Fakulta strojní

VYDAVATELSTVÍ ČVUT

ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

SBÍRKA PŘÍKLADŮ Z MATEMATIKY II

Elena Brožíková

Milana Kittlerová

I. Určitý integrál

I.1. Existence určitých integrálů

• Zjistěte, zda existují určité integrály :

***Příklad* 1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+1}\,dx$

Řešení : Ano existuje, protože funkce $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1}$ je spojitá na intervalu $\langle 0,1\rangle$. ∎

***Příklad* 2.** $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x}\,dx$

Řešení : Neexistuje, protože funkce $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x} = \dfrac{x^2+3}{x(x+1)(x-4)}$ není spojitá v bodě $x=4$ $\Big(x \in (1,10)\Big)$ a $\lim\limits_{x\to 4\pm} f(x) = \pm\infty$. ∎

***Příklad* 3.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}-1}{x}\,dx$

Řešení : Integrál existuje. Funkce $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{x}$ sice není spojitá v bodě $x=0$ $\Big(x \in (-1,1)\Big)$, avšak $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x} = 2.$ ∎

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x}\,dx$ [ano , $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x} = 0$]

5. $\displaystyle\int_0^2 x e^{x^2}\,dx$ [ano]

6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-2\cos x}\,dx$ [ne , $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}\pm} \frac{1}{1-2\cos x} = \pm\infty$]

I.2. Výpočet integrálu podle definice

• Přímo z definice integrálu vypočtěte :

***Příklad* 7.** $\displaystyle\int_a^b e^x\,dx$

Řešení : Zvolíme dělení intervalu $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, na n stejných dílů délky $\triangle x_i = \triangle x = \dfrac{b-a}{n}$, takže $x_1 = a + \triangle x, \dots x_i = a + i\triangle x, x_n = a + n\triangle x = b$. Za ξ_i zvolíme levé koncové body částečných intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, tj. $\xi_i = x_{i-1} = a + (i-1)\triangle x$. Vyšetřujeme funkci $f(x) = e^x$.

Potom pro integrální součet platí $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{\xi_i}\triangle x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{a+(i-1)\triangle x}\triangle x =$

$\sum_{i=1}^{n} e^a \cdot e^{(i-1)\triangle x} \cdot \triangle x = e^a \cdot \triangle x(1 + e^{\triangle x} + e^{2\triangle x} + \ldots + e^{(n-1)\triangle x}) = ($v závorce je součet geometrické řady$)$ $e^a \cdot \triangle x \dfrac{e^{n\triangle x} - 1}{e^{\triangle x} - 1} = \triangle x \dfrac{e^{a+n\triangle x} - e^a}{e^{\triangle x} - 1} = \triangle x \dfrac{e^b - e^a}{e^{\triangle x} - 1}$. Nyní $\int_a^b e^x\,dx =$

$= \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{\triangle x\to 0} \dfrac{\triangle x}{e^{\triangle x} - 1}(e^b - e^a) = e^b - e^a$, což je hodnota $\int_a^b e^x\,dx = \Big[e^x\Big]_a^b =$

$= e^b - e^a$. ■

POZNÁMKA : Vzhledem k tomu, že integrál existuje, nemůže jiný způsob dělení intervalu vést k jinému výsledku.

POZNÁMKA : Použili jsme vzorce : $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ a $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

***Příklad* 8.** $\int_a^b x\,dx$

Řešení : Hodnoty $\triangle x_i$ a ξ_i zvolíme jako v předcházejícím příkladě. Pak je $f(x) = x$, a tedy $s_n = \sum_1^n f(\xi_i) \cdot \triangle x_i = \sum_1^n \xi_i \cdot \triangle x_i = \sum_1^n (a + (i-1)\triangle x) \cdot \triangle x = (a + (a + \triangle x) +$

$+ (a + 2\triangle x) + \ldots + (a + (n-1)\triangle x)) \cdot \triangle x = \dfrac{a + (a + (n-1)\triangle x)}{2} \cdot n \cdot \triangle x =$

$= \dfrac{a+b}{2} \cdot n \cdot \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$; $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$. Můžeme to porovnat s výsledkem podle Newtonovy-Leibnizovy formule: $\int_a^b x\,dx = \Big[\dfrac{x^2}{2}\Big]_a^b = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$. ■

POZNÁMKA : Použili jsme vzorec pro součet aritmetické řady $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

I.3. Newtonova-Leibnizova formule

• Pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vypočtěte integrály :

***Příklad* 9.** $\int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

Řešení : $I = \int_0^{\pi/4} \dfrac{1 + 1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \left(\dfrac{2}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \Big[2\,\mathrm{tg}\,x - x\Big]_0^{\pi/4} =$

$= 2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{4} = 2 - \dfrac{\pi}{4}$. ■

***Příklad* 10.** $\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$

Řešení : $I = \int_3^8 (1+x)^{1/2}\,dx = \dfrac{2}{3}\Big[(1+x)^{3/2}\Big]_3^8 = \dfrac{2}{3} \cdot (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \dfrac{38}{3}$. ■

***Příklad* 11.** $\int_0^2 \dfrac{x-3}{x^2+4}\,dx$

Řešení : $I = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{x^2+4}\,dx - 3\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+4)\Big]_0^2 - \frac{3}{2}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big]_0^2 =$

$= \frac{1}{2}\cdot(\ln 8 - \ln 4) - \frac{3}{2}\cdot\operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 - \frac{3\pi}{8}.$ ■

***Příklad* 12.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{5x+1}{x^2+x-2}\,dx$

Řešení : Integrovanou funkci nejdříve rozložíme na parciální zlomky a integrál vypočteme :

$$\frac{5x+1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\,, \quad 5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x = 1:\ 6 = 3A \longrightarrow A = 2\,; \quad x = -2:\ -9 = -3B \longrightarrow B = 3$$

$$I = \int_2^5 \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2}\right) dx = \Big[2\ln|x-1| + 3\ln|x+2|\Big]_2^5 =$$

$$= 2\ln 4 + 3\ln 7 - 2\ln 1 - 3\ln 4 = 3\ln 7 - \ln 4 = \ln\frac{343}{4}.$$

POZOR ! Tentýž integrál na jiném intervalu $\langle a,b\rangle$ nemusí existovat, bude-li $\langle a,b\rangle$ obsahovat aspoň jedno z čísel $x=-2$ nebo $x=1$. ■

***Příklad* 13.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}\,dx$

Řešení : Zde využijeme, že funkce $f(x) = \cos^2\frac{x}{2}$ je sudá, tj. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{2}\,dx = \Big[x + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1.$$ ■

***Příklad* 14.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$

Řešení : Nyní využijeme to, že funkce $f(x) = x^2\sin x$ je lichá, tj. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$ ■

***Příklad* 15.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \left|\frac{1}{2} - \cos x\right| dx$

Řešení : Odstraníme absolutní hodnotu: $\frac{1}{2} - \cos x \ge 0$ pro $x \in \langle\frac{\pi}{3}, \pi\rangle$ a $\frac{1}{2} - \cos x < 0$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3}\rangle$, takže pro daný integrál platí :

$$I = \int_0^{\pi/3} -\Big(\frac{1}{2} - \cos x\Big)\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi}\Big(\frac{1}{2} - \cos x\Big)\,dx = \Big[\sin x - \frac{1}{2}x\Big]_0^{\pi/3} + \Big[\frac{1}{2}x - \sin x\Big]_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}.$$ ■

16. $\displaystyle\int_{-4}^{4} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\,dx$ $[2\ln 3]$

17. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$ $[\ln 3]$

18. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x}{e^x+e}\,dx$ $\left[\ln\frac{2e}{1+e}\right]$

19. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2-x}\,dx$ $\left[2\ln\frac{4}{3}\right]$

I.4. Věta o střední hodnotě integrálů

• Pomocí věty o střední hodnotě odhadněte hodnoty integrálů :

***Příklad* 20.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$

Řešení : Použijeme Větu o střední hodnotě : *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou spojité v $\langle a,b\rangle$ a nechť $g(x)$ má stále stejné znaménko pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$. Potom existuje číslo $c\in\langle a,b\rangle$ takové, že* $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$

V našem případě $\displaystyle I=\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\int_0^1 x^9\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+c^3}}\cdot\frac{1}{10}$, kde $c\in\langle 0,1\rangle$, což nám umožňuje odhadnout $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt2}<\frac{1}{10\sqrt{1+c^3}}<\frac{1}{10}$; a tedy $\displaystyle\frac{1}{10\sqrt2}\le I\le\frac{1}{10}$. ■

***Příklad* 21.** $\displaystyle\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

Řešení : $\displaystyle I=e^{c^2}\cdot\int_0^2 dx = e^{c^2}\cdot 2,\quad c\in\langle 0,2\rangle,\quad$ tedy $2\le I\le 2e^4$. ■

***Příklad* 22.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$

Řešení : $\displaystyle I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+c}\cdot\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+c}\cdot\frac{1}{n+1}=0$ pro všechna $c\in\langle 0,1\rangle$. ■

23. $\displaystyle\int_1^{10}\frac{e^{-x}}{x}\,dx$ $\quad\left[\frac{e^9-1}{10e^{10}}\le I\le\frac{e^9-1}{e^{10}}\right]$

24. $\displaystyle\int_0^{0.5}\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\,dx$ $\quad\left[\frac{1}{2\sqrt{1-0.5^n}}\le I\le\frac12\right]$

25. $\displaystyle\int_1^4\frac{\cos x}{x^3}\,dx$ $\quad\left[0\le I\le\frac{15}{32}\right]$

I.5. Metoda per partes

• Vypočtěte integrály pomocí metody per partes :

***Příklad* 26.** $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|x|\cos x\,dx$

Řešení : Integrovaná funkce je sudá. Tedy $\displaystyle I=2\int_0^{\pi/2}|x|\cos x\,dx = 2\int_0^{\pi/2}x\cos x\,dx=$

$$= \begin{vmatrix} u = x, & v' = \cos x \\ u' = 1, & v = \sin x \end{vmatrix} = 2\Big[x \sin x\Big]_0^{\pi/2} - 2\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2\Big[\cos x\Big]_0^{\pi/2} = \pi - 2.$$

■

***Příklad* 27.** $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\, dx$

Řešení : $I = \begin{vmatrix} u = \ln(x+1), & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x+1}, & v = x \end{vmatrix} = \Big[x \ln(x+1)\Big]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1}\, dx = (e-1)\ln e -$

$$- \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}\, dx = e - 1 - \Big[x - \ln(x+1)\Big]_0^{e-1} = e - 1 - (e - 1 - \ln e) = 1.$$

■

***Příklad* 28.** $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx$

Řešení : $I = \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & v' = \sin x \\ u' = 2e^{2x}, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -\Big[e^{2x} \cos x\Big]_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x\, dx =$

$$= \begin{vmatrix} u = e^{2x}, & v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x}, & v = \sin x \end{vmatrix} = 1 + 2\Big[e^{2x} \sin x\Big]_0^{\pi/2} - 4\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x\, dx.$$

Dostali jsme rovnici $I = 1 + 2e^{\pi} - 4I$, ze které $5I = 1 + 2e^{\pi}$.

