotkový vektor $\vec{c}$, který je kolmý ke každému z vektorů $\vec{a},\vec{b}$ $\vec{a}=(2,-1,1),\ \vec{b}=(1,2,-1)$.

$\left[\vec{c}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{35}}(1,-3,-5)\right]$

114. Vypočítejte plošný obsah ΔABC o vrcholech $A=[2,3,4],\ B=[-1,2,-3],$ $C=[5,4,-2]$.

$\left[\frac{13}{2}\sqrt{10}\right]$

115. Vypočítejte $\left|(2\,\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-3\,\vec{v})\right|$, jestiže $|\vec{u}|=3,|\vec{v}|=2$ a úhel vektorů $\vec{u},\vec{v}$ je $\pi/6$.

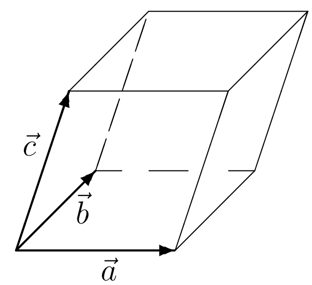
[21]

II.3. Smíšený součin v $\mathbb{E}_3$

***Příklad* 116**. Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu, jehož hrany jsou tvořeny danými vektory $\vec{a} = (1, 2, 0)$, $\vec{b} = (-2, 1, 3)$, $\vec{c} = (2, -3, -5)$.

Řešení: Smíšený součin $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ se vyjádří v souřadnicích

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$



Velikost tohoto součinu se rovná objemu rovnoběžnostěnu z vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Konkrétně

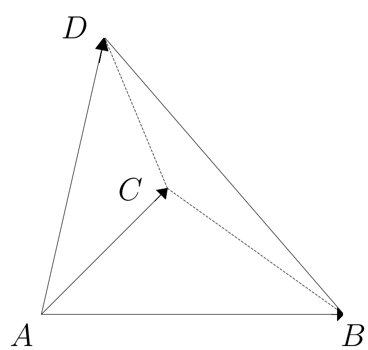
$$V = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right| = \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -5 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= | -5 + 12 + 9 - 20| = 4.$$

■

***Příklad* 117**. Vrcholy čtyřstěnu jsou $A = [2, -3, 5]$, $B = [0, 2, 1]$, $C = [-2, -2, 3]$, $D = [3, 2, 4]$. Vypočítejte objem čtyřstěnu a délku výšky v_D spuštěné z vrcholu D na podstavu ABC.

Řešení:



Objem čtyřstěnu se rovná $\dfrac{1}{6}$ z objemu rovnoběžnostěnu sestrojeného z vektorů $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |2 - 10 + 80 + 4 - 20 - 20| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot 36 = 6.$$

Délku výšky v_D spočítáme z objemu rovnoběžnostěnu, který vypočítáme dvojím způsobem: pomocí smíšeného součinu a pomocí známého vzorce pro objem hranolu (plošný obsah podstavy vynásobený délkou výšky tělesa).

$\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot v_D$, kde podle předcházejícího

$$\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = 36 \text{ a } |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \end{vmatrix} \right| = | -6\,\vec{i} + 12\,\vec{j} + 18\,\vec{k}| =$$

$= 6\,| -\vec{i} + 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k}| = 6\sqrt{1 + 4 + 9} = 6\sqrt{14}$. Potom

$$v_D = \frac{36}{6\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{14}}{7}.$$

■

***Příklad* 118**. Určete parametr α tak, aby vektory $\vec{a} = (\alpha + 1, \alpha, 2)$, $\vec{b} = (3, 1, -4)$, $\vec{c} = (-1, 2, 2)$ byly komplanární (tj. rovnoběžné s jednou rovinou).

Řešení: Tři vektory jsou komplanární, právě když se jejich smíšený součin rovná nule.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\,(\alpha+1) + 4\,\alpha + 12 + 2 + 8\,(\alpha+1) - 6\,\alpha = 0$$

$$\rightarrow \quad 8\,\alpha + 24 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = -3 \quad \rightarrow \quad \vec{a} = (-2, -3, 2).$$

■

119. Rozhodněte, zda body $A = [1, 2, -1], B = [0, 1, 5], C = [-1, 2, 1], D = [2, 1, 3]$ leží v jedné rovině. (Návod: použijte smíšený součin tří vektorů.)

[ano]

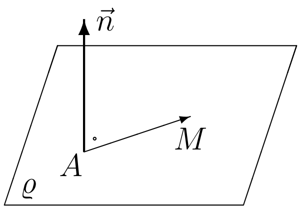
120. Vypočítejte součiny: **a)** $(2\,\vec{i} + \vec{j}) \cdot \Big((3\,\vec{j} - \vec{k}) \times 2\,\vec{k} \Big)$; **b)** $\big[\,(3, 2, -1) \times (1, 0, -1)\,\big] \cdot (2, 1, 0)$;
c) určete objem rovnoběžnostěnu sestrojeného z vektorů z bodu **b)**.

[**a)** 12; **b)** -2; **c)** 2]

II.4. Rovina v $\mathbb{E}_3$

***Příklad* 121**. Napište rovnici roviny ϱ dané bodem $A = [3, 4, -5]$ a normálovým vektorem $\vec{n} = (-2, 3, 7)$.

Řešení:



Označme $M = [x, y, z]$ libovolný bod ležící v rovině ϱ. Potom vektory $\overrightarrow{AM}$ a $\vec{n}$ jsou kolmé a jejich skalární součin $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

Napíšeme tento součin v souřadnicích za předpokladu, že $\vec{n} = (a, b, c)$ a bod $A = [x_0, y_0, z_0]$:

$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0$

dostali jsme tzv. **obecnou** rovnici roviny:

$\mathbf{a\,x + b\,y + c\,z + d = 0}$, kde $d = -(a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0)$.

Vyřešíme náš příklad číselně:

$(-2, 3, 7) \cdot (x - 3, y - 4, z + 5) = 0 \quad \Longrightarrow \quad -2\,(x - 3) + 3\,(y - 4) + 7\,(z + 5) = 0$

$\varrho: \; -2\,x + 3\,y + 7\,z + 29 = 0.$

■

***Příklad* 122**. Určete jakou polohu vzhledem k souřadnicovým osám a souřadnicovým rovinám zaujímají roviny:

a) $2\,x - 3\,y + z = 0$; **b)** $z = 2$; **c)** $2\,x + y = 0$;
d) $x - 2\,y + 5 = 0$; **e)** $y = -3$; **f)** $x + y + z = a,\; a \neq 0$;
g) $x = 0$.

Řešení:

a) Rovina prochází počátkem souřadnicové soustavy $[0, 0, 0]$;

b) rovina je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou (xy) a je tedy kolmá k ose z;

c) rovina obsahuje osu z a samozřejmě i počátek a je kolmá k rovině (xy);

d) rovina je rovnoběžná s osou z a je kolmá k rovině (xy);

e) rovina je rovnoběžná s rovinou (xz) a je kolmá k ose y;

f) rovina vytíná na osách x, y, z stejné úseky;

g) rovina je souřadnicovou rovinou (yz).

■

***Příklad* 123**. Napište rovnici roviny ϱ, která prochází bodem $A = [3, 2, -5]$ a

a) obsahuje osu y; **b)** je kolmá k ose y;
c) je rovnoběžná s rovinou $\alpha: \; 2\,x + 3\,y - z = 10$.

Řešení:

a) Rovina obsahující osu y má obecnou rovnici $a\,x + c\,z = 0$. Použijeme $A \in \varrho$ a dopočítáme koeficienty a, c : $\quad 3\,a - 5\,c = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{5}{3}\,c \quad \Longrightarrow$

zvolíme nejjednodušší řešení $c = 3,\; a = 5 \quad \Longrightarrow \quad \varrho: \; 5\,x + 3\,z = 0.$

b) $\varrho \perp y \quad \Longleftrightarrow \quad y = \text{konst.},\ A \in \varrho \quad \Longrightarrow \quad \varrho:\ y = 2;$

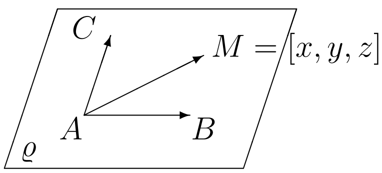
c) $\varrho \parallel \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{n}_\varrho = \vec{n}_\alpha: \quad \varrho:\ 2x + 3y - z + d = 0,$

$A \in \varrho:\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 5 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -17 \quad \Rightarrow \quad \varrho:\ 2x + 3y - z - 17 = 0.$

■

***Příklad* 124.** Napište rovnici roviny ϱ procházející body $A = [1, 2, -1]$, $B = [3, -3, 2]$, $C = [2, 0, 1]$ a určete vzdálenost bodu $P = [-2, 1, 6]$ od roviny ϱ.

Řešení:



Z daných bodů a z obecného bodu M roviny ϱ utvoříme tři vektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM}$, které jsou s rovinou rovnoběžné, jsou tedy komplanární a jejich smíšený součin se bude rovnat nule:

$$\overrightarrow{AB} = (2, -5, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AM} = (x-1, y-2, z+1),$$

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AM} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ x-1 & y-2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -4(x-1) - (y-2) + (z+1) = 0,$$

$\varrho:\ 4x + y - z - 7 = 0$, kde koeficienty u proměnných jsou souřadnice normálového vektoru $\vec{n} = (4, 1, -1)$ roviny ϱ.

Nyní určíme vzdálenost d bodu P od roviny ϱ podle

$$d = \left| \frac{a\,x_P + b\,y_P + c\,z_P + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{-8 + 1 - 6 - 7}{\sqrt{16 + 1 + 1}} \right| = \frac{20}{\sqrt{18}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}.$$

■

***Příklad* 125.** Body $A = [-1, 0, 2]$, $B = [3, 2, 0]$ veďte rovinu **a)** α rovnoběžnou s osou z; **b)** β rovnoběžnou s vektorem $\vec{u} = (3, 1, -2)$. Určete odchylku φ rovin α, β.