Výsledek daného příkladu je $I = \frac{1}{5}(1 + 2e^{\pi})$. ■

***Příklad* 29.** $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$

Řešení :

⋆ pro $n = 0$ je $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$;

⋆ pro $n = 1$ je $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$;

⋆ pro $n = 2$ je $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{\sin 2x}{2}\Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$;

⋆ pro $n \geq 3$ je $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1 - \cos^2 x)\, dx =$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = \cos x, & v' = \sin^{n-2} \cdot \cos x \\ u' = -\sin x, & v = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \end{vmatrix} =$$

$$= I_{n-2} - \Big[\frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1}\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx.$$

Dostaneme rovnici $I_n = I_{n-2} - 0 - \frac{1}{n-1} I_n$, ze které vypočteme $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

Provedeme diskuzi :

$$\text{Pro} \begin{cases} n = 2k \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \\ n = 2k+1 \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1. \end{cases}$$

Tím jsme odvodili tzv. **Wallisovy formule**.

Tentýž výsledek platí i pro $\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$, jelikož $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$. ∎

30. $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x\,dx$ $\left[\frac{16}{35}\right]$

31. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^8 x\,dx$ $\left[\frac{35\pi}{128}\right]$

32. $\int_0^{\pi} \cos^6 x\,dx$ $\left[\frac{5\pi}{16}\right]$

33. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^9 x\,dx$ $[0]$

34. $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \operatorname{arctg} x\,dx$ $\left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

35. $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\,dx$ $\left[2 - \frac{2}{e}\right]$

36. $\int_0^1 y \cdot \ln(x+y)\,dx,\ (y > 0)$ $[y(y+1)\ln(y+1) - y^2 \ln y - y]$

I.6. Substituční metoda

• Vypočtěte integrály substituční metodou :

***Příklad* 37.** $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$

Řešení : Použijeme substituci $\left[\begin{array}{l|ll} 1+\ln x = t & x_1 = 1 & \longrightarrow t_1 = 1 \\ \frac{dx}{x} = dt & x_2 = e^3 & \longrightarrow t_2 = 4 \end{array}\right]$ a dostaneme

$$I = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}}\,dt = 2\Big[\sqrt{t}\Big]_1^4 = 2 \cdot (2-1) = 2.$$ ∎

***Příklad* 38.** $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$

Řešení : Po substituci $\left[\begin{array}{l|ll} \frac{1}{x} = t & x_1 = \frac{1}{\pi} & \longrightarrow t_1 = \pi \\ -\frac{dx}{x^2} = dt & x_2 = \frac{2}{\pi} & \longrightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array}\right]$ obdržíme

$$I = -\int_{\pi}^{\pi/2} \sin t\;dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t\;dt = \Big[-\cos t\Big]_{\pi/2}^{\pi} = 1\;.$$ ∎

***Příklad* 39.** $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

Řešení : Po substituci $\left[\begin{array}{l|ll} x^2 = t & x_1 = 0 & \longrightarrow t_1 = 0 \\ 2x\,dx = dt & x_2 = 1 & \longrightarrow t_2 = 1 \end{array}\right]$ získáme

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} t\Big]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$ ∎

***Příklad* 40.** $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$

Řešení : Použijeme substituci $\left[\begin{array}{l|l} x = 2\sin t & x_1 = 0 \longrightarrow t_1 = 0 \\ dx = 2\cos t\,dt & x_2 = 2 \longrightarrow t_2 = \pi/2 \end{array}\right]$ a dostaneme

$$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = 4\int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= 2\Big[t + \frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{\pi/2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\,. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 41.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2}\,dx$

Řešení : Zvolíme substituci $\left[\begin{array}{l|l} x^2 + 4 = t & x_1 = 1 \longrightarrow t_1 = 5 \\ 2x\,dx = dt & x_2 = 2 \longrightarrow t_2 = 8 \end{array}\right]$ a potom

$$I = \frac{1}{2}\int_5^8 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \Big[\frac{1}{t}\Big]_5^8 = -\frac{1}{2} \cdot \Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{3}{80}. \qquad \blacksquare$$

42. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}}\,dx$ $[\ln\sqrt{3}\,]$

43. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$ $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

44. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{72}\right]$

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cdot \cos x\,dx$ $\left[\frac{1}{48}\right]$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\,dx$ $\left[\frac{5}{24}\right]$

47. $\displaystyle\int_0^{1/2} x^2\sqrt{1-4x^2}\,dx$ $\left[\frac{\pi}{128}\right]$

48. $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1}\,dx$ $[2(2-\ln 2)]$

49. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$ $\left[\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right]$

I.7. Nevlastní integrál

Nechť pro každé $t \in \langle a; b)$ existuje integrál $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$. Potom symbol

$$(1) \quad \int_a^\infty f(x)\,dx, \qquad \textit{resp.} \qquad (2) \quad \int_a^b f(x)\,dx, \ \textit{kde} \lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty,$$

*nazýváme **nevlastní integrál vlivem meze**, resp. **nevlastní integrál vlivem funkce**. Integrál* (1), *resp.* (2) *nazýváme **konvergentní**, jestliže*

$$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx, \qquad \textit{resp.} \qquad \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx, \quad \textit{je vlastní.}$$

*Je-li zmíněná limita nevlastní nebo neexistuje, pak nazýváme integrál **divergentní**.*

- Vypočtěte nevlastní integrály :

***Příklad* 50.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

Řešení : Jde o nevlastní integrál vlivem meze. $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a \frac{dx}{1+x^2} = \lim\limits_{a\to\infty} \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^a =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} \operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2}$. Nevlastní integrál tedy konverguje a rovná se $\frac{\pi}{2}$. ■

***Příklad* 51.** $\int_1^\infty x \ln x \, dx$

Řešení : $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a x \ln x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x, & v' = x \\ u' = \frac{1}{x}, & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \lim\limits_{a\to\infty} \Big[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\Big]_1^a - \frac{1}{2} \lim\limits_{a\to\infty} \int_1^a x \, dx =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} \Big(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4}\Big[x^2\Big]_1^a\Big) = \lim\limits_{a\to\infty} \Big(\frac{a^2}{2} \ln a - \frac{1}{4} \cdot a^2 + \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{4} + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{a^2}{2} \cdot \Big(\ln a - \frac{1}{2}\Big) =$
$= \infty.$ Daný integrál diverguje. ■

***Příklad* 52.** $\int_{-\infty}^0 x\, e^x \, dx$

Řešení : $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_{-a}^0 x\, e^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = e^x \\ u' = 1, & v = e^x \end{array} \right| = \lim\limits_{a\to\infty} \Big(\Big[xe^x - e^x\Big]_{-a}^0\Big) =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} (-1 + a \cdot e^{-a} + e^{-a}) = -1 + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{a+1}{e^a} \, |\tfrac{\infty}{\infty}| \overset{\ell'\mathrm{H}}{=} -1 + \lim\limits_{a\to\infty} \frac{1}{e^a} = -1 + 0 = -1.$ ■

***Příklad* 53.** $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

Řešení : $\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx$$

$I = \lim\limits_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\, dx + \lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\, dx = \lim\limits_{t\to-\infty} \Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_t^a + \lim\limits_{t\to\infty} \Big[\operatorname{arctg}(x+1)\Big]_a^t =$
$= \operatorname{arctg}(a+1) - \lim\limits_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(t+1) + \lim\limits_{t\to+\infty} \operatorname{arctg}(t+1) - \operatorname{arctg}(a+1) = -\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \frac{\pi}{2} =$
$= \pi.$ Integrál je konvergentní. ■

***Příklad* 54.** $\int_0^\infty (x-1) \sin x \, dx$

Řešení : $I = \lim\limits_{a\to\infty} \int_0^a (x-1) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x-1, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{array} \right| =$
$= \lim\limits_{a\to\infty} \Big(-\Big[(x-1)\cos x\Big]_0^a + \Big[\sin x\Big]_0^a\Big) = \lim\limits_{a\to\infty} (-(a-1)\cos a - 1 + \sin a)$.
Protože neexistuje limita, integrál diverguje. ■

***Příklad* 55.** $\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \ln x}$

Řešení : Tento integrál je nevlastní vlivem funkce . Tedy
$I = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \int_{1+\epsilon}^e \frac{dx}{x \ln x} = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \Big[\ln|\ln x|\Big]_{1+\epsilon}^e = \lim\limits_{\epsilon\to 0+} \Big(\ln\ln e - \ln\ln(1+\epsilon)\Big) =$
$= -\lim\limits_{\epsilon\to 0+} \ln\ln(1+\epsilon) = +\infty$. Daný integrál tedy diverguje. ■

***Příklad* 56.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}$

Řešení : Opět máme nevlastní integrál vlivem funkce.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{x^2-1} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2}\ln\frac{\epsilon}{2-\epsilon} - \ln 1 =$$

$=-\infty$. Integrál diverguje. (Použili jsme vzorce $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.) ■

***Příklad* 57.** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

Řešení : Nejdříve spočítáme neurčitý integrál $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x-1}} =$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{x-1}=t & x=1+t^2 \\ x-1=t^2 & dx=2tdt \end{array}\right] = \int\frac{2t\,dt}{t(1+t^2)} = 2\,\mathrm{arctg}\, t = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}+C.$$

Daný integrál je nevlastní jak vlivem funkce tak i vlivem meze. Proto rozdělíme interval např. $\langle 1,+\infty) = \langle 1,2\rangle \cup (2,\infty)$ a potom

$$I = \int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{1+\epsilon}^2 f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_2^t f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+}\Big[2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\Big]_{1+\epsilon}^2 + \lim_{t\to+\infty}\Big[2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\Big]_2^t = 2\,\mathrm{arctg}\,1 - 2\lim_{\epsilon\to 0+}\mathrm{arctg}\sqrt{\epsilon} +$$

$$+2\lim_{t\to+\infty}\mathrm{arctg}\sqrt{t-1} - 2\,\mathrm{arctg}\,1 = \pi\,.$$ ■

58. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$ [1/2]

59. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^3}$ [-1/2]

60. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$ [1]

61. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ [$\pi^2/8$]

62. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ $\left[\frac{1}{k-1}\text{ pro } k>1\text{ ; pro } k\le 1\text{ integrál diverguje}\right]$

63. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{2|x|}{x^2+1}\,dx$ [∞ , tj. integrál diverguje]

I.8. Funkce definované Riemannovým integrálem

• Určete $\dfrac{d\Phi}{dx}$ pro funkci $\Phi(x)$:

***Příklad* 64.** $\displaystyle\Phi(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt$, kde proměnná x probíhá některý interval I, na němž jsou funkce $g_1(x), g_2(x)$ diferencovatelné a funkce $f(t)$ je spojitá pro $t \in \langle g_1(x), g_2(x)\rangle$ a pro všechna $x\in I$.

Řešení : Předpokládejme, že existuje funkce $F(t)$ primitivní k $f(t)$, tj. $F'(t) = f(t)$, pak

$$\frac{d\Phi}{dx} = \frac{d}{dx}\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}\Big[F(t)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = \frac{d}{dx}\Big(F(g_2(x)) - F(g_1(x))\Big) =$$
$$= F'(g_2(x))\cdot g_2'(x) - F'(g_1(x))\cdot g_1'(x) = f(g_2(x))\cdot g_2'(x) - f(g_1(x))\cdot g_1'(x).$$

V případě, že $g_1(x) = a$ je $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\cdot g'(x).$ ■

***Příklad* 65.** $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{ax} \frac{\sin t}{t}\,dt,\ a > 0$

Řešení : Podle předchozího příkladu, kde $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = g(x) = ax$, $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$,
je $\dfrac{d\Phi}{dx} = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{ax}\frac{\sin t}{t}\,dt\Big[= f(g(x))\cdot g'(x)\Big] = \frac{\sin ax}{ax}\cdot a = \frac{\sin ax}{x}.$ ■

66. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \ln t\,dt,\ x > 0$ $\quad[(9x^2 - 4x)\ln x]$

67. $\Phi(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$ $\quad\left[-\sqrt{1+x^4}\right]$

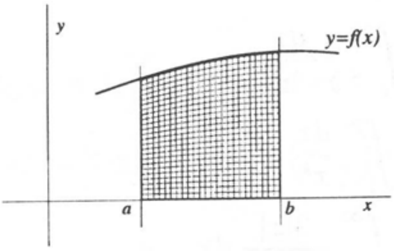
68. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin t^2\,dt,\ x > 0$ $\quad\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}\right]$

69. $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\ln x}^{x} e^{t^2}\,dt,\ x > 0$ $\quad\left[e^{x^2} - \frac{1}{x}e^{\ln^2 x}\right]$

I.9. Plošný obsah rovinných obrazců

Je-li obrazec ohraničen přímkami $y = 0$, $x = a$, $x = b$ a křivkou $y = f(x)$, kde $f(x) \ge 0$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, pak pro plošný obsah P tohoto obrazce platí :

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$



• Stanovte plošné obsahy obrazců ohraničených křivkami :

***Příklad* 70.** $y = x^2 - 4x + 3, \quad x = 0, \quad y = 0$

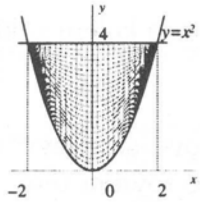
Řešení : Rovnici dané křivky zapíšeme ve tvaru $y = (x-1)(x-3)$.

Z obrázku je vidět, že obsah je

$$P = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}.$$
■

***Příklad* 71.** $y = x^2, \quad y = 4$

Řešení :

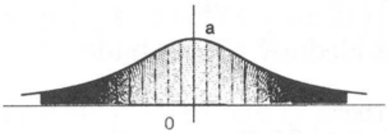


$$P=\int_{-2}^{2}4\,dx-\int_{-2}^{2}x^2\,dx=2\int_0^2 4\,dx-$$
$$-2\int_0^2 x^2\,dx=8\Big[x\Big]_0^2-2\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^2=\frac{32}{3}.$$

■

***Příklad* 72.** $y=\dfrac{a^3}{x^2+a^2},\quad y=0,\quad a>0$

Řešení :

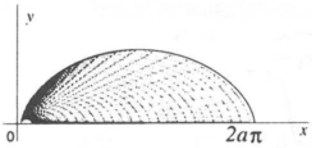


$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx=2a^3\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}=$$
$$=2a^3\lim_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+a^2}=2a^3\lim_{b\to\infty}\frac{1}{a}\Big[\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big]_0^b=$$
$$=2a^2\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=2a^2\cdot\frac{\pi}{2}=a^2\pi.$$

■

***Příklad* 73.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, $\quad y=0$. Řečeno slovy : stanovte plošný obsah obrazce ohraničeného osou x a jedním obloukem **cykloidy**.

Řešení : Jelikož křivka je zadána parametricky, použijeme následující zápis :



$$P=\int_a^b y\,dx=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt,\ \text{kde}\ \ x(t_1)=a, x(t_2)=b.$$

Potom $P=\displaystyle\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt=$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=a^2\int_0^{2\pi}\Big(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\Big)\,dt=$$
$$=a^2\Big[t-2\sin t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}\Big]_0^{2\pi}=a^2\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\pi=3\,a^2\pi.$$

■

74. $x=a\cos t,\ y=b\sin t,\qquad t\in\langle 0,2\pi\rangle$ $\quad[\pi ab]$

75. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\qquad t\in\langle 0,2\pi\rangle$ $\quad[\frac{3}{4}a^2]$

76. $x=y^2,\ xy=1,\ x=4y$ $\quad[1/6+\ln 2]$

77. $xy=2,\ y=2x^2,\ y=8,\ (x\geq 0)$ $\quad[28/3-\ln 16]$

POZNÁMKA : Plošným obsahům rovinných obrazců se budeme podrobněji věnovat v kapitole pojednávající o dvojném integrálu.

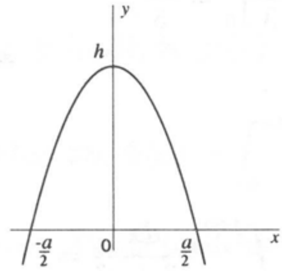
I.10. Objem a povrch rotačních těles

Mějme těleso vzniklé rotací kolem osy x obrazce ohraničeného osou x, přímkami $x=a$, $x=b$ a křivkou $y=f(x)$, kde $f(x)\geq 0$, $x\in\langle a,b\rangle$. Potom pro objem V a plošný obsah povrchu S tohoto tělesa platí

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx,\qquad S=2\pi\int_a^b f(x)\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

***Příklad* 78.** Souměrná parabolická úseč se základnou a a výškou h rotuje kolem základny tj. tětivy paraboly. Stanovte objem vzniklého tělesa.

Řešení :



Parabolickou úseč umístíme do souřadnicové soustavy tak, aby osou rotace byla osa x . Nyní sestavíme rovnici této paraboly : vrchol paraboly je v bodě $[0,h]$, tj. $y-h=2px^2$ a parabola prochází bodem $\left[\frac{a}{2},0\right]$. Z této podmínky vypočteme parametr

$$0-h=2p\cdot\frac{a^2}{4}\longrightarrow p=\frac{-2h}{a^2}.$$

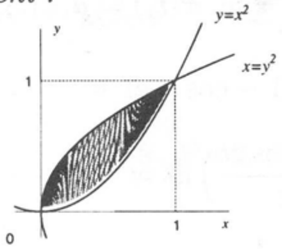
Tím jsme obdrželi rovnici paraboly $y=h-4\,\frac{h}{a^2}\,x^2$ a hledaný objem bude

$$V=\pi\int_{-a/2}^{a/2}(h-\frac{4h}{a^2}x^2)^2\,dx=2\pi\int_0^{a/2}h^2(1-\frac{8x^2}{a^2}+\frac{16x^4}{a^4})\,dx=$$

$$=2\pi h^2\Big[x-\frac{8}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{a^4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big]_0^{a/2}=\frac{8}{15}\pi h^2 a\ .$$ ■

***Příklad* 79.** Obrazec ohraničený parabolami $y=x^2$, $y^2=x$ se otáčí kolem osy x. Jaký je objem takto vzniklého tělesa?

Řešení :



$$V=V_1-V_2=\pi\int_0^1 x\,dx-\pi\int_0^1 x^4\,dx=$$

$$=\pi\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\Big]_0^1=\frac{3\pi}{10}.$$ ■

***Příklad* 80.** Obrazec ohraničený jedním obloukem cykloidy dané parametrickými rovnicemi $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ a osou x rotuje kolem osy x. Určete objem a plošný obsah povrchu tohoto rotačního tělesa.

Řešení :

$$V=\pi\int_0^{2\pi}y^2\dot{x}\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt=$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+\frac{3(1+\cos 2t)}{2}-(1-\sin^2 t)\cos t)\,dt=\pi\,a^3\,\frac{5}{2}\,2\pi=5\pi^2a^3.$$

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}y\cdot\sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt=\left|\begin{array}{c}\dot{x}=a(1-\cos t),\quad \dot{y}=a\sin t\\ (\dot{x})^2+(\dot{y})^2=a^2(2-2\cos t)\end{array}\right|=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{2}\,a\sqrt{1-\cos t}\,dt=2\sqrt{2}\,a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\,a^2\pi\int_0^{2\pi}2\sqrt{2}\,\sin^3\frac{t}{2}\,dt=8a^2\pi\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\cdot\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8\,a^2\pi\Big[-2\cos\frac{t}{2}+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi}=\frac{64}{3}\,a^2\pi.$$ ■

***Příklad* 81.** Obrazec ohraničený jedním obloukem cykloidy a osou x rotuje kolem osy y. Jaký je objem takto vzniklého rotačního tělesa?