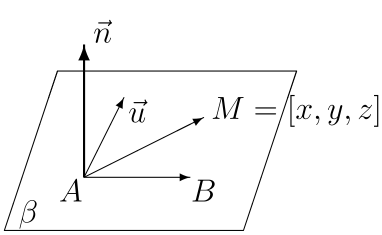
Řešení:

a) $\alpha:\ a\,x + b\,y + d = 0, \qquad A \in \alpha:\ -a + d = 0 \qquad \Rightarrow \quad a = d,$

$B \in \alpha:\ 3a + 2b + d = 0 \qquad \Rightarrow \quad b = -2d.$

Zvolíme $d = 1$, pak $a = 1$, $b = -2$ a dostáváme $\alpha:\ x - 2y + 1 = 0.$

b)



Rovnici roviny β můžeme určit dvojím způsobem:

1) ze smíšeného součinu $\left(\overrightarrow{AB} \times \vec{u}\right) \cdot \overrightarrow{AM} = 0,$

2) pomocí normálového vektoru $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u}$ a skalárního součinu $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$

Použijeme druhou možnost (první jsme použili v předcházejícím příkladu), kde $\overrightarrow{AB} = (4, 2, -2)$ a potom

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -2).$$

Jako normálu vezmeme vektor $(1,-1,1)$, který je kolineární s vektorem $(-2,2,-2)$.

Rovnici roviny β dostaneme ze skalárního součinu $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$.

$(1,-1,1)\cdot(x+1,y,z-2)=0 \;\Rightarrow\; x+1-y+z-2=0 \;\Rightarrow\; \beta:\; x-y+z-1=0.$

Odchylka φ dvou rovin se vypočítá jako úhel příslušných normálových vektorů.

$$\varphi=\angle(\alpha,\beta)=\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)\in\langle 0,\pi/2\rangle,$$

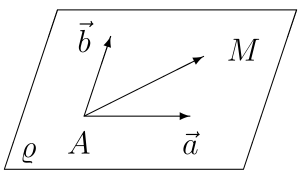
$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha|\cdot|\vec{n}_\beta|},\quad \vec{n}_\alpha=(1,-2,0),\quad \vec{n}_\beta=(1,-1,1),$$

$$\text{pak}\ \cos\varphi=\frac{|1+2|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

■

***Příklad* 126**. Bodem $A=[3,0,-1]$ veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s vektory $\vec{a}=(1,2,3)$ a $\vec{b}=(-2,1,-5)$.

Řešení:



Jako obvykle použijeme obecný bod $M=[x,y,z]$ a utvoříme vektor $\overrightarrow{AM}$.
Vektory $\overrightarrow{AM}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ musí být komplanární.
Podmínka komplanárnosti se dá zapsat dvěma způsoby:

1) $\overrightarrow{AM}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=0$, z čehož dostaneme obecnou rovnici roviny:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1\\ 1 & 2 & 3\\ -2 & 1 & -5\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad -13\,(x-3)-y+5\,(z+1)=0,\ \ \varrho:\ 13\,x+y-5\,z-44=0.$$

2) $\overrightarrow{AM}=u\,\vec{a}+v\,\vec{b} \quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AM}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{a},\vec{b}$, která v souřadnicích nám dá rovnici roviny v parametrickém tvaru:

$$\begin{pmatrix} x-3\\ y\\ z+1\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix}\qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x&=&3&+&u&-&2\,v\\ y&=&&&2\,u&+&v\\ z&=&-1&+&3\,u&-&5\,v\end{array}\right.\ ;\quad u,\ v\in\mathbb{R}.$$

Ve srovnání s obecnou rovnicí roviny je parametrické vyjádření komplikovanější, protože kromě souřadnic bodů x,y,z obsahuje i dva parametry, takže při volbě x_0,y_0 příslušné z_0 se spočítá až když z prvních dvou rovnic určíme u_0 a v_0 a dosadíme do poslední rovnice.

■

***Příklad* 127**. Najděte společné body tří rovin:

a) $x+2\,y+3\,z=1,\qquad 2\,x-3\,y+2\,z=9,\qquad 5\,x+8\,y-z=7;$

b) $x+3\,y-5=0,\qquad x-y-2\,z+4=0,\qquad 2\,x+2\,y-2\,z=1.$

Řešení: Hledáme bod (resp. body), jehož souřadnice musí splňovat všechny tři rovnice. Proto vyřešíme příslušnou soustavu a podle počtu řešení zjistíme, zda trojice rovin má jen jeden společný bod nebo jich má nekonečně mnoho nebo nemá žádný společný bod.

a)

$$\left\{\begin{array}{r} x+2\,y+3\,z=1\\ 2\,x-3\,y+2\,z=9\\ 5\,x+8\,y-z=7\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1&2&3&1\\ 2&-3&2&9\\ 5&8&-1&7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|r} 1&2&3&1\\ 0&-7&-4&7\\ 0&-2&-16&2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim \left| \begin{array}{c} \text{3.řádek vydělíme (-2)} \\ \text{a napíšeme jako druhý.} \end{array} \right| \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & -7 & -4 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 52 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = 3 \Rightarrow \text{jedno řešení} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + 2\,y + 3\,z = 1 \\ y + 8\,z = -1 \\ 52\,z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow\ z = 0, y = -1, x = 3.$$

Dané tři roviny mají jediný společný bod $P = [3, -1, 0]$.

b)

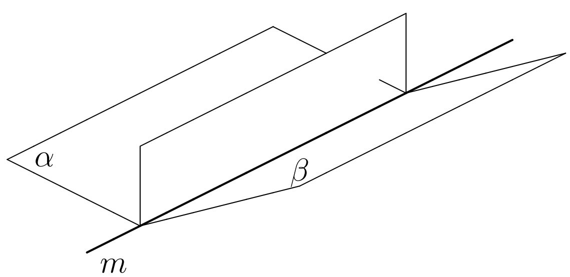
$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 3\,y & = 5 \\ x - y - 2\,z & = -4 \\ 2\,x + 2\,y - 2\,z & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -9 \\ 0 & -4 & -2 & -9 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \quad h(\mathcal{A}) = h(\mathcal{A}|\mathcal{B}) = 2 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Soustava má nekonečně mnoho řešení} \\ \text{závislých na jednom parametru } t: \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} x + 3\,y & = 5 \\ 4\,y + 2\,z & = 9 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \text{zvolíme } y = t, \text{ pak } \ x = 5 - 3\,t, z = \frac{1}{2}(9 - 4\,t).$$

Dané tři roviny se protínají v přímce m: $X = \left[5, 0, \frac{9}{2}\right] + t\,(-3, 1, -2)$.

Poznámka: Množina všech rovin, které procházejí společnou přímkou m se nazývá **svazek rovin**.



Přímka m je tzv. **osa svazku**. Svazek je určen, známe-li dvě jeho různé roviny
$\alpha:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a
$\beta:\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Libovolná rovina uvažovaného svazku se dá zapsat ve tvaru

$$k_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + k_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0,$$

kde $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ a aspoň jedno číslo z čísel k_1 a k_2 je různé od nuly. Je-li $k_1 \neq 0$, pak svazek rovin má rovnici:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + k(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0\ , \text{ kde } \ k = \frac{k_2}{k_1}.$$

V tomto příkladě jsme našli osu svazku. Snadno se přesvědčíme, že třetí rovina $2\,x + 2\,y - 2\,z = 1$ patří do svazku určeného rovnicí

$x + 3\,y - 5 + k(x - y - 2\,z + 4) = 0$ a má koeficient $k = 1$:

$$x + 3\,y - 5 + 1 \cdot (x - y - 2\,z + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\,x + 2\,y - 2\,z - 1 = 0.$$

■

***Příklad* 128**. Najděte rovnici roviny ϱ, která prochází bodem $A = [5, -2, -4]$ a průsečnicí rovin $x + y - z - 3 = 0$, $2\,x - y + 3\,z + 2 = 0$.

Řešení: Průsečnice daných rovin je osou svazku: $x + y - z - 3 + k(2\,x - y + 3\,z + 2) = 0$. Rovina ϱ patří do tohoto svazku a současně prochází bodem A. To znamená, že hledáme pro jaké k bude rovina svazku procházet bodem A. Dosazením souřadnic bodu A spočítáme k a potom i rovnici roviny ϱ :

$5-2+4-3+k\,(10+2-12+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 2\,k=-4 \quad\Rightarrow\quad k=-2,$

$\varrho:\ x+y-z-3-2(2\,x-y+3\,z+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 3\,x-3\,y+7\,z+7=0.$

■

***Příklad* 129**. Průsečnicí rovin $4\,x-y+3\,z-1=0, x+5\,y-z+2=0$ veďte rovinu ϱ kolmou k rovině $\sigma:\ 2\,x-y+5\,z-3=0.$

Řešení: První dvě roviny určují svazek a ani jedna z nich není kolmá k rovině σ, proto rovnice hledané roviny ϱ bude

$$4\,x-y+3\,z-1+k\,(x+5\,y-z+2)=0 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (4+k)\,x+(-1+5\,k)\,y+(3-k)\,z-1+2\,k=0.$$

Protože rovina ϱ je kolmá k rovině σ, jsou také jejich normály kolmé, tedy skalární součin $\vec{n}_\varrho$ a $\vec{n}_\sigma$ je roven nule.

Normálový vektor roviny svazku je $\vec{n}_\varrho=(4+k,-1+5\,k,3-k)$ a normála roviny σ je $\vec{n}_\sigma=(2,-1,5)$.

$\vec{n}_\varrho\perp\vec{n}_\sigma \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{n}_\varrho\cdot\vec{n}_\sigma=0 \quad\Rightarrow\quad (4+k,-1+5\,k,3-k)\cdot(2,-1,5)=0,$

$2\,(4+k)-(-1+5\,k)+5\,(3-k)=0 \quad\Rightarrow\quad -8\,k+24=0 \quad\Rightarrow\quad k=3.$

Tento parametr dosadíme do rovnice svazku a obdržíme hledanou rovnici roviny ϱ :
$4\,x-y+3\,z-1+3\,(x+5\,y-z+2)=0 \quad\Rightarrow\quad 7\,x+14\,y+5=0.$

■

130. Je dána rovina $\varrho:\ 2\,x-y+2\,z+6=0$. Určete: **a)** zda body $A=[3,10,-1]$ a $B=[-2,4,3]$ leží v této rovině; **b)** průsečík roviny s osou z; **c)** odchylku od roviny $\sigma:\ -x+2\,y-2\,z+6=0.$

[**a)** A ano, B ne; **b)** $[0,0,-3]$; **c)** $\cos\varphi=8/9$]

131. Napište rovnici roviny ϱ procházející body $A=[1,3,2], B=[2,2,1]$ a **a)** obsahující bod $[0,0,0]$; **b)** rovnoběžné s normálovým vektorem roviny $3\,x-y+10=0$; **c)** kolmé k rovině $2\,x-y-z+4=0.$

[**a)** $x-3\,y+4\,z=0$; **b)** $x+3\,y-2\,z-6=0$; **c)** $y-z-1=0$]

132. Napište rovnici roviny ϱ procházející bodem $A=[4,-7,5]$ a **a)** osou x; **b)** kolmou k ose z; **c)** rovnoběžnou s rovinou (xz); **d)** a vytínající na osách x,y,z stejné úseky.