Řešení : Objem se v tomto případě spočítá pomocí vzorce $V_y = 2\pi \int_a^b xy\,dx =$

$$= \left[\begin{array}{l|c} x = a(t - \sin t) & dx = a(1-\cos t)dt \\ y = a(1-\cos t) & 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right] = 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot a^2(1-\cos t)^2\,dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} \Big(t(1-\cos t)^2 - (1-\cos t)^2 \sin t\Big)\,dt = 2\pi a^3 (I_1 + I_2), \text{ kde}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} t\,(1-\cos t)^2\,dt = \left| \begin{array}{ll} u = t, & v' = (1-\cos t)^2 \\ u' = 1, & v = \frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \left[t\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4}\right)dt = \frac{3}{2}\cdot 4\pi^2 - \frac{3}{4}\cdot 4\pi^2 = 3\pi^2,$$

$$I_2 = -\int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 \sin t\,dt = -\left[\frac{1}{3}\cdot(1-\cos t)^3\right]_0^{2\pi} = 0$$

Po dosazení je $\quad V_y = 2\pi a^3 \cdot (3\pi^2 + 0) = 6\pi^3 a^3.$ ■

***Příklad* 82.** Oblouk OP křivky $y = \sqrt{x^3}$, kde $O = [0,0]$ a P je jistý bod křivky, rotuje kolem osy x a potom kolem osy y . Jak je třeba volit bod P, aby objemy obou takto vzniklých rotačních těles byly stejné?

Řešení : Označme souřadnice bodu $P = \left[b, \sqrt{b^3}\,\right]$. Potom

$$V_x = \pi \int_0^b y^2\,dx = V_y = 2\pi \int_0^b xy\,dx,$$

$$y = x^{3/2}, \qquad V_x = \pi \int_0^b x^3\,dx = \pi \frac{b^4}{4}, \qquad V_y = 2\pi \int_0^b x \cdot x^{3/2}\,dx = 2\pi \cdot \frac{2}{7}\cdot b^{7/2}.$$

Z rovnice $\quad \dfrac{\pi b^4}{4} = \dfrac{4\pi b^{7/2}}{7} \quad$ obdržíme $\quad b = \left(\dfrac{16}{7}\right)^2.$ ■

• Stanovte objem a plošný obsah povrchu tělesa vzniklého rotací křivky kolem osy x :

83. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t, \quad t \in \langle 0, \pi)$ $\qquad \left[V = \frac{32}{105}\pi a^3,\ S = \frac{12}{5}\pi a^2\right]$

84. $y^2 = x, \quad 1 \le x \le 4$ $\qquad \left[V = \frac{15}{2}\pi,\ S = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right]$

• Stanovte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy y obrazce ohraničeného danou křivkou a osou x.

85. $y = \sin x, \quad x \in \langle 0, \pi\rangle$ $\qquad [2\pi^2]$

86. $y = x^3 - x, \quad x \in \langle 1, 2\rangle$ $\qquad \left[\frac{116\pi}{15}\right]$

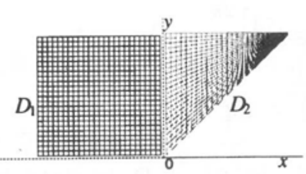
II. Diferencální počet funkcí více proměnných

II.1. Definiční obor funkce dvou proměnných

• Určete definiční obor funkcí a zakreslete jej :

***Příklad* 87.** $z = \dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$

Řešení : Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

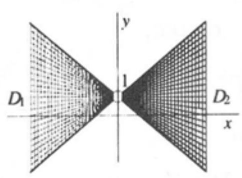


$$x^2y > 0 \longrightarrow y > 0, \quad x \neq 0$$
$$y - x > 0 \longrightarrow y > x$$
$$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y > 0\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y > x\}.$$

Pro definiční obor dané funkce dostaneme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ■

***Příklad* 88.** $z = \arcsin \dfrac{y-1}{x}$

Řešení :



Proměnné x a y musí splňovat současně tyto podmínky :

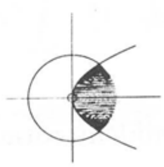
$$-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1 \quad \text{a} \quad x \neq 0\,.$$

Takže platí : $x > 0: \quad -x \leq y-1 \leq x \quad \longrightarrow \quad -x+1 \leq y \leq x+1$
$x < 0: \quad -x \geq y-1 \geq x \quad \longrightarrow \quad -x+1 \geq y \geq x+1$

$$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, \quad x+1 \leq y \leq 1-x\},$$
$$\mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, \quad 1-x \leq y \geq x+1\}.$$

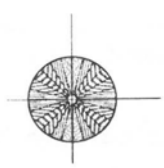
Pro definiční obor dané funkce dostaneme $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. ■

89. $z = \dfrac{\sqrt{x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$



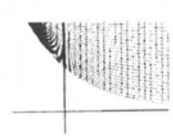
$[0 \neq x^2 + y^2 < 1;\ x \geq y^2\,]$

90. $z = \sqrt{\ln \dfrac{16}{x^2+y^2}}$



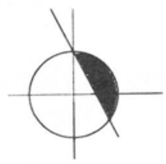
$[x^2 + y^2 \leq 16,\ [x,y] \neq [0,0]]$

91. $z = 3 - 7\ln(x + \ln y)$



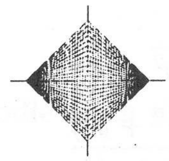
$[y > e^{-x}]$

92. $z = \sqrt{2x+y-4} + \sqrt{16-x^2-y^2}$



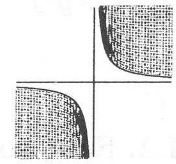
$[x^2 + y^2 \leq 16;\ y \geq 4 - 2x]$

93. $z = \dfrac{3}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$



$[|x|+|y|<1]$

94. $z = \sqrt{xy-4}$



$[xy \geq 4]$

II.2. Limita funkce

• Vyšetřete limity funkce v bodě :

***Příklad* 95.** $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Řešení : Využijeme skutečnost, že $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} (x^2+y^2) = 0$ a provedeme substituci

$t = x^2+y^2$. Potom $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ ■

***Příklad* 96.** $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}$

Řešení : Připomeneme si známou větu :

Existuje-li dvojná limita , pak existují limity dvojnásobné a jsou si rovny.

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = A \implies \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) = A$$

Odtud plyne

$$\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) \implies \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) \text{ neexistuje.}$$

Tedy konkrétně :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1 \\ \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}) &= \lim_{y\to 0}\frac{-2y^2}{y^2} = -2 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{ vyšetřovaná limita neexistuje .}$$

■

***Příklad* 97.** $\displaystyle\lim_{\substack{[x,y]\to[1,1]\\ [x,y]\in M}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$, $[x,y]\in M$, kde $M = \{[x,y]\in E_2\ ;\ x-y\neq 0\}$

Řešení : Jde o neučitý výraz "$\frac{0}{0}$", ale nabízí se elementární úprava, kterou provedeme

$$= \lim_{\substack{[x,y]\to[1,1]\\ [x,y]\in M}} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{\substack{[x,y]\to[1,1]\\ [x,y]\in M}} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} =$$

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[1,1]\\ [x,y]\in M}} \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{3}{4}.$$ ■

98. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ [neexistuje]

99. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{e^{2(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$ [2]

100. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^4)}{3(x^2+y^4)}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

101. $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{xy}{|xy|}$ [neexistuje]

II.3. Spojitost funkce

***Příklad* 102.** Vyšetřete spojitost funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 2, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$

v bodě $[0,0]$.

Řešení : Funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě $[x_0,y_0]$, právě když $\lim\limits_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = f(x_0,y_0)$.

V našem případě $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2+1}-1} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left[\begin{smallmatrix}\text{substituce}\\ x^2y^2=t\end{smallmatrix}\right] = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t}{\sqrt{t+1}-1} \overset{\ell'\mathrm{H}}{=}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}} = 2 = f(0,0) \longrightarrow$ daná funkce $f(x,y)$ je spojitá v bodě $[0,0]$. ■

103. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & [x,y] \neq [0,0] \\ 0, & [x,y] = [0,0] \end{cases}$ není spojitá.

v bodě $[0,0]$. [*Návod :* Použijte dvojnásobné limity.]

- Určete množiny, na nichž jsou dané funkce definované a spojité :

104. $f(x,y) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2+y^4+1}$ $[E_2]$

105. $f(x,y,z) = e^{z^2+x}\cdot \sin(x+y)$ $[E_3]$

106. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-2y}$ $[E_2 - \{y = \frac{x^2}{2}\}]$

107. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ [E_2,lze dodefinovat $f(0,0) = \lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$]

108. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\ln\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$ $[E_3 - [0,0,0] \cup \{x^2+y^2+z^2=1\}]$

109. $f(x,y,z) = \dfrac{\sin(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2}$ [E_3, lze dodefinovat $f(0,0,0) = 0$]

110. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{|xy|+|z|}$ $[E_3 - \{z=0\} \cap \{xy=0\}]$

111. $f(x,y,z) = \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$ $[E_3 - \{x=0\} \cup \{x=1\}]$

II.4. Parciální derivace

• Najděte parciální derivace prvního řádu daných funkcí podle jejich proměnných.
Použijeme označení : $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

***Příklad* 112**. $f(x,y) = (2x-3y)^4$

Řešení : $f'_x = 4(2x-3y)^3 \cdot 2$, $f'_y = 4(2x-3y)^3 \cdot (-3)$ ■

***Příklad* 113**. $f(x,y) = 5x^4y^2 + \dfrac{x}{y} + 2x^2 - 3y$

Řešení : $f'_x = 20x^3y^2 + \dfrac{1}{y} + 4x$, $f'_y = 10x^4y - \dfrac{x}{y^2} - 3$ ■

***Příklad* 114**. $f(x,y) = y^{x^2+3}$, $y > 0$

Řešení : $f'_x = y^{x^2+3} \cdot \ln y \cdot 2x$, $f'_y = (x^2+3) \cdot y^{x^2+2}$ ■

***Příklad* 115**. $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$, pro $|x| > |y|$

Řešení : $f'_x = y \cdot \dfrac{-2x}{2(x^2-y^2)^{3/2}} = \dfrac{-xy}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}$

$$f'_y = \frac{\sqrt{x^2-y^2} - y \cdot \dfrac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2+y^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}.$$

■

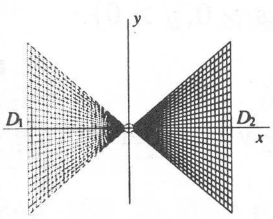
***Příklad* 116**. $f(x,y,z) = (x^y)^z$

Řešení : $f(x,y,z) = x^{yz}$, $f'_x = yzx^{yz-1}$, $f'_y = x^{yz} \cdot \ln x \cdot z$, $f'_z = x^{yz} \cdot \ln x \cdot y$.

■

***Příklad* 117**. Určete obor diferencovatelnosti funkce $f(x,y) = x\sqrt{x^2-y^2}$.

Řešení : $f'_x = \sqrt{x^2-y^2} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $f'_y = \dfrac{-xy}{\sqrt{x^2-y^2}}$.



Z teorie víme, že spojitost parciálních derivací je postačující podmínkou pro diferencovatelnost funkcí. Tedy hledaný obor musí splňovat podmínku

$$x^2 - y^2 > 0 \longrightarrow |y| < |x|.$$

$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y \in (x, -x)\}$,

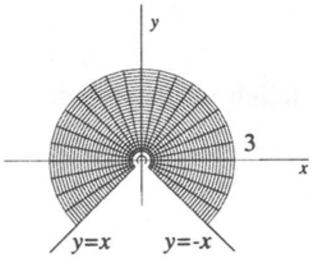
$\mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y \in (-x, x)\}$.

■

***Příklad* 118**. Je dána funkce $f(x,y) = \ln(|x| + y) + \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$. Určete

a) definiční obor (včetně grafického znázornění), b) hodnotu $f(A)$, kde $A = [-1,2]$, c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A)$.

Řešení :



a) $$|x| + y > 0 \longrightarrow y > -|x|$$
$$9 - x^2 - y^2 > 0 \longrightarrow x^2 + y^2 < 9$$

b) $$f(-1,2) = \ln(|-1| + 2) + \frac{1}{\sqrt{9-1-4}} = \ln 3 + \frac{1}{2}$$

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \left(\frac{(-x)'}{|x| + y} + \frac{2x}{2\sqrt{(9 - x^2 - y^2)^3}}\right)\Big|_A = -\frac{11}{24}.$$

■

119. Dokažte, že funkce $z = f(x,y) = y^2 \sin(x^2 - y^2)$ vyhovuje diferenciální rovnici $y^2 z'_x + xyz'_y = 2xz$ pro všechna $[x,y] \in E_2$.

[*Návod :* Stačí spočítat z'_x, z'_y a do rovnice dosadit]

• Vypočtěte parciální derivace dané funkce v bodě A :

120. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, $A = [2,0]$ [$z'_x(A) = 1$, $z'_y(A) = 0$]

121. $z = \dfrac{y}{x}$, $A = [3,2]$ [$z'_x(A) = -2/9$, $z'_y(A) = 1/3$]

122. $f = x^2 e^y \sin z$, $A = [1, 0, \pi/6]$ [$f'_x(A) = 1$, $f'_y(A) = 1/2$, $f'_z(A) = \sqrt{3}/2$]

123. $f = \ln(x^2 - y + 3z)$, $A = [2,1,1]$ [$f'_x(A) = 2/3$, $f'_y(A) = -1/6$, $f'_z(A) = 1/2$]

II.5. Totální diferenciál a tečná rovina

***Příklad* 124**. Je dána funkce $f(x,y) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$. Napište totální diferenciál df a určete obor diferencovatelnosti funkce f.

Řešení : Totální diferenciál $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy$ tj. $df = \left(-\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy$ je funkce, pro kterou musí být splněny podmínky $x \neq 0, y \neq 0$. Dostaneme tyto množiny :

$$\mathcal{D}_1 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y < 0\}, \quad \mathcal{D}_2 = \{[x,y] \in E_2 : x < 0, y > 0\},$$
$$\mathcal{D}_3 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y < 0\}, \quad \mathcal{D}_4 = \{[x,y] \in E_2 : x > 0, y > 0\}.$$

■

***Příklad* 125**. Určete totální diferenciál a přírůstek funkce $z = \dfrac{y}{x}$ v bodě $A = [2,1]$ pro $\triangle x = 0.1$ a $\triangle y = 0.2$. Porovnejte je.

Řešení : Totální diferenciál v bodě A je $dz(A) = \dfrac{\partial z}{\partial x}(A)\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\,dy$.

Přitom $dz = -\dfrac{y}{x^2}\,dx + \dfrac{1}{x}\,dy, dz(A) = -\dfrac{1}{4}\,dx + \dfrac{1}{2}\,dy$. Zvolíme-li $dx = \triangle x = 0.1$ a $dy = \triangle y = 0.2$, pak obdržíme hledaný diferenciál $dz = -\dfrac{1}{4}\cdot 0.1 + \dfrac{1}{2}\cdot 0.2 = 0.075$, přičemž přírůstek $\triangle z = z(x_0 + \triangle y, y_0 + \triangle y) - z(x_0, y_0) = z(2.1, 1.2) - z(2,1) = 0.071$. Čím větší jsou přírůstky $\triangle x$ a $\triangle y$, tím více se liší dz a $\triangle z$. ■

***Příklad* 126.** Pomocí totálního diferenciálu vypočítejte přibližný přírůstek funkce $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$ při změně x od $x_1 = 1$ do $x_2 = 1.2$ a y od $y_1 = -3$ do $y_2 = -3.1$.

Řešení : Přírůstek přibližně nahradíme diferenciálem tj.

$$\triangle z \doteq dz = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy, \text{ kde } A[1,-3],\ dx = 0.2,\ dy = -0.1.$$

Spočítáme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot (-\frac{y}{x^2}) \right) \Big|_A = \frac{3}{10}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} \right) \Big|_A = \frac{1}{10}.$$

Potom $dz = \dfrac{3}{10} \cdot 0.2 + \dfrac{1}{10} \cdot (-0.1) = 0.06 - 0.01 = 0.05.$ ■

***Příklad* 127.** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1)$ pomocí totálního diferenciálu.

Řešení : Položme $z(x,y) = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1)$, $x_0 = 9$, $y_0 = 1$, pak $dx = 0.03$, $dy = -0.01$. Použijeme vztah

$$\triangle z = z(x + x_0, y + y_0) - z(x_0, y_0) \doteq \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy,$$

ze kterého dostaneme

$$z(x + x_0, y + y_0) \doteq z(x_0, y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy.$$

Připravme si :

$$z(x_0, y_0) = \ln(\sqrt{9} - \sqrt{1} - 1) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \Big|_{(9,1)} = \frac{1}{6},$$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} - 1} \cdot \dfrac{-1}{2\sqrt{y}} \right) \Big|_{(9,1)} = -\dfrac{1}{2}$. Nyní dosadíme a vypočteme hledanou hodnotu $\ln(\sqrt{9.03} - \sqrt{0.99} - 1) \doteq \dfrac{1}{6} \cdot 0.03 - \dfrac{1}{2} \cdot (-0.01) = \cancel{0.025}$. 0,01 ■

***Příklad* 128.** Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $0,98^{3,04}$ pomocí totálního diferenciálu.

Řešení : $z(x,y) = x^y$, $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, tj. $A = [1,3]$, $dx = -0.02$, $dy = 0.04$, takže

$$z(0.98, 3.04) \doteq z(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot dy =$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot x^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x \right] = 1 + 3 \cdot (-0.02) + 0 = 0.94.$$ ■

***Příklad* 129.** Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = 2x^2 - 4y^2$ v bodě $A = [2, 1, ?]$.

Řešení : Tečná rovina τ má rovnici

$$\tau : \quad z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(A) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(A) \cdot (y - y_0),$$

kde $A = [x_0, y_0, z_0]$, a $z_0 = z(x_0, y_0)$. V daném případě $z_0 = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 4 \longrightarrow$

$$A = [2,1,4], \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A) = (4x)\Big|_A = 8, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(A) = (-8y)\Big|_A = -8 \quad \longrightarrow$$

$$\tau : \quad z - 4 = 8(x-2) - 8(y-1) \longrightarrow 8x - 8y - z - 4 = 0.$$

Normála n je přímka procházející bodem A, jejímž směrovým vektorem je normálový vektor roviny τ. Tedy $n : [x,y,z] = [2,1,4] + t(8,-8,-1)$. ■

***Příklad* 130.** Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = x^2 + xy - y^2 + x + 3$ rovnoběžné s danou rovinou $\varrho : 5x - 3y - z = 0$.

Řešení : Musíme najít bod A, v němž $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -3$. Z toho dostaneme soustavu rovnic $\begin{cases} 2x + y + 1 = 5, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$ Odtud $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = z(x_0, y_0) = 3$, takže $A = [1,2,3]$. Rovnice tečné roviny $\tau : \quad 5x - 3y - z + d = 0, \quad A \in \tau$ $\longrightarrow \quad \tau : 5x - 3y - z + 4 = 0.$ ■

• Vypočítejte přibližné hodnoty daných výrazů pomocí totálního diferenciálu :

131. $\sqrt[3]{7.95} \cdot \sqrt{8.96}$ [5.9742] **132.** $\dfrac{\sqrt[4]{0.97}}{1.02^3 \cdot \sqrt[3]{0.99}}$ [0.936]

133. $\sqrt{4.04} \cdot \ln 1.02 \cdot \operatorname{arctg} 0.9$ [0.0314]

• Najděte rovnici tečné roviny τ a normály n plochy $z = f(x,y)$ v bodě A :

134. $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, \quad A = [3,4,?]$ $[12x + 16y - 5z = 0;\ [x,y,z] = [3,4,20] + t(12,16,-5)]$

135. $z = xy, \quad A = [0,0,?]$ $[z = 0;\ [x,y,z] = t(0,0,1)]$

136. $z = x^2 \cdot \cos\dfrac{1}{y}, \quad A = [1, \dfrac{2}{\pi}, ?]$ $\left[z = \frac{\pi^2}{4}\left(y - \frac{2}{\pi}\right);\ [x,y,z] = \left[1, \frac{2}{\pi}, 0\right] + t\left(0, \frac{\pi^2}{4}, -1\right)\right]$

137. $z = \dfrac{1}{x} \arcsin y, \quad A = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, ?\right]$ $\left[\begin{array}{r} \pi x - 2\sqrt{2}\,y + z - \pi + 2 = 0; \\ [x,y,z] = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{2}\right] + t(\pi, -2\sqrt{2}, 1) \end{array}\right]$