[**a)** $5\,y+7\,z=0$; **b)** $z=5$; **c)** $y=-7$; **d)** $x+y+z-2=0$]

133. Určete vzdálenost rovin $\varrho:\ 2\,x-y+2\,z+5=0$ a $\sigma:\ 2\,x-y+2\,z-7=0.$
(Návod: Zvolte bod A v rovině ϱ a určete jeho vzdálenost od roviny σ.)

[4]

134. Najděte rovnici roviny procházející průsečnicí rovin $3\,x-2\,y-2\,z=-1, x-3\,y-z+2=0$ a bodem $B=[3,1,3].$

[$5x-8y-4z+5=0$]

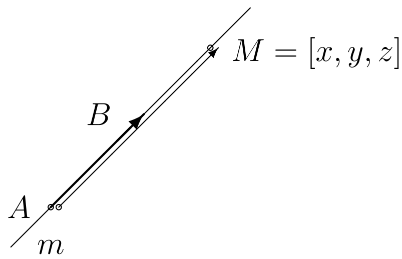
135. Průsečnicí rovin $x+3\,y-5=0, x-y-2\,z+4=0$ veďte rovinu ϱ rovnoběžnou s vektorem $\overrightarrow{AB}$, $A=[2,1,3]$, $B=[3,3,2].$

[$6x-10y-14z+33=0$]

II.5. Přímka v $\mathbb{E}_3$

***Příklad* 136**. Napište rovnici přímky p procházející body $A=[4,2,-1]$ a $B=[2,5,0]$.
a) Rozhodnětete, zda body $C=[6,-1,-2]$ a $D=[0,3,2]$ leží na přímce p.
b) Najděte průsečík Q přímky p s rovinou (xz).

Řešení:



Z bodů A, B a obecného bodu $M=[x,y,z]$ utvoříme dva vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AM}$, které jsou kolineární (tj. lineárně závislé), což zapíšeme vztahem

$$\overrightarrow{AM} = t\cdot\overrightarrow{AB},\ t\in\mathbb{R}.$$

Vektor $\overrightarrow{AB}$ je **směrovým** vektorem přímky, často označovaným $\vec{s}=\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{array}{lcl}\overrightarrow{AM} & = & (x-4, y-2, z+1)\\ \overrightarrow{AB} & = & (-2,3,1)\end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcr} x-4 & = & -2t\\ y-2 & = & 3t\\ z+1 & = & t\end{array}\right. \Rightarrow \quad p: \left\{\begin{array}{l} x=4-2t\\ y=2+3t\\ z=-1+t\end{array}\right. ,$$

dostali jsme tzv. **parametrické** rovnice přímky p.

a) Bod C bude ležet na přímce p, jestliže jeho souřadnice budou splňovat rovnice pro určitý parametr t_o. Zkusme dosadit

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 6 & = & 4 & - & 2t\\ -1 & = & 2 & + & 3t\\ -2 & = & -1 & + & t\end{array}\right. \begin{array}{l}\Rightarrow\ t_o=-1\\ \Rightarrow\ t_o=-1\\ \Rightarrow\ t_o=-1\end{array} \quad\Rightarrow\quad \text{bod } C \text{ leží na přímce } p;$$

Totéž zjistíme pro bod D :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 0 & = & 4 & - & 2t\\ 3 & = & 2 & + & 3t\\ 2 & = & -1 & + & t\end{array}\right. \begin{array}{l}\Rightarrow\ t_o=2\\ \Rightarrow\ t_o=\frac{1}{3}\neq 2\\ \\ \end{array} \quad\Rightarrow\quad \text{bod } D \text{ neleží na přímce } p;$$

b) rovina (xz) má rovnici $y=0$. Tuto hodnotu dosadíme do rovnic přímky p a dopočítáme ostatní souřadnice bodu Q:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & = & 4 & - & 2t & \\ y & = & 2 & + & 3t & =0\\ z & = & -1 & + & t & \end{array}\right. \Rightarrow\ t_o=-\frac{2}{3}\ \begin{array}{l}\nearrow\ x=4-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{3},\\ \\ \searrow\ z=-1-\frac{2}{3}=-\frac{5}{3},\end{array}$$

$$Q=\left[\frac{16}{3},\ 0,\ -\frac{5}{3}\right].$$

∎

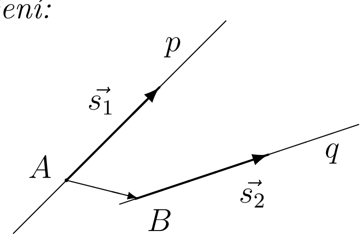
***Příklad* 137**. Určete vzájemnou polohu přímek p a q, jestliže:

$$\textbf{a)}\ \ p:\ \begin{cases} x = & 3 - t \\ y = & 1 + t \\ z = & -2 + 3\,t \end{cases}, \qquad q:\ \begin{cases} x = & 1 + 2\,u \\ y = & 3 - 2\,u \\ z = & 4 - 6\,u \end{cases},\ t,\ u \in \mathbb{R};$$

$$\textbf{b)}\ \ p:\ \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 2 + 5\,t \\ z = & 3 + 6\,t \end{cases}, \qquad q:\ \begin{cases} x = & 2\,u \\ y = & -1 + u \\ z = & 0 \end{cases},\ t,\ u \in \mathbb{R};$$

$$\textbf{c)}\ \ p:\ \begin{cases} x = & -1 + 4\,t \\ y = & 4 + t \\ z = & -1 + 3\,t \end{cases}, \qquad q:\ \begin{cases} x = & 2 + 4\,u \\ y = & 5\,u \\ z = & -5 + 3\,u \end{cases},\ t,\ u \in \mathbb{R}.$$

Řešení:



Mějme dvě přímky dané bodem a směrovým vektorem: $p:\ A,\ \vec{s}_1;\quad q:\ B,\ \vec{s}_2$. Potom pro jejich vzájemnou polohu mohou nastat tyto případy:

1) $\vec{s}_1 = k\,\vec{s}_2$, $k \neq 0,\ k \in \mathbb{R}$

$\nearrow$ $A \in q \iff$ p splývá s q,

$\searrow$ $A \notin q \iff$ $p \parallel q$, nesplývají,

2) $\vec{s}_1 \neq k\,\vec{s}_2$, pak přejdeme k smíšenému součinu:

$\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2)$

$\nearrow$ $= 0 \iff$ p a q jsou různoběžky,

$\searrow$ $\neq 0 \iff$ p a q jsou mimoběžky.

Nyní vyšetříme dané přímky:

a) na přímce p máme bod $A = [3, 1, -2]$ a $\vec{s}_1 = (-1, 1, 3)$;
na přímce q máme bod $B = [1, 3, 4]$ a $\vec{s}_2 = (2, -2, -6)$.
Okamžitě vidíme, že $\vec{s}_2 = -2\,\vec{s}_1$. Teď zjistíme, zda $A \in q$:

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2\,u & \Rightarrow\ u_o = 1 \\ 1 = 3 - 2\,u & \Rightarrow\ u_o = 1 \\ -2 = 4 - 6\,u & \Rightarrow\ u_o = 1 \end{cases} \Rightarrow\quad A \in q \quad\Rightarrow\quad \text{přímky } p, q \text{ splývají.}$$

b) $p:\ A = [1, 2, 3],\ \vec{s}_1 = (0, 5, 6)$,
$q:\ B = [0, -1, 0],\ \vec{s}_2 = (2, 1, 0)$, $\qquad \vec{s}_1 \neq k\,\vec{s}_2$,
proto přistoupíme ke smíšenému součinu,

$$\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -36+30+6 = 0 \ \Rightarrow\ \text{přímky } p,\ q \text{ jsou různoběžky.}$$

c) $p:\ A = [-1, 4, -1],\ \vec{s}_1 = (4, 1, 3)$,
$q:\ B = [2, 0, -5],\ \vec{s}_2 = (4, 5, 3)$, $\qquad \vec{s}_1 \neq k\,\vec{s}_2$,
proto přistoupíme ke smíšenému součinu,

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -4\,(9 + 16) =$$

$$= -100 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{přímky } p \text{ a } q \text{ jsou mimoběžky.}$$

∎

***Příklad* 138**. Použijte přímky z příkladu **137** a určete průsečík Q různoběžek z **b)** a nejkratší vzdálenost mimoběžek z **c)**.

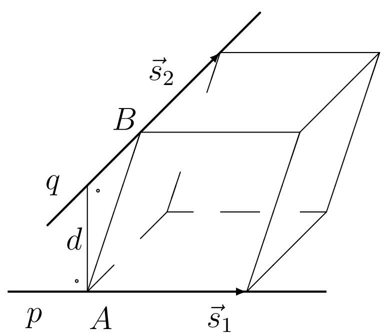
Řešení: Průsečík různoběžek musí splňovat rovnice obou přímek p a q:

$$p:\ \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 2+5\,t \\ z = & 3+6\,t \end{cases} \qquad q:\ \begin{cases} x = & 2\,u \\ y = & -1+u \\ z = & 0 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} 1 &= \quad 2\,u \ \Rightarrow\ u = \dfrac{1}{2} \\ 2+5\,t &= \quad -1+u \\ 3+6\,t &= \quad 0 \ \Rightarrow\ t = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \implies \quad 2+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -1+\frac{1}{2}$$

průsečík Q má parametr $t = -\dfrac{1}{2}$ v rovnici přímky p a parametr $u = \dfrac{1}{2}$ v rovnici přímky q a $Q = \left[1, -\dfrac{1}{2}, 0\right]$.

V případě **c)** z minulého příkladu víme, že přímky jsou mimoběžky.



Jejich nejkratší vzdálenost se rovná délce výšky d rovnoběžnostěnu. Tuto vzdálenost spočítáme z objemu rovnoběžnostěnu:

$$V = \left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\right| = |\vec{s_1}\times\vec{s_2}|\cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\right|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}.$$

V minulém příkladě jsme spočítali $\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})\right| = 100$, teď určíme

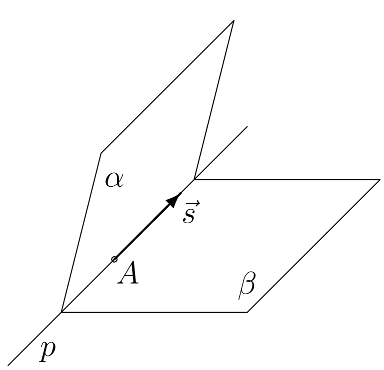
$$|\vec{s_1}\times\vec{s_2}| = \left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}\right| = |(-12,0,16)| = 4\cdot|(-3,0,4)| = 4\cdot\sqrt{9+16} = 20,$$

$$d = \frac{100}{20} = 5.$$

■

***Příklad* 139**. Napište parametrické rovnice přímky p, která je průsečnicí rovin $\alpha:\ 2\,x-3\,y-3\,z-9=0$ a $\beta:\ x-2\,y+z+3=0$.

Řešení:



Abychom mohli napsat parametrické rovnice přímky p, potřebujeme určit bod A a směrový vektor $\vec{s}$.

1) Bod A leží jak v rovině α tak i v rovině β : $A \in \alpha \cap \beta$. Zvolíme např. $y_A = 0$, tj. najdeme průsečík přímky p s rovinou (xz), kde x_A a z_A vypočítáme ze soustavy

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & - & 3y & - & 3z & - & 9 & = 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & 3 & = 0 \\ & & y & & & & & = 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad z = -3,\ x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = [0, 0, -3],$$

bod A dokonce leží na ose z.

2) Směrový vektor $\vec{s}$ přímky p je kolmý k normálovému vektoru $\vec{n}_\alpha$ roviny α i k normálovému vektoru $\vec{n}_\beta$ roviny β. Tedy

$$\vec{s} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-9, -5, -1).$$

Směrový vektor přímky p je např. vektor $(9, 5, 1)$ a parametrické rovnice jsou

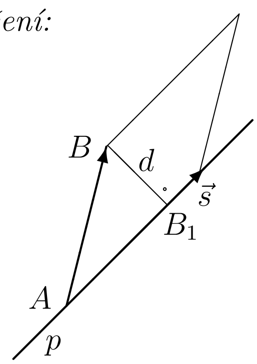
$$p : \left\{\begin{array}{rcrcl} x & = & 0 & + & 9 \cdot t \\ y & = & 0 & + & 5 \cdot t \\ z & = & -3 & + & 1 \cdot t \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 9t \\ y & = & 5t \\ z & = & -3 + t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}.$$

■

***Příklad* 140**. Určete vzdálenost bodu $B = [3, 4, -1]$ od přímky p:

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & + & t \\ y & = & 3 & - & 2t \\ z & = & -4 & + & 3t \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

Řešení:



Hledaná vzdálenost d je rovna délce kolmé úsečky BB_1 spuštěné z bodu B na přímku p. Plošný obsah rovnoběžníka sestrojeného z vektorů $\vec{s}$ a $\overrightarrow{AB}$ vyjádříme dvojím způsobem:

$$\left|\vec{s} \times \overrightarrow{AB}\right| = |\vec{s}| \cdot d \ \ \text{(základna krát výška), potom} \quad d = \frac{\left|\vec{s} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{s}|}.$$

V daném příkladě $A = [2, 3, -4]$, $\vec{s} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 3)$,

$$\left|\vec{s} \times \overrightarrow{AB}\right| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = |(-9, 0, 3)| = 3\,|(-3, 0, 1)| = 3\sqrt{10},$$

$$d = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = 3\sqrt{\frac{10}{14}} = 3\sqrt{\frac{5}{7}}.$$

■

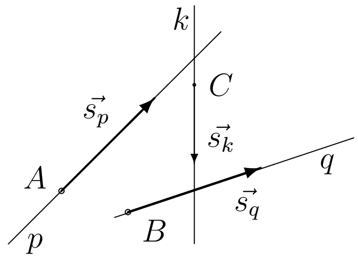
***Příklad* 141**. **a)** Potvrďte, že dané přímky p a q jsou mimoběžné.

$$p : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 7 & + & t \\ y & = & 3 & + & 2t \\ z & = & 9 & - & t \end{array}\right. \quad \text{a} \quad q : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 3 & - & 7u \\ y & = & 1 & + & 2u \\ z & = & 2 & + & 3u \end{array}\right. , \ t,\ u \in \mathbb{R}.$$

b) Určete odchylku φ těchto přímek. **c)** Najděte rovnici jejich příčky kolmé k oběma přímkám p a q, tzv. **osy mimoběžek**.

Řešení:

a) Pro každou přímku vybereme bod a směrový vektor:



$p:\ A = [7,3,9],\ \vec{s}_p = (1,2,-1),$

$q:\ B = [3,1,2],\ \vec{s}_q = (-7,2,3).$

Přímky p a q jsou mimoběžné, protože vektory $\vec{s}_p$, $\vec{s}_q$, $\overrightarrow{AB} = (-4,-2,-7)$ jsou lineárně nezávislé,

$$\text{jelikož}\quad (\vec{s}_p \times \vec{s}_q)\cdot \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -152 \neq 0.$$

b) Pod odchylkou φ dvou přímek se rozumí úhel $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ příslušných směrových vektorů. Vypočítáme

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q|}{|\vec{s}_p|\cdot|\vec{s}_q|} = \frac{|-7+4-3|}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{49+4+9}} = \frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{62}} = \sqrt{\frac{3}{31}}.$$

c) Najdeme vektor $\vec{s}$ kolmý k oběma směrovým vektorům $\vec{s}_p$ a $\vec{s}_q$

$$\vec{s} = \vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (8,4,16) \quad\Rightarrow\quad \vec{s} = (2,1,4).$$

Konkrétní bod $C = [x,y,z]$ osy mimoběžek p a q určíme pomocí podmínek různoběžnosti s přímkami p a q:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC}\cdot(\vec{s}_p \times \vec{s}) = 0,\ \text{kde}\quad \overrightarrow{AC} = (x-7,y-3,z-9) \\ \overrightarrow{BC}\cdot(\vec{s}_q \times \vec{s}) = 0,\ \text{kde}\quad \overrightarrow{BC} = (x-3,y-1,z-2) \end{array} \right. \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-9 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-2 \\ -7 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \right. \quad\Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 9(x-7) - 6(y-3) - 3(z-9) = 0 \\ 5(x-3) + 34(y-1) - 11(z-2) = 0 \end{array} \right. \quad\Rightarrow\quad \left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 5x + 34y - 11z - 17 = 0 \end{array} \right. .$$

Zvolíme bod C v rovině (xz) $\Rightarrow$ $C = [x,0,z]$, potom pro x a z dostáváme soustavu

$$\left\{ \begin{array}{r} 3x - z = 6 \\ 5x - 11z = 17 \end{array} \right. ,\ \text{ze které spočítáme}\ x = \frac{7}{4},\ z = -\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad C = \left[\frac{7}{4}, 0, -\frac{3}{4}\right].$$

Parametrické rovnice osy mimoběžek p a q jsou:

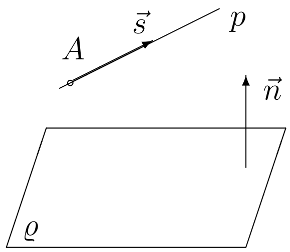
$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x & = & \dfrac{7}{4} & + & 2t \\ y & = & & & t\ , \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z & = & -\dfrac{3}{4} & + & 4t \end{array} \right.$$

■

***Příklad* 142.** Určete vzájemnou polohu roviny $\varrho:\ 2x-y+3z+7=0$ a přímky

$$\textbf{a)}\ p:\left\{\begin{array}{lcrcr} x&=&1&+&t\\ y&=&2&-&4t\\ z&=&&-&2t\end{array}\right.;\qquad \textbf{b)}\ q:\left\{\begin{array}{lcrcr} x&=&2&-&u\\ y&=&3&-&3u\\ z&=&2&+&2u\end{array}\right.,\ t,\ u\in\mathbb{R}.$$

Řešení:



Z rovnice přímky p přečteme bod A a směrový vektor $\vec{s}$. Vzájemná poloha se vyšetří pomocí vzájemné polohy směrového vektoru $\vec{s}$ přímky p a normálového vektoru $\vec{n}$ roviny ϱ.

$$\text{Jestliže } \vec{s}\cdot\vec{n}=0\ \left\langle\begin{array}{lcl} A\in\varrho & \Leftrightarrow & p\in\varrho \text{ (přímka leží v rovině)},\\ A\notin\varrho & \Leftrightarrow & p\parallel\varrho \text{ (přímka nemá žádný společný bod s rovinou)}.\end{array}\right.$$

Jestliže $\vec{s}\cdot\vec{n}\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad$ přímka p je různoběžná s rovinou.

a) $p:\ \ A=[1,2,0],\ \vec{s}_p=(1,-4,-2);\qquad \varrho:\ \vec{n}=(2,-1,3);$

$\vec{s}_p\cdot\vec{n}=(1,-4,-2)\cdot(2,-1,3)=2+4-6=0,$

$A\in\varrho\,?\ \ :2\cdot1-2+7\neq0 \quad\Rightarrow\quad A\notin\varrho \quad\Rightarrow\quad p\parallel\varrho \quad\Rightarrow$

přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ;

b) $q:\ B=[2,3,2],\ \vec{s}_q=(-1,-3,2)\qquad \varrho:\ \vec{n}=(2,-1,3)$

$\vec{s}_q\cdot\vec{n}=(-1,-3,2)\cdot(2,-1,3)=-2+3+6\neq0\Rightarrow$

přímka q je různoběžná s rovinou ϱ.

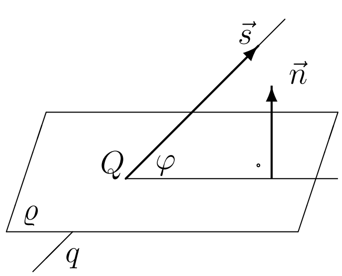
■

***Příklad* 143.** Použijte příklad **142 b)**, určete průsečík přímky p s rovinou ϱ a vypočtěte odchylku přímky q od roviny ϱ.