• Najděte rovnici tečné roviny τ plochy $z = z(x,y)$ rovnoběžné s rovinou ϱ :

138. $z = 2x^2 - y^2, \quad \varrho : 8x - 6y - z - 15 = 0$ $[\tau : 8x - 6y - z + 1 = 0]$

139. $z = \ln(x^2 + 2y^2), \quad \varrho : 2x - z + 5 = 0$ $[\tau : 2x - z - 2 = 0]$

140. $z = x^2 - y^2 + 6xy + 2x, \quad \varrho : 4x + 6y - z = 0$ $[\tau : 4x + 6y - z - 1 = 0]$

II.6. Derivace a diferenciály vyšších řádů

***Příklad* 141.** Najděte všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = xy^3 - y \cdot e^{x+y^2}$.

Řešení : $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x} = y^3 - y\cdot e^{x+y^2}, \quad f'_y = 3xy^2 - e^{x+y^2} - y\cdot e^{x+y^2}\cdot 2y = 3xy^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x} = -y\cdot e^{x+y^2},$$

$$f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y} = 6xy - 2ye^{x+y^2}(1+2y^2) - e^{x+y^2}4y = 6xy - e^{x+y^2}(6y+4y^3),$$

$$f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y} = 3y^2 - e^{x+y^2} - ye^{x+y^2}\cdot 2y = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2),$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x} = 3y^2 - e^{x+y^2}(1+2y^2).$$

Vidíme, že pro uvažovanou funkci f platí $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ ve všech bodech $[x,y] \in E_2$. ■

***Příklad* 142.** Ukažte, že funkce $u = \operatorname{arctg}(2x-t)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial t} = 0 \ \text{ v } \ E_2.$$

Řešení : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{2}{1+(2x-t)^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{-2\cdot 2(2x-t)\cdot 2}{[1+(2x-t)^2]^2} = \dfrac{-8(2x-t)}{[1+(2x-t)^2]^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{-2\cdot 2(2x-t)\cdot(-1)}{[1+(2x-t)^2]^2} = \frac{4(2x-t)}{[1+(2x-t)^2]^2}.$$

Po dosazení je zřejmé, že rovnice platí ve všech bodech $[x,t] \in E_2$. ■

***Příklad* 143.** Dokažte, že $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)$, jestliže

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & \text{pro } [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & \text{pro } [x,y] = [0,0]. \end{cases}$$

Řešení : Snadno se přesvědčíme, že funkce f je v bodě $[0,0]$ spojitá : $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Derivace $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ vypočítáme pomocí příslušných definic :

$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy\frac{h^2-2y^2}{h^2+y^2} - 0}{h} = -2y,$$

$$f'_y(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{xk\frac{x^2-2k^2}{x^2+k^2} - 0}{k} = x,$$

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f'_x(0,k)-f'_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-2k}{k} = -2,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'_y(h,0)-f'_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1,$$

$$f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0).$$ ■

• Najděte diferenciály uvedeného řádu :

***Příklad* 144.** $z = \sin(2x+y), \quad d^2 z = ?$

Řešení : Diferenciál n-tého řádu $d^n f = \left(dx \cdot \frac{\partial}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f$, potom

$$d^2 z = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 =$$
$$= -4\sin(2x+y)\,(dx)^2 - 4\sin(2x+y)\,dx\,dy - \sin(2x+y)\,(dy)^2 =$$
$$= -\sin(2x+y)\,(2dx+dy)^2.$$ ■

***Příklad* 145.** $z = x^3 - y^3 - xy + y^2$, $d^3 z = ?$

Řešení :
$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\, dx\, (dy)^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}(dy)^3$$
$$z'_x = 3x^2 - y, \qquad z'_y = -3y^2 - x + 2y,$$
$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{yy} = -6y + 2, \quad z''_{xy} = -1,$$
$$z'''_{xxx} = 6, \quad z'''_{yyy} = -6, \quad z'''_{xxy} = z'''_{xyy} = 0,$$
$$d^3 z = 6(dx)^3 - 6(dy)^3.$$ ■

***Příklad* 146.** $u = e^{2x-3y}$, $d^2u(A) = ?$, $d^3u(A) = ?$, $d^n u(A) = ?$, $A = [0,0]$

Řešení :
$$d^2 u(A) = \left(e^{2x-3y}(2dx - 3dy)^2\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^2,$$
$$d^3 u(A) = \left(e^{2x-3y}(2dx - 3dy)^3\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^3,$$
$$d^n u(A) = \left(e^{2x-3y}(2dx - 3dy)^n\right)\Big|_A = (2dx-3dy)^n.$$ ■

Diferenciály lze použít v důležité **Taylorově větě** : *Nechť $f(x,y)$ je funkce $(n+1)$-krát diferencovatelná v každém vnitřním bodě obdélníka M se středem v bodě $A = (x_0, y_0)$. Potom ke každému bodu $(x,y) \in M$ existuje bod $(\xi, \eta) \in M$ takový, že*

$$f(x,y) = f(A) + df(A) + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(A)}{n!} + R_{n+1},$$

kde $df(A) = df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)\cdot(y-y_0)$,

$$d^2 f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\cdot(x-x_0)^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(A)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)\cdot(y-y_0)^2,$$
$$\vdots$$
$$d^n f(A) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k\, \partial y^{n-k}}(A)\cdot(x-x_0)^k\cdot(y-y_0)^{n-k},$$
$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\, d^{n+1} f(\xi, \eta).$$

Příklad* 147. Napište Taylorův rozvoj funkce $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2 + 4x - 5y$ v okolí bodu $A = [2,-1]$ a výsledek využijte k výpočtu hodnoty funkce f v bodě $(2.1, -1.1)$.

Řešení :
$$f(A) = 16, \quad dx = x - x_0 = x - 2, \quad dy = y - y_0 = y + 1,$$

$$\left.\begin{aligned} f'_x(A) &= (3x^2 - 3y^2 + 4)\Big|_A = 13 \\ f'_y(A) &= (-6xy + 2y - 5)\Big|_A = 5 \end{aligned}\right\} \longrightarrow dz(A) = 13\,dx + 5\,dy = 13(x-2) + 5(y+1),$$

$$\left.\begin{cases} f''_{xx}(A) = (6x)\Big|_A = 12 \\ f''_{yy}(A) = (-6x+2)\Big|_A = -10 \\ f''_{xy}(A) = (-6y)\Big|_A = 6 \end{cases}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} d^2z(A) &= 12\,(dx)^2 + 12\,dx\,dy - 10\,(dy)^2 = \\ &= 12(x-2)^2 + 12(x-2)(y+1) - 10(y+1)^2\,, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &f'''_{xxx}(A) = 6 \\ &f'''_{yyx}(A) = -6 \\ &f'''_{yxx}(A) = f'''_{yyy}(A) = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow d^3z(A) = 6\,(dx)^3 - 18\,dx\,(dy)^2 = 6(x-2)^3 - 18(x-2)(y+1)^2,$$

$$f(x,y) = 16+13(x-2)+5(y+1)+6(x-2)^2+6(x-2)(y+1)-5(y+1)^2+(x-2)^3-3(x-2)(y+1)^2,$$

$R_4 = 0,$

$$\begin{aligned} f(2.1;-1.1) &= 16 + 13\cdot 0.1 + 5\,(-0.1) + 6\cdot 0.1^2 - 6\cdot 0.1^2 - 5\cdot 0.1^2 + 0.1^3 - 3\cdot 0.1^3 = \\ &= 17.3 - 0.552 = 16.748. \end{aligned}$$ ■

Příklad* 148. Napište Taylorův rozvoj čtvrtého stupně funkce $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ v okolí bodu $[0,0]$.

Řešení : Použijeme Taylorův vzorec pro $\cos z \doteq 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{4!}$, do kterého dosadíme

$$z = x^2 + y^2 : \qquad \cos(x^2+y^2) \doteq 1 - \frac{(x^2+y^2)^2}{2!} + \frac{(x^2+y^2)^4}{4!};$$

$$T_4(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4).$$ ■

• Najděte parciální derivace druhého řádu dané funkce :

149. $\phi(s,t) = \ln(s^3 + t)$ $\left[\phi''_{ss} = \dfrac{3s(2t-s^3)}{(s^3+t)^2},\ \phi''_{tt} = \dfrac{-1}{(s^3+t)^2},\ \phi''_{st} = \phi''_{ts} = \dfrac{-3s^2}{(s^3+t)^2}\right]$

150. $\phi(x,t) = \dfrac{\cos x^2}{t}$ $\left[\phi''_{xx} = \dfrac{-1}{t}(4x^2\cos x^2 + 2\sin x^2),\ \phi''_{tt} = \dfrac{2}{t^3}\cos x^2,\ \phi''_{xt} = \dfrac{2x}{t^2}\sin x^2\right]$

151. $f(x,y) = e^{ax+by}$ $\left[f''_{xx} = a^2e^{ax+by},\ f''_{yy} = b^2e^{ax+by},\ f''_{xy} = ab\,e^{ax+by}\right]$

• Rozložte funkci $f(x,y)$ podle Taylorovy věty v okolí bodu A pro $n = 4$:

152.* $f(x,y) = x^3 + 5x^2 - 6xy + 2y^2,\ A = [1,-2]$

$\left[\begin{aligned} f(x,y) = 26 + 25(x-1) - 14(y+2) + 8(x-1)^2 \\ +2(y+2)^2 - 6(x-1)(y+2) + (x-1)^3 \end{aligned}\right]$

153.* $f(x,y) = x^2 + 3xy - y^3 + 1,\ A = [2,-1]$ $\left[\begin{aligned} f(x,y) = (x-2) + 3(y+1) + (x-2)^2 + \\ +3(y+1)^2 + 3(x-2)(y+1) - (y+1)^3 \end{aligned}\right]$

II.7. Gradient. Derivace ve směru

• Určete odchylku gradientů daných funkcí v bodě A :

***Příklad* 154**. $f(x,y,z) = x^y + yz,\ g(x,y,z) = \sin(xz) + x + y - \dfrac{z}{y} - 1,\ A = [1,1,0]$

Řešení : $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = (yx^{y-1}, x^y \ln x + z, y) \longrightarrow \operatorname{grad} f(A) = (1,0,1)$

$$\operatorname{grad} g = \left(z\cos(xz) + 1, 1 + \frac{z}{y^2}, x\cos(xz) - \frac{1}{y}\right) \longrightarrow \operatorname{grad} g(A) = (1,1,0)$$

Označme $\varphi = \sphericalangle(\operatorname{grad} f(A), \operatorname{grad} g(A))$. Potom

$$\cos\varphi = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{3}\,. \qquad \blacksquare$$

deviation

***Příklad* 155**. $f(x,y) = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$, $g(x,y) = y\sqrt{x}$, $A = [1,1]$

Řešení : $\operatorname{grad} f(A) = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\quad \operatorname{grad} g(A) = \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$,

$$\cos\varphi = \frac{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \cdot (\frac{1}{2}, 1)}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{5}{4}}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}. \quad \longrightarrow \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right). \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 156**. Určete, ve kterých bodech je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ roven nulovému vektoru.