Řešení: Do rovnice roviny $\varrho:\ 2x-y+3z+7=0$ dosadíme z parametrických rovnic přímky

$$q:\left\{\begin{array}{lcrcr} x&=&2&-&t\\ y&=&3&-&3t\\ z&=&2&+&2t\end{array}\right.\quad \text{a vypočítáme parametr } t \text{ průsečíku } Q:$$

$$2(2-t)-(3-3t)+3(2+2t)+7=0 \quad\Rightarrow\quad 7t+14=0 \quad\Rightarrow\quad t=-2 \quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad Q=[4,9,-2].$$



Odchylka přímky od roviny je úhel $\varphi\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$, který určíme pomocí skalárního součinu normálového vektoru $\vec{n}$ roviny ϱ a směrového vektoru $\vec{s}$ přímky q:

$$\sin\varphi=\cos\Big(\frac{\pi}{2}-\varphi\Big)=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{|(-1,-3,2)\cdot(2,-1,3)|}{\sqrt{1+9+4}\sqrt{4+1+9}}=\frac{|-2+3+6|}{14}=\frac{1}{2},$$

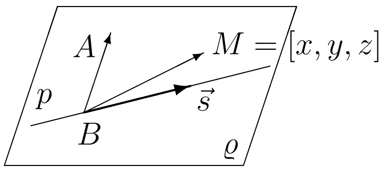
odchylka je $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$.

■

***Příklad* 144.** Napište rovnici roviny jdoucí bodem $A = [5, -1, 0]$ a přímkou

$$p: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = -1 + 4t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

Řešení:



Z parametrických rovnic přímky určíme bod $B = [3, 2, -1]$ a směrový vektor $\vec{s} = (1, -3, 4)$. Označíme $M = [x, y, z]$ libovolný bod hledané roviny.

Vektory $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}$ a $\vec{s}$ jsou komplanární a tedy $\overrightarrow{BM} \cdot (\overrightarrow{BA} \times \vec{s}) = 0$. V souřadnicích:

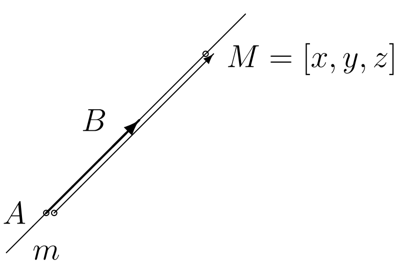
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z+1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -9(x-3) - 7(y-2) - 3(z+1) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varrho: \; 9x + 7y + 3z - 38 = 0.$$

■

***Příklad* 145.** Přímka p prochází body $A = [1, 2, -3], B = [3, 0, 2]$. Napište rovnici přímky p v kanonickém a v parametrickém tvaru.

Řešení: S parametrickým tvarem rovnice přímky jsme již několikrát pracovali, ale s kanonickým nikoliv. Proto nejdříve odvodíme kanonický tvar rovnice přímky v obecném případě.



Označme $\overrightarrow{AB} = \vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $A = [x_0, y_0, z_0]$, $M = [x, y, z], \overrightarrow{AM} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Vektory $\overrightarrow{AM}$ a $\vec{s}$ jsou kolineární a to znamená, že $\overrightarrow{AM}$ je násobkem vektoru $\vec{s}$, tj. jejich souřadnice splňují podmínky

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}.$$

Tyto rovnice nazýváme **kanonické**. Můžeme je chápat jako soustavu tří rovnic

$$\frac{x - x_0}{s_1} = \frac{y - y_0}{s_2}, \qquad \frac{y - y_0}{s_2} = \frac{z - z_0}{s_3}, \qquad \frac{x - x_0}{s_1} = \frac{z - z_0}{s_3},$$

z nichž každá popisuje rovinu: první je rovnoběžná s osou z, druhá je rovnoběžná s osou x a třetí s osou y. Všechny roviny patří do jednoho svazku rovin, jehož osou je přímka p.

Nyní vše spočítáme: $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (2, -2, 5)$,

kanonický tvar rovnice přímky p je $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{5}$,

parametrický tvar je $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + 5t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

■

***Příklad* 146**. Napište rovnice přímky $p:\ \begin{cases} 2\,x-3\,y-3\,z-9=0 \\ x-2\,y+z+3=0 \end{cases}$ a přímky

$$q:\ \begin{cases} x &= &2 &+ &3\,t \\ y &= & &- &t \\ z &= &-3 &+ &2\,t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}\ \text{ v kanonickém tvaru.}$$

Řešení:

<u>Přímka p</u>: Na přímce p určíme bod $A=[x,y,0]$. Zvolili jsme průsečík přímky p s rovinou (xy). Jeho souřadnice spočítáme ze soustavy

$$\Rightarrow\quad \begin{cases} 2\,x-3\,y-3\,z-9=0 \\ x-2\,y+z+3=0 \\ z=0 \end{cases}\quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 2\,x-3\,y=9 \\ x-2\,y=-3 \end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-27}{-1}=27,\qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-15}{-1}=15.$$

Směrový vektor $\vec{s}$ spočítáme z vektorového součinu normálových vektorů rovin:

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-9,-5,-1)\quad\Rightarrow\quad \vec{s}=(9,5,1).$$

Kanonický tvar rovnice přímky $p:\quad \dfrac{x-27}{9}=\dfrac{y-15}{5}=\dfrac{z}{1}.$

<u>Přímka q</u>: Pro kanonický tvar rovnice přímky q přečteme bod a směrový vektor přímky z parametrických rovnic $X=[2,0,3]+t\,(3,-1,2)$ nebo z každé rovnice vyjádříme parametr t a porovnáme vzniklé výrazy:

$$\frac{x-2}{3}=t,\quad \frac{y}{-1}=t,\quad \frac{z-3}{2}=t\qquad\Rightarrow\qquad \frac{x-2}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2},$$

což je hledaný kanonický tvar rovnice přímky q.

■

147. Napište parametrické rovnice přímek

a) $\begin{cases} 2\,x+3\,y-z-4=0 \\ 3\,x-5\,y+2\,z+1=0 \end{cases}$; **b)** $\begin{cases} x+2\,y-z-6=0 \\ 2\,x-y+z+1=0 \end{cases}$.

$\left[\textbf{a)}\ \begin{cases} x= & 1+t \\ y= & -7\,t \\ z= & -2-19\,t \end{cases};\ \textbf{b)}\ \begin{cases} x= & 1-t \\ y= & 2+3\,t \\ z= & -1+5\,t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}\right]$

148. Napište parametrické rovnice těžnice procházející vrcholem C trojúhelníka ΔABC, kde $A=[3,6,-7],\ B=[-5,2,3],\ C=[4,-7,-2]$.

$[x=4+5\,t,\ y=-7-11\,t,\ z=-2]$

149. Najděte odchylku přímek:

$$p:\ \begin{cases} x= & 5+2\,t \\ y= & 2-t \\ z= & 7+t \end{cases},\ t\in\mathbb{R},\qquad q:\ \begin{cases} x+3\,y+z+2=0 \\ x-y-3\,z-2=0 \end{cases}.$$

$[0,\ p\parallel q]$

150. Určete vzdálenost bodu A od přímky p:

a) $A=[1,-1,-2]$, $p:\ \left\{\begin{array}{rr} x= & -3+3\,t\\ y= & -2+2\,t\\ z= & 8-2\,t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$; **b)** $A=[5,-6,8]$, p je osa x.

[**a)** 7; **b)** 10]

151. Zjistěte, zda se přímky p a q protínají. Jestliže ano, určete souřadnice průsečíku a jestliže se neprotínají, určete jejich nejkratší vzdálenost, kde $p:\ X=[3,4,-1]+$ $+t\,(1,1,-1)$, $t\in\mathbb{R}$ a q je přímka procházející body$B=[-6,-5,1]$, $C=[0,7,-2]$.

[p, q jsou mimoběžky, $d=\sqrt{14}$]

152. Stanovte m tak, aby přímka $p:\ X=[-1,2,-3]+t\,(3,m,-2)$, $t\in\mathbb{R}$ byla rovnoběžná s rovinou $\varrho:\ x-3\,y+6\,z+7=0$.

[$m=-3$]

153. Stanovte a,b tak, aby přímka $p:\ X=[2,-1,5]+t\,(a,4,-3)$, $t\in\mathbb{R}$ byla kolmá k rovině $\varrho:\ 3\,x-2\,y-b\,z+15=0$. Určete průsečík p a ϱ.

$\left[a=-6,\ b=-\frac{3}{2};\ [-4,3,2]\right]$

154. Bodem $A=[0,-3,0]$ veďte rovinu kolmou ke dvěma rovinám $\alpha:\ x+2\,y+3\,z=5$, $\beta:\ 3\,x-5\,y+4\,z=12$.

[$23\,x+5\,y-11\,z+15=0$]

155. Přímkou $p:\ X=[1,-3,-2]+t\,(2,-1,5)$, $t\in\mathbb{R}$ veďte rovinu kolmou k rovině $\alpha:\ x+y-3\,z+7=0$.

[$-2\,x+11\,y+3\,z+41=0$]

156. Bodem $A=[4,3,-1]$ veďte rovinu kolmou k přímce $p:\ X=[1,2,5]+t\,(1,2,3)$, $t\in\mathbb{R}$.

[$x+2\,y+3\,z-7=0$]

157. Určete odchylku přímky p určené body $A=[2,0,3]$, $B=[2,2,2]$ od roviny $\alpha:\ 3\,z-y+10=0$.

[$\varphi=\pi/4$]

158. Napište kanonické rovnice těchto přímek

a) $\left\{\begin{array}{r} x-2y+3z-4=0\\ 3x+2y-5z-4=0\end{array}\right.$, **b)** $[x,y,z]=[3,2,1]+t\cdot(-1,1,4)$, $t\in\mathbb{R}$.

$\left[\textbf{a)}\,\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4};\quad \textbf{b)}\,\frac{x-3}{-1}=y-2=\frac{z-1}{4}\right]$

159. Napište parametrické rovnice přímky, která prochází bodem $A=[1,-1,-3]$ a je rovnoběžná s přímkou $\left\{\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{5}\\ z=1\end{array}\right.$.

[$X=[1,-1,-3]+t\,(2,5,0)$, $t\in\mathbb{R}$]

160. Určete odchylku přímky $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-5}{2}$ od roviny (xz).

[$\sin\varphi=\frac{2}{3}$]

II.6. Kvadriky v $\mathbb{E}_3$

***Příklad* 161**. Napište rovnici kulové plochy se středem v bodě $S = [1, 4, -7]$ a dotýkající se roviny $\alpha: \ 6x + 6y - 7z + 42 = 0$.

Řešení: Poloměr kulové plochy se bude rovnat vzdálenosti bodu S od roviny α :

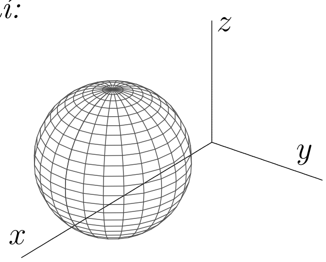
$$r = \frac{|6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 - 7 \cdot (-7) + 42|}{\sqrt{36 + 36 + 49}} = \frac{121}{\sqrt{121}} = 11.$$

Tím je kulová plocha určena: $\quad (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+7)^2 = 121.$

■

***Příklad* 162**. Určete souřadnice středu a poloměr kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 2z + 10 = 0.$

Řešení:



Seskupíme členy obsahující x, y a z a doplníme na čtverce:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) + (z^2 + 2z + 1) = -10 + 9 + 16 + 1 \quad \Rightarrow$$
$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+1)^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad S = [3, -4, -1], \ r = 4.$$

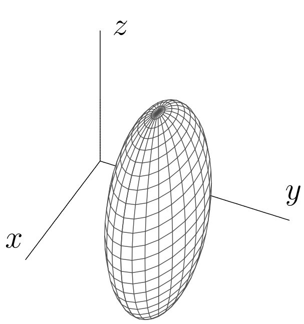
■

***Příklad* 163**. Určete o jaké kvadriky jde, pojmenujte je a určete střed, vrchol, osy podle toho, co z toho existuje.

a) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y + 117 = 0;$
b) $9x^2 + 36y^2 - 4z^2 - 9 = 0;$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 8z + 17 = 0;$
d) $x^2 + y^2 + 10x - 24 = 0;$
e) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 2x - 16z - 19 = 0.$
f) $y^2 + 4y - 8z + 12 = 0;$
g) $x^2 + 4y^2 = 9z^2;$
h) $x^2 - 4y^2 = z;$
i) $y^2 - z^2 = 0;$

Řešení: Každou rovnici kvadriky upravíme na tzv. **kanonický tvar**, ze kterého přečteme vše potřebné:

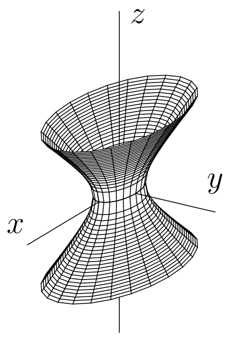
a)



$$9(x^2 - 2x \qquad) + 36(y^2 - 4y \qquad) + 4z^2 = -117 \quad \Rightarrow$$
$$9(x^2 - 2x + 1) + 36(y^2 - 4y + 4) + 4z^2 = -117 + 9 + 144,$$
$$9(x-1)^2 + 36(y-2)^2 + 4z^2 = 36 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{1} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Výsledná plocha je elipsoid se středem v bodě $S = [1, 2, 0]$ a poloosami $a = 2, \ b = 1, \ c = 3.$

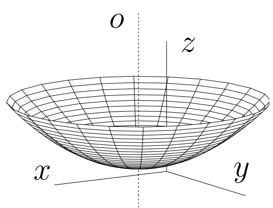
b)



$$9\,x^2 + 36\,y^2 - 4\,z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4\,y^2 - \frac{4\,z^2}{9} = 1.$$

Plocha je jednodílný eliptický hyperboloid se středem v bodě $[0, 0, 0]$ a poloosami $a = 1,\ b = \dfrac{1}{2},\ c = \dfrac{3}{2}$.

c)



$$(x^2 - 2\,x + 1) + y^2 = 8\,z - 17 + 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 8\,(z - 2) = (x - 1)^2 + y^2.$$

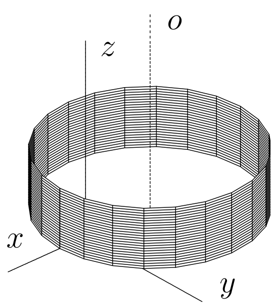
Plocha je rotační paraboloid s vrcholem v bodě $[1, 0, 2]$ a s osou rotace, která je rovnoběžná s osou z a prochází bodem $[1, 0, 0]$.

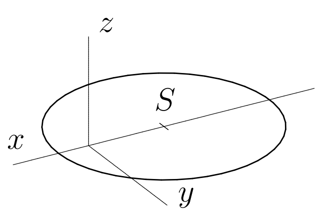
d)

$$(x^2 + 10\,x + 25) + y^2 = 24 + 25 \quad \Rightarrow \quad (x + 5)^2 + y^2 = 49.$$

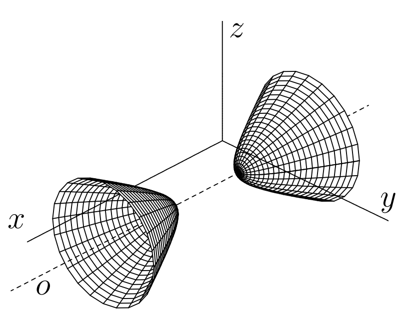
V prostoru E_3 znamená rotační válcovou plochu s osou rotace rovnoběžnou s osou z.

V rovině (xy) tato rovnice vyjadřuje kružnici se středem v bodě $[-5, 0, 0]$ a poloměrem $r = 7$.





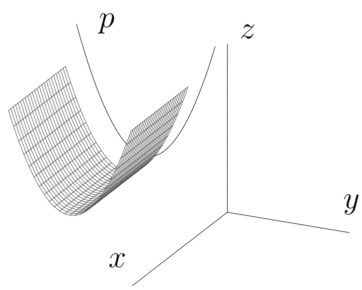
e)



$$(x^2 - 2\,x + 1) - 4\,y^2 - 4\,(z^2 + 4\,z + 4) = 19 + 1 - 16,$$
$$(x - 1)^2 - 4\,y^2 - 4\,(z + 2)^2 = 4 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{(x - 1)^2}{4} - y^2 - (z + 2)^2 = 1.$$

Dostali jsme rovnici rotačního dvoudílného hyperboloidu se středem v bodě $[1, 0, -2]$ a s osou rotace rovnoběžnou s osou x.

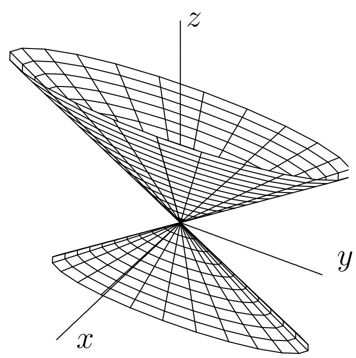
f)



$$y^2 + 4\,y + 4 = 8\,z - 12 + 4 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad (y+2)^2 = 8\,(z-1).$$

V rovině (yz) tato rovnice vyjadřuje parabolu p, ale v E_3 jde o válcovou plochu, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou x a jejíž řídící křivkou je parabola p.

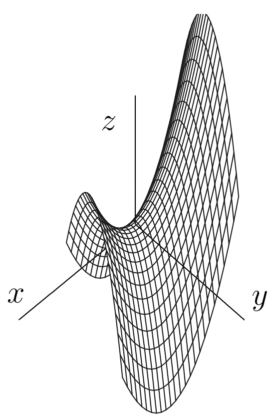
g)



$$x^2 + 4\,y^2 = 9\,z^2.$$

Je to eliptická kuželová plocha s vrcholem $V = [0,0,0]$ a osou splývající s osou z.

h)



$$x^2 - 4\,y^2 = z.$$

Plocha je hyperbolický paraboloid, jehož sedlový bod je počátek $[0,0,0]$.

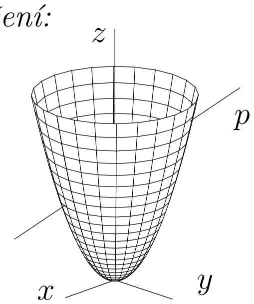
i) $\quad y^2 - z^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (y-z)(z+y) = 0 \quad \Rightarrow$

plochu tvoří dvě roviny: $y = z$ a $y = -z$, které prochází osou x. Tedy osa x je jejich průsečnice.

■

***Příklad* 164**. Určete průsečíky přímky $p : X = [-1,3,9] + t\,(1,-1,-1)$ s plochou $2\,z = x^2 + y^2$. O jakou plochu jde?

Řešení:



Plocha $2\,z = x^2 + y^2$ je rotační paraboloid s vrcholem v počátku souřadnicové soustavy a s osou v ose z. Průsečíky s přímkou p dostaneme tak, že x, y, z z rovnice přímky dosadíme do rovnice plochy, spočítáme parametry průsečíků a pak samotné průsečíky:

$2\,(9-t) = (-1+t)^2 + (3-t)^2 \quad \Rightarrow \quad 18 - 2\,t = 1 - 2\,t + t^2 + 9 - 6\,t + t^2 \quad \Rightarrow$
$2\,t^2 - 6\,t - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 3\,t - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-4)(t+1) = 0,$
pro $t_1 = 4$ obdržíme průsečík $P_1 = [3, -1, 5]$ a pro $t_2 = -1$ průsečík $P_2 = [-2, 4, 10]$.

■

165. Napište rovnici kulové plochy, která má střed v bodě $= [3, 0, -2]$ a prochází bodem $[3, 0, 0]$.

[$(x-3)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 4$]

166. Napište rovnici rotační válcové plochy, která má osu v ose x a má poloměr $r = 3$.

[$y^2 + z^2 = 9$]

167. V průsečících přímky $p: X = [1, 0, 1] + t\,(1, -1, 2)$ s kulovou plochou $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$ veďte tečné roviny k této ploše.

[$x - y + 2\,z - 3 = 0$, $x - y + 2\,z - 15 = 0$; tečné roviny jsou rovnoběžné, protože přímka p prochází středem kulové plochy]

168. Ukažte, že rovina $x = 2$ protíná elipsoid $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ v elipse a najděte její poloosy a vrcholy.

[$3, \ \sqrt{3}, \ [2, 3, 0], \ [2, -3, 0], \ [2, 0, \sqrt{3}], \ [2, 0, -\sqrt{3}]$]

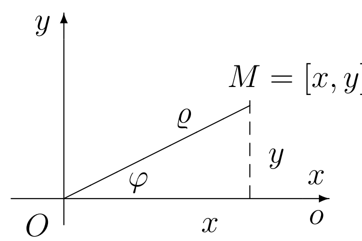
169. Jaký je řez hyperbolického paraboloidu $z = 4\,x^2 - y^2$ s rovinou: **a)** $y = 6$; **b)** $x = 1$; **c)** $z = 1$; **d)** $z = 0$.

[**a)** parabola; **b)** parabola; **c)** hyperbola; **d)** dvě různoběžné přímky]

II.7.* Některé technické křivky

Omezíme se jen na ty křivky, se kterými se studenti setkají v 1. a ve 2.semestru. Popíšeme jejich konstrukci, napíšeme rovnici, připojíme obrázek a popřípadně vyslovíme některé zvláštnosti.