Řešení : $\operatorname{grad} f = (2x - 2yz, 2y - 2xz, 2z - 2xy) = (0,0,0) \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x - yz &= 0 \\ y - xz &= 0 \\ z - xy &= 0 \end{aligned}$

Je zřejmé, že jeden z bodů bude bod $A_1 = [0,0,0]$. Další spočítáme ze soustavy :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= yz \\ y - yz^2 = 0 &\longrightarrow z = \pm 1 \\ z - y^2 z = 0 &\longrightarrow y = \pm 1 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} &A_2 = [1,1,1], &&A_3 = [-1,1,-1], \\ &A_4 = [-1,-1,1], &&A_5 = [1,-1,-1]. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

***Příklad* 157**. Určete, ve kterých bodech má gradient funkce $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)^{3/2}$ velikost 9.

Řešení :

$$|\operatorname{grad} f| = |(3x\sqrt{x^2+y^2}, 3y\sqrt{x^2+y^2})| = \sqrt{9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2)} = 9,$$

$$9x^2(x^2+y^2) + 9y^2(x^2+y^2) = 81,$$

$$(x^2+y^2)^2 = 9 \longrightarrow x^2 + y^2 = 3.$$

Hledané body leží tedy na kružnici o poloměru $\sqrt{3}$. $\blacksquare$

• Vypočtěte derivaci funkce f ve směru $\vec{s}$ v bodě A :

***Příklad* 158**. $f(x,y) = 2x^4 + xy + y^3$, $\quad \vec{s} = (3,-4)$, $\quad A[1,2]$

Řešení :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}, \quad \operatorname{grad} f = (8x^3 + y, x + 3y^2),$$

$$\operatorname{grad} f(A) = (10,13), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (10,13) \cdot \frac{(3,-4)}{\sqrt{9+16}} = \frac{30-52}{5} = -\frac{22}{5}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 159**. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $\quad A = [1,-1,2]$; $\vec{s}$ je jednotkový vektor určený svými směrovými úhly $\pi/3, \pi/3, \gamma$, $\quad \gamma \in \langle 0, \pi/2 \rangle$.

Řešení : $\vec{s} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, kde $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, $|\vec{s}| = 1$. Tedy

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1 \longrightarrow \quad \cos^2\gamma = \frac{1}{2} \longrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{4} \in \langle 0, \pi/2 \rangle.$$

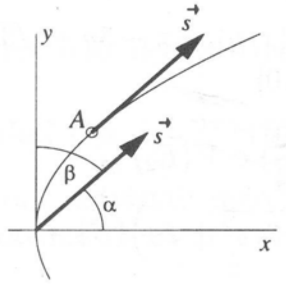
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s} = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy)\Big|_A \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$
$$= (9, -3, 15) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{6 + 15\sqrt{2}}{2}. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 160.** $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z^2, \quad A = [-3, 2, 4]$; směr $\vec{s}$ je směr vektoru $\overrightarrow{AB}$, kde $B = [-2, 4, 2]$.

Řešení : $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -2), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (2x, 4y, -2z)\Big|_A \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = (-6, 8, -8) \cdot \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{1 + 4 + 4}} =$
$$= \frac{1}{3}(-6 + 16 + 16) = \frac{26}{3}. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 161.** Určete derivace funkce $z = x^2 + \ln(x + y^2)$ v bodě $A = [3, 2\sqrt{3}]$ ve směru tečny k parabole $y^2 = 4x$. Uvažujte vektor svírající ostrý úhel s vektorem $\vec{i}$.

Řešení : Souřadnice směrového vektoru tečny získáme z její směrnice



$$y = 2\sqrt{x}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad k_A = y'(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3},$$
$$\vec{s} = (\cos\alpha, \cos\beta) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \; |\vec{s}| = 1.$$

Nyní si připravíme $\operatorname{grad} z(A) = \left(2x + \frac{1}{x + y^2}, \frac{2y}{x + y^2}\right)\Big|_A = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right)$, takže hledaná derivace bude

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(\frac{91}{15}, \frac{4\sqrt{3}}{15}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{95\sqrt{3}}{30}. \quad \blacksquare$$

***Příklad* 162.** Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x, y) = x^3 y + \frac{x}{y^2} + 2y$ v bodě $A = [-1, 1]$ maximální a vypočítejte tuto derivaci.

Řešení : Z obecné teorie víme, že derivace je maximální ve směru gradientu.

$$\operatorname{grad} f(A) = (3x^2 y + \frac{1}{y^2}, x^3 - \frac{2x}{y^3} + 2)\Big|_A = (4, 3) \longrightarrow \vec{s} = (4, 3).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{16 + 9}{5} = 5 \quad \blacksquare$$

***Příklad* 163.** Je dána funkce $z = \sqrt{2x + y}$, bod $A = [1, 2, ?]$, vektor $\vec{s} = (-1, 1)$. Určete

a) ve kterých bodech je funkce z diferencovatelná, b) $\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A)$,

c) tečnou rovinu ke grafu funkce z v bodě A.

Řešení : a) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{2x + y}}, \quad z'_y = \frac{1}{2\sqrt{2x + y}} \quad \longrightarrow \quad 2x + y > 0 \longrightarrow y > -2x,$

b) $A = [1, 2, 2], \quad \frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{2}},$

c) $\tau : z - 2 = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-2)$. ■

***Příklad* 164.** Určete vektor $\vec{s}$, v jehož směru je rychlost změny funkčních hodnot funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ v bodě $A = [1,-1,2]$ maximální a tuto maximální rychlost vypočítejte.

Řešení : Funkce maximálně roste, resp. klesá, ve směru $\vec{s}$, resp. $(-\vec{s})$, kde

$$\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = (6,-6,6) \quad \longrightarrow \quad \vec{s}^0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = (6,-6,6) \cdot \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial(-\vec{s})}(A) = -6\sqrt{3}.$$ ■

***Příklad* 165.** Určete, ve kterých bodech je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ kolmý k ose x.

Řešení : $\vec{i} = (1,0,0)$ je směrovým vektorem osy x, $\operatorname{grad} f = (2x-2yz, 2y-2xz, 2z-2xy)$, $\vec{i} \perp \operatorname{grad} f$ znamená $\vec{i} \cdot \operatorname{grad} f = 0$. Odtud $2x - 2yz = 0$ takže hledané body leží na ploše $x = yz$. ■

***Příklad* 166.** Určete úhel vektorů $\operatorname{grad} f(A)$ a $\operatorname{grad} g(B)$, kde $f(x,y) = x - 3y + \sqrt{3xy}$, $A = [3,4]$, $g(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + xyz$, $B = [3,4,0]$.

Řešení :

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3y}{x}}, -3 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3x}{y}}\right)(A) = \left(2, -\frac{9}{4}\right) \in V(E_2)$$

$$\operatorname{grad} g(B) = \left(\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}} + yz, \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}} + xz, \sqrt{x^2+y^2} + xy\right)(B) = = (0,0,17) \in V(E_3).$$

Vektor $\left(2, -\frac{9}{4}\right) \in V(E_2)$ doplníme na $\left(2, -\frac{9}{4}, 0\right) \in V(E_3)$. Nyní

$$\cos\varphi = \frac{(2,-\frac{9}{4},0)\cdot(0,0,17)}{|(2,-\frac{9}{4},0)|\cdot|(0,0,17)|} = 0 \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$ ■

167. Ve kterých bodech je gradientem funkce $f(x,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ vektor $\left(1, -\frac{16}{9}\right)$?

[v bodech $\left[-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$ a $\left[\frac{7}{3}, -\frac{3}{4}\right]$]

168. Ve kterém bodě je gradient funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + xy + 3y + 8z$
a) kolmý k ose z; b) rovnoběžný s osou z; c) roven nulovému vektoru?

[a) v bodech roviny $z = 2$ tj. $[x,y,2]$
b) v bodech přímky $x = -\cancel{\frac{1}{2}}$, $y = \cancel{1}$ -2, $z = t$
$x = 1$ c) $\left[-\frac{1}{2}, 1, 2\right]$]

169. Nalezněte úhel φ gradientů funkce $f(x,y) = \arcsin\frac{x-1}{y}$, $y \neq 0$, v bodech $A = [1,1]$, $B = [3,4]$.

$\left[\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}\right]$

• Je dána funkce $f(x,y)$, bod A a vektor $\vec{s}$. Určete, ve kterých bodech je funkce f diferencovatelná, spočítejte $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě A :

170. $f(x,y) = |x| + y,\ A = [1,0,?],\ \vec{s} = (-1,1)$ $\left[x \neq 0,\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 0,\ x + y - z = 0\right]$

171. $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2,\ A = [1,0,?],\ \vec{s} = (1,2)$ $\left[E_2,\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{8}{\sqrt{5}},\ 2x + 3y - z - 1 = 0\right]$

172. Určete v jakém směru je derivace funkce $f(x,y) = \ln \dfrac{x+y}{x-y}$, v bodě $A = [3,0]$ maximální a vypočítejte tuto derivaci. $\left[\vec{s} = \operatorname{grad} f(A) = \left(0, \frac{6}{9}\right),\ \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{2}{3}\right]$

173. Určete derivace funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ v bodě $A = [2,3]$ ve směru $\vec{s}$, svírající s vektorem $\vec{i}$ úhel $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$. ($\alpha = \frac{\pi}{3}$ je směrový úhel) $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = 2 - 3\sqrt{3}\right]$

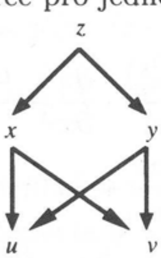
174. Určete derivace funkce $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + y^2 z - 5z$ v bodě $A = [1,-2,-1]$ ve směru $\vec{s}$, jehož směrové úhly jsou $\alpha = \dfrac{\pi}{3}, \beta = \dfrac{3\pi}{4}, \gamma \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. $\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A) = \frac{7+\sqrt{2}}{2}\right]$

II.8. Derivace složené funkce

• Vypočítejte derivace daných složených funkcí :

***Příklad* 175.** $z = e^x \ln y,\quad x = u\cos v,\ y = u \sin v,\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} =?,\quad \dfrac{\partial z}{\partial v} =?$

Řešení : Závislost mezi proměnnými znázorníme orientovaným grafem, ze kterého sestavíme vzorce pro jednotlivé derivace.