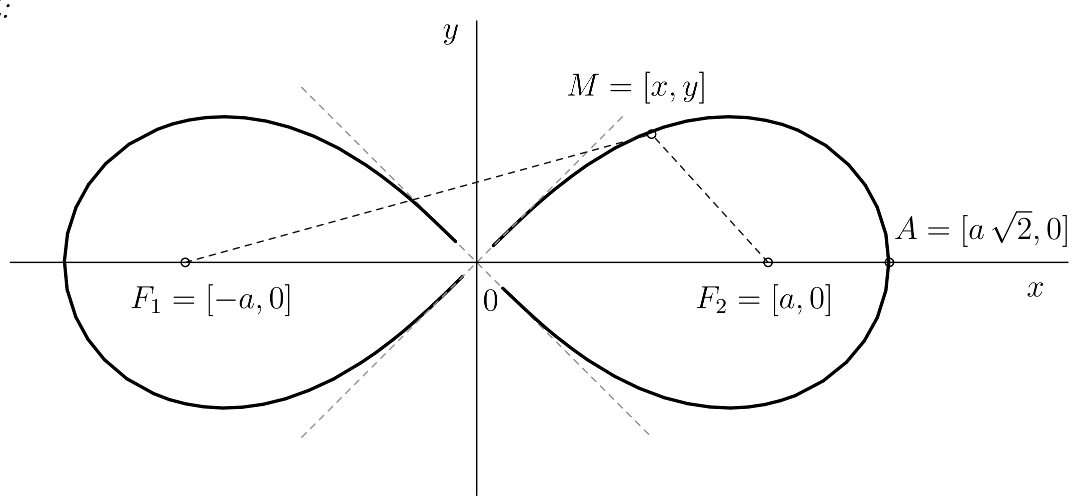
K analytickému vyjádření mnohých rovinných křivek jsou vedle souřadnic kartézských $[x, y]$ výhodné souřadnice polární $[\varrho, \varphi]$ určené počátkem O (tzv. pól) a polární osou o, kde ϱ je vzdálenost bodu M od počátku a φ je úhel, který svírá průvodič $\overrightarrow{AM}$ s osou o.



$$\begin{cases} x = \varrho \cdot \cos\varphi \\ y = \varrho \cdot \sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} \varrho = +\sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \quad 0 \le \varphi < 2\,\pi \end{cases}$$

***Příklad* 170.** **Bernoulliova lemniskáta** je geometrické místo bodů, které mají od dvou pevných bodů $F_1, F_2(|F_1F_2| = 2\,a)$ stálý součin vzdáleností a^2. Odvoďte její rovnici pro $F_1 = [-a, 0], F_2 = [a, 0]$.

Řešení:



Podle definice platí

$|F_1M| \cdot |F_2M| = a^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = a^2,$

$\Big((x+a)^2+y^2\Big)\Big((x-a)^2+y^2\Big) = a^4 \Longrightarrow (x^2+2\,a\,x+a^2+y^2)(x^2-2\,a\,x+a^2+y^2) = a^4,$

$(x^2+y^2)^2 + 2\,a^2(x^2+y^2) + a^4 - 4\,a^2x^2 = a^4 \Longrightarrow (x^2+y^2)^2 + 2\,a^2y^2 - 2\,a^2x^2 = 0 \Longrightarrow$

$(x^2+y^2)^2 = 2\,a^2(x^2-y^2)$ - rovnice Bernoulliovy lemniskáty.

Rovnice v kartézských souřadnicích je poměrně komplikovaná, proto přejdeme do polárních souřadnic:

$(\varrho^2)^2 = 2\,a^2(\varrho^2\cos^2\varphi - \varrho^2\sin^2\varphi) \Rightarrow \varrho^4 = 2\,a^2\varrho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Rightarrow \varrho^2 = 2\,a^2\cos 2\,\varphi \Rightarrow$

$\varrho = a\,\sqrt{2\,\cos 2\,\varphi}$ - rovnice lemniskáty v polárních souřadnicích.

Z podmínky $\cos 2\,\varphi \ge 0$ dostáváme $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\,\pi}{4}, \frac{5\,\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{7\,\pi}{4}, 2\,\pi)$.

Zvláštnosti:

a) Tečny v počátku svírají s osou x úhel $+\frac{\pi}{4}$ a $-\frac{\pi}{4}$, jsou tedy navzájem kolmé.

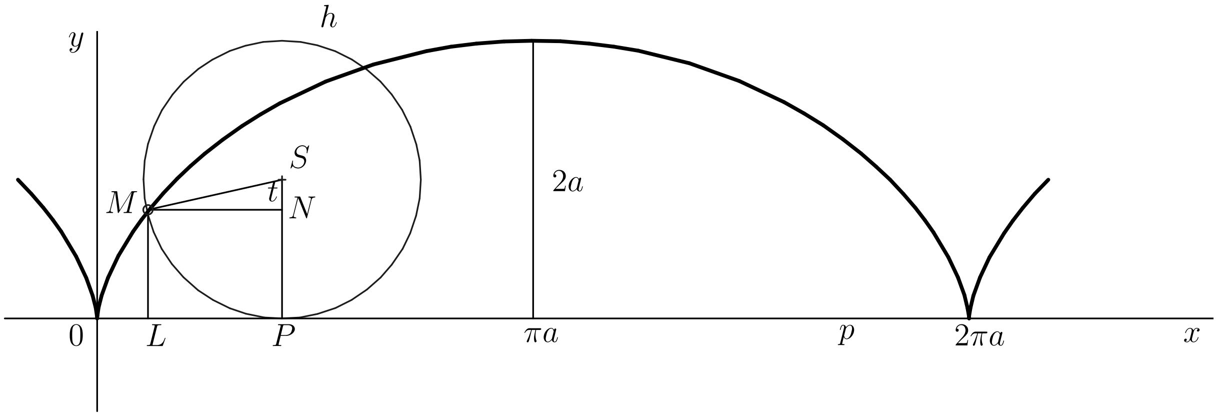
b) Průsečíky s osou x jsou body $A = [a\,\sqrt{2}, 0]$ a $B = [-a\,\sqrt{2}, 0]$ (viz M II př. 326).

c) Plošný obsah omezený lemniskátou je $2\,a^2$, což je plošný obsah čtverce o straně $a\sqrt{2}$ (velikost $OA = a\,\sqrt{2}$).

■

***Příklad* 171**. Odvoďte parametrické rovnice křivky zvané **prostá cykloida**, opsané bodem M ležícím na kružnici h o poloměru a, která se kotálí po přímce p.

Řešení: Zvolíme osu x za přímku p, po které se kotálí kružnice h a označme t úhel otočení kružnice.



$$x = OL = OP - LP, \qquad y = ML = SP - SN, \qquad SP = a,$$

$$OP = \overset{\frown}{MP} = at, \qquad LP = MN = a\,\sin t, \qquad SN = a\,\cos t.$$

Dosazením dostáváme rovnice cykloidy:

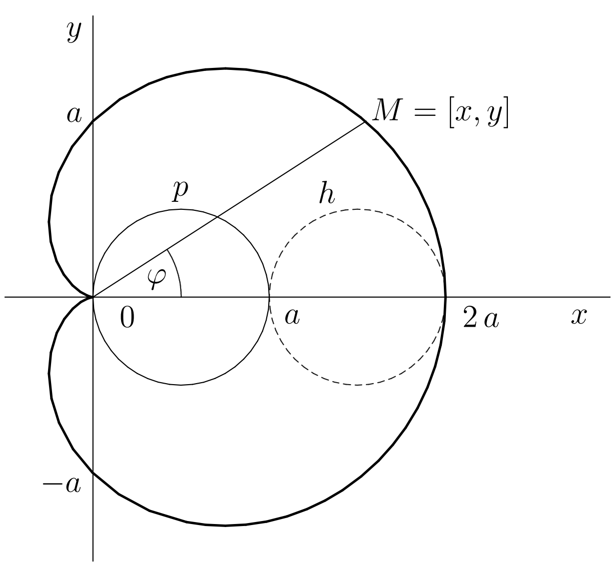
$$\left\{\begin{array}{l} x = a\,t - a\,\sin t = a\,(t - \sin t) \\ y = a - a\,\cos t = a\,(1 - \cos t) \end{array}\right. .$$ Jeden oblouk cykloidy obdržíme pro $t \in \langle 0, 2\,\pi\rangle$.

Zvláštnost: plošný obsah omezený osou x a jedním obloukem cykloidy je $3\pi a^2$, což je trojnásobek obsahu kotálející se kružnice (viz M II, př. 324).

■

***Příklad* 172**. Mějme dvě kružnice se stejným poloměrem mající vnější dotyk. **Kardioida** je křivka, kterou opíše bod ležící na kotálející se kružnici h po druhé pevné kružnici p.

Odvození rovnice přesahuje rámec těchto skript, proto ji rovnou napíšeme v polárních souřadnicích.



$\varrho = a\,(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\,\pi)$, kde a je průměr daných kružnic a φ je úhel, který svírá $\overrightarrow{OM}$ s kladnou poloosou x (polární osou).

Průsečíky s osou x dostaneme dosazením $\varphi = 0$ nebo $\varphi = \pi$:

$$\varrho(0) = 2\,a, \quad \varrho(\pi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad [2\,a, 0],\ [0, 0].$$

Průsečíky s osou y získáme pro $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ a $\varphi = \dfrac{3\,\pi}{2}$

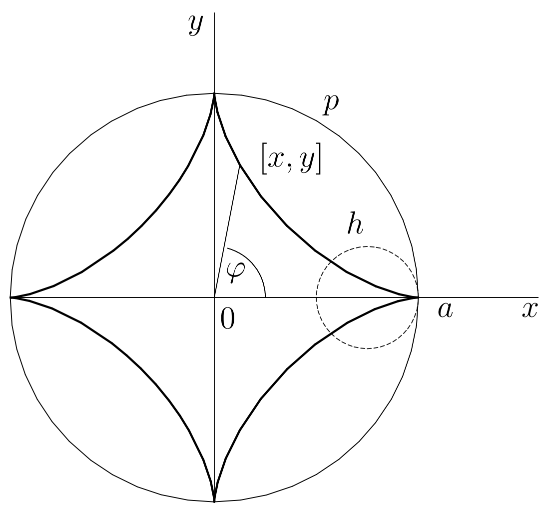
$$\varrho\left(\frac{\pi}{2}\right) = a, \quad \varrho\left(\frac{3\,\pi}{2}\right) = a \quad \Longrightarrow \quad [0, a],\ [0, -a].$$

Plošný obsah kardioidy je $\dfrac{3}{2}\,\pi\,a^2$ (viz M II, př. 334).

■

***Příklad* 173**. Je dána pevná kružnice p o poloměru a a kotálející se kružnice h s vnitřním dotykem o poloměru $a/4$. Bod kotálející se kružnice h opisuje křivku, která se nazývá **asteroida**.

Opět nebudeme odvozovat rovnici a napíšeme ji v obvyklém tvaru v polárních souřadnicích:



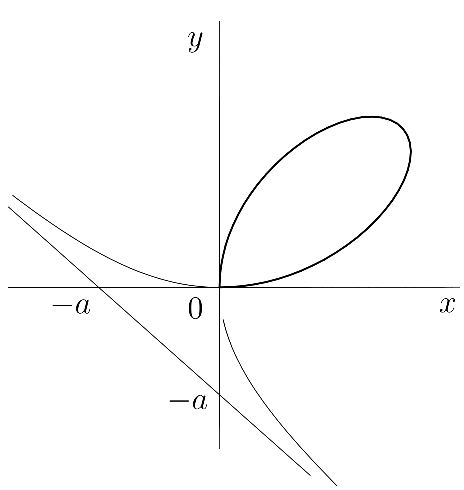
$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\,\cos^3\varphi \\ y = a\,\sin^3\varphi \end{array} \right. , \quad 0 \le \varphi < 2\,\pi.$$

Umocníme-li obě rovnice na $()^{\frac{2}{3}}$ a sečteme-li je, dostaneme $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, což je další často používaný tvar.

Plošný obsah asteroidy je $\dfrac{3}{8}\,\pi\,a^2$ (viz M II př. 325).

■

***Příklad* 174**. **Descartesův list** je křivka 3. stupně s rovnicí $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ v pravoúhlých souřadnicích.



Pomocí substituce $y = tx$ obdržíme

$x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0, \quad x \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ rovnice

v parametrickém tvaru.

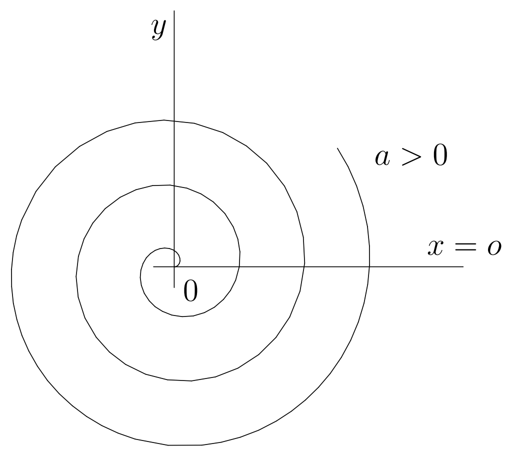
V integrálním počtu pro smyčku křivky je užitečnější rovnice v polárních souřadnicích

$$\varrho(\varphi) = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Plošný obsah omezený smyčkou křivky je $\dfrac{3}{2}\,a^2$ (viz M II, př. 328).

■

***Příklad* 175**. **Archimedova spirála** je trajektorie bodu, pohybujícího se po přímce, která se rovnoměrně otáčí.

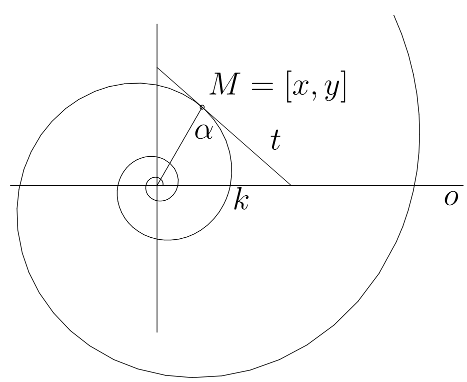


Rovnice této křivky v polárních souřadnicích je $\varrho = a\,\varphi$.

■

POZNÁMKA: Existuje velké množství spirál, ze kterých je nejzajímavější logaritmická spirála.

***Příklad* 176**. **Logaritmická spirála** je křivka splňující rovnici v polárních souřadnicích $\varrho = k\,e^{a\,\varphi}$, $\quad k \ne 0,\ a \ne 0$ jsou dané reálné konstanty.



Tato křivka má tuto důležitou vlastnost: tečna t a průvodič $\overrightarrow{OM}$ libovolného bodu M svírají konstantní úhel α.
(Viz př. 169 z Diferenciálního počtu.)

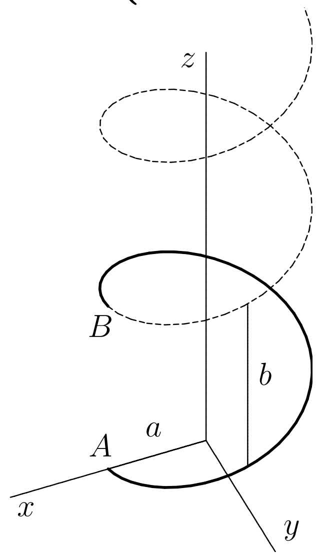
Tato vlastnost byla využívána již v 17. století v námořnictví při řízení plavby lodi. Jde o tzv. loxodromu - křivku na povrchu zeměkoule, která protíná všechny poledníky (meridiány) pod stejným úhlem α a tím zaručuje nejlepší orientaci při plavbě v otevřeném oceánu. R. Descartes byl prvním vědcem, který zkoumal tuto křivku.

■

POZNÁMKA: Zatím všechny křivky byly rovinné. Prostorová křivka je dána buď jako průsečnice dvou ploch nebo svými parametrickými rovnicemi.

Příklad 177. **Šroubovice na válcové ploše** $x^2+y^2=a^2$ má rovnice

$$\left\{\begin{array}{l} x=a\,\cos t \\ y=a\,\sin t \\ z=b\,t \end{array}\right. ,\ \text{kde pro}\ t\in\langle 0,2\,\pi\rangle\ \text{dostaneme jeden závit šroubovice.}$$

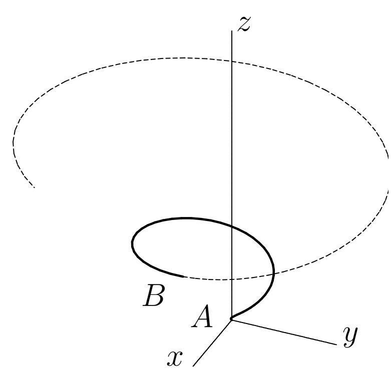


Počátečním bodem je bod A s parametrem $t=0 \Longrightarrow A=[a,0,0]$ a koncovým bodem $B=[a,0,2\,\pi\,b]$ pro $t=2\,\pi$.

Šroubovice je křivka s konstantním spádem.

Příklad 178. **Šroubovice na kuželové ploše** $z=\sqrt{x^2+y^2}$ má rovnice

$$\left\{\begin{array}{l} x=t\,\cos t \\ y=t\,\sin t \\ z=t \end{array}\right. ,\ \text{pro}\ t\in\langle 0,2\,\pi\rangle\ \text{opět obdržíme jeden závit šroubovice.}$$



Počátečním bodem je bod $A=[0,0,0]$ pro $t=0$ a koncovým bodem je $B=[2\,\pi,0,2\,\pi]$ pro $t=2\,\pi$.

■

Příklad 179. Napište parametrické rovnice průsečné křivky ploch:

a) $x^2+y^2=4,\quad x-2\,y+z=0;$

b) $x^2+y^2+z^2=2\,a^2,\quad z=\sqrt{x^2+y^2};$

c) $x^2=3\,y,\quad 2\,xy=9\,z.$

Řešení:

a) První rovnice je rovnicí rotační válcové plochy s osou rotace v ose z. Druhá rovnice $x-2\,y+z=0$ vyjadřuje rovinu procházející počátkem souřadné soustavy. Průsečnice těchto dvou ploch je elipsa. Parametrické rovnice elipsy napíšeme použitím polární soustavy v rovině (xy) a z rovnice roviny vyjádříme proměnnou $z=2\,y-x$:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2\,\cos t \\ y=2\,\sin t \\ z=4\,\sin t-2\,\cos t \end{array}\right. ,\quad t\in\langle 0,2\,\pi).$$

b) První rovnice $x^2+y^2+z^2=2\,a^2$ je rovnice kulové plochy se středem $S=[0,0,0]$ a $r=a\sqrt{2}$. Druhá rovnice $z=\sqrt{x^2+y^2}$ je rovnice rotační kuželové plochy s vrcholem v bodě $[0,0,0]$ a s osou rotace v ose z.
Plochy se protínají v kružnici, kterou určíme ze soustavy

$$\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=2\,a^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2\,(x^2+y^2)=2\,a^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x^2+y^2=a^2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad z=a.$$

Průsečná kružnice leží v rovině $z=a$. Pro parametrizaci opět použijeme polární souřadnice a dostaneme:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=a\,\cos t \\ y=a\,\sin t \\ z=a \end{array} \right. , \qquad t\in\langle 0,2\,\pi).$$

c) První rovnice je rovnice parabolické válcové plochy, jejíž povrchové přímky jsou rovnoběžné s osou z. Druhá rovnice je rovnice hyperbolického paraboloidu.
Za proměnnou x zvolíme parametr t. Z první rovnice vyjádříme proměnnou y a z druhé rovnice proměnnou z. Dostaneme parametrické rovnice průsečné křivky

$$\left\{ \begin{array}{l} x=t \\ y=\dfrac{1}{3}\,t^2 \\ z=\dfrac{2}{27}\,t^3 \end{array} \right. , \quad t\in R\,.$$

■

Doporučená literatura

[1] J. Neustupa: **Matematika I** ČVUT, Praha 1998 (*Základní literatura pro předmět Matematika I. Skriptum určené pro studenty FSI ČVUT v Praze.)*

[2] B. Budínský, J. Charvát: **Matematika I** SNTL/Alfa, Praha 1987 (*Podrobná, srozumitelně napsaná učebnice.)*

[3] J. Neustupa, S. Kračmar : **Sbírka příkladů z Matematiky I.** ČVUT, Praha 1998 (*Rozsáhlá sbírka neřešených příkladů z Matematiky I.)*

[4] K. Rektorys : **Přehled užité matematiky** SNTL Praha 1988 (*Rozsáhlá encyklopedie aplikované matematiky napsaná pro potřeby technických věd.)*