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

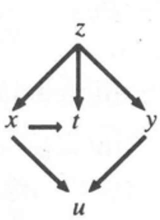
Nyní tyto derivace vypočítáme :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^x \ln y \cdot \cos v + \frac{e^x}{y} \sin v, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = -e^x \ln y \cdot u \sin v + \frac{e^x}{y} u \cos v. \qquad \blacksquare$$

POZNÁMKA : V tomto jednoduchém příkladě bychom mohli dosadit za x a y. Pak derivace funkce $z = e^{u \cos v} \ln(u \sin v)$ by se dala spočítat přímo, avšak naším úkolem je procvičení derivací složených funkcí.

***Příklad* 176.** $z = \ln(x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}),\quad x = u^2 + t,\ y = u^2 - u,\quad \dfrac{\partial z}{\partial u} =?,\ \dfrac{\partial z}{\partial t} =?$

Řešení :



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \overline{\frac{\partial z}{\partial t}}.$$

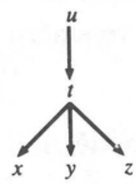
(Derivace s pruhem $\overline{\dfrac{\partial z}{\partial t}}$ je pomocné označení a odpovídá přímé šipce od z k t, kdežto $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ je celková derivace z podle t.)

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}} \cdot 2u + \frac{2y}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}}(2u - 1) = \frac{2}{x^2 + y^2 + \frac{1}{t^2}}(2xu + 2yu - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{2x}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}} \cdot 1 + \frac{1}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\left(-\frac{2}{t^3}\right) = \frac{2}{x^2+y^2+\frac{1}{t^2}}\left(x - \frac{1}{t^3}\right). \quad \blacksquare$$

***Příklad* 177.** $u = f(x^4 + y^4 - 2z^4)$. Spočítejte výraz $V = \dfrac{1}{4x^3}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{4y^3}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{1}{4z^3}\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Řešení : Označme $t = x^4 + y^4 - 2z^4$. Pak $u = f(t)$ a

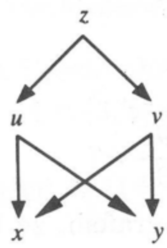


$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = f'(t) \cdot 4x^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = f'(t) \cdot 4y^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = f'(t) \cdot (-8z^3).$$

Po dosazení snadno spočítáme, že $V = 0$. $\blacksquare$

***Příklad* 178.** $z = uv^2, \quad u = x \ln y,\ v = y \ln x, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

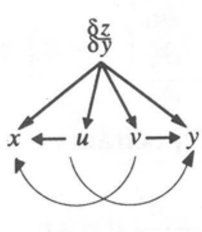
Řešení :



Nejdříve spočítáme $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ a potom $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = v^2 \cdot \frac{x}{y} + 2uv \cdot \ln x.$$

Nyní znázorníme závislost derivace $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ na u, v, x, y :



$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial x} = \frac{\overline{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$\frac{v^2}{y} + \frac{2uv}{x} + 2v \ln x \cdot \ln y + \left(\frac{2vx}{y} + 2u \ln x\right) \cdot \frac{y}{x},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial y} = \frac{\overline{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial(\frac{\partial z}{\partial y})}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} =$$
$$= -\frac{v^2 x}{y^2} + 2v \ln x \cdot \frac{x}{y} + \left(\frac{2vx}{y} + 2u \ln x\right) \cdot \ln x. \quad \blacksquare$$

179. Přesvědčte se, že funkce $y = f(x + at) + g(x - at)$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$. Předpokládáme, že f a g jsou dvakrát diferencovatelné funkce. [Návod: $u = x + at,\ v = x - at,\ y = f(u) + g(v)$]

180. Přesvědčte se, že funkce $z = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ splňuje rovnici $x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$. Předpokládáme, že f je diferencovatelná funkce.

181. Jsou dány funkce $z = f(u, v),\ u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy}$. Spočítejte diferenciální výraz $W = y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$, kde f je diferencovatelná funkce. $\left[W = (x^2 + y^2)\, e^{xy} \dfrac{\partial f}{\partial v}\right]$

182. Je dána funkce $f(x, y) = x^y$, kde $x = u^2 + v^2,\ y = uv + v^2$. Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ v bodě A, jehož souřadnice jsou $u = 1,\ v = -1$. $\left[\dfrac{\partial f}{\partial u}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(A) = -\ln 2\right]$

II.9. Funkce definované implicitně

***Příklad* 183.** Dokažte, že rovnicí $x^3 + y^3 = 2x^2 + xy - 1 = 0$ je implicitně definována jediná funkce $y = f(x)$ v okolí bodu $A = [1, 0]$. Určete $f'(1)$ a $f''(1)$.

Řešení : Označme $F(x,y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - xy + 1$ funkci, která je spojitá v E_2 a má spojité parciální derivace. K existenci a jednoznačnosti implicitní funkce $y = f(x)$ nyní stačí, že $F(A) = F(1,0) = 0$ a $F'_y = (3y^2 - x)\Big|_A = -1 \neq 0$. Dále spočítáme

$$f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2 - 4x - y}{3y^2 - x}, \qquad f'(1) = f'(A) = -\frac{3-4}{-1} = -1,$$

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = -\frac{(6x - 4 - f')(3y^2 - x) - (3x^2 - 4x - y)(6y \cdot f' - 1)}{(3y^2 - x)^2}$$

$$f''(1) = f''(A) = -\frac{(6 - 4 + 1)(-1) - (3 - 4)(-1)}{1} = 4.$$ ■

***Příklad* 184.** Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x,y) \equiv x^3y + y^3x + x^2y - 3 = 0$ v bodě $A = [1, 1]$.

Řešení : Jelikož $F(1,1) = 0$ a $F'_y(A) = \left(x^3 + 3y^2x + x^2\right)_{[1,1]} = 5 \neq 0$, je rovnicí $F(x,y) = 0$ skutečně definována křivka $y = y(x)$, která prochází bodem A.

$$y'(A) = -\frac{F'_x}{F'_y}(A) = \left(-\frac{3x^2y + y^3 + 2xy}{x^3 + 3y^2x + x^2}\right)\Big|_A = -\frac{6}{5}$$

$t:\quad y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, kde $A = [x_0, y_0]$, $\quad y - 1 = -\frac{6}{5}(x - 1) \longrightarrow 6x + 5y - 11 = 0,$

$n:\quad y - 1 = \frac{5}{6}(x - 1) \longrightarrow 5x - 6y - 1 = 0.$ ■

***Příklad* 185.** Rovnicí $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je dána **logaritmická spirála.** Stanovte y' a y''.

Řešení : Můžeme použít známý vzorec $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}, F'_y \neq 0$ nebo můžeme danou rovnici přímo derivovat a přitom si pamatovat, že y je závislé na x tj. $y = y(x)$.
Derivujme přímo :

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \longrightarrow \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{y'x - y}{x^2 + y^2} \longrightarrow$$

$$x + yy' = y'x - y \longrightarrow x + y = y'(x - y) \longrightarrow \quad y' = \frac{x + y}{x - y}, \quad x \neq y$$

Druhou derivaci spočítáme podobně :

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)' = \frac{(1 + y')(x - y) - (x + y)(1 - y')}{(x - y)^2} = \frac{x - y - x - y + y'(x - y + x + y)}{(x - y)^2} =$$

$$y'' = \frac{-2y + 2xy'}{(x - y)^2} = \frac{-2y + 2x \cdot \frac{x+y}{x-y}}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}.$$ ■

***Příklad* 186.** Ukažte, že rovnicí $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$ je implicitně určena funkce $y = f(x)$, jejíž graf prochází bodem $A = [0, 1]$ a zjistěte, zda je $f(x)$ konvexní v okolí bodu A. Napište rovnici tečny ke grafu funkce v bodě A.

Řešení : $F(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 3$ je diferencovatelná v E_2,

$$F(A) = F(0,1) = 0, \quad F'_y = (2x+2y+2)\Big|_A \neq 0,$$

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x+2y-4}{2x+2y+2} = -\frac{x+y-2}{x+y+1} \longrightarrow y'(A) = \frac{1}{2},$$

$$y'' = -\frac{(1+y')(x+y+1)-(x+y-2)(1+y')}{(x+y+1)^2} = -\frac{3(1+y')}{(x+y+1)^2} \longrightarrow$$

$y''(A) = -\dfrac{3(1+\frac{1}{2})}{(0+1+1)^2} = -\dfrac{9}{8} < 0$. Funkce $y = f(x)$ je v bodě A konkávní, jelikož $y''(A) < 0$. Tečna v bodě A má rovnici $y - 1 = \dfrac{1}{2}x \longrightarrow x - 2y + 2 = 0$. ■

***Příklad* 187.** Dokažte, že vztahem $F(x,y,z) = z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$ je definována jediná funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu $A = [-1,-2,1]$. Určete grad $f(A)$.

Řešení : Funkce F má spojité parciální derivace v okolí bodu A,
$F(A) = F(-1,-2,1) = 0, \quad F'_z(A) = (3z^2+3x^2)\Big|_A = 6 \neq 0$. Tím je existence a jednoznačnost funkce $z = f(x,y)$ v okolí bodu A prokázána.

Nyní je grad $f(A) = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}(A), \dfrac{\partial z}{\partial y}(A)\right)$, kde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{6xz-2y}{3z^2+3x^2} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(A) = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-2x}{3z^2+3x^2} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(A) = -\frac{1}{3},$$

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}(1,-1).$$ ■

***Příklad* 188.** V okolí bodu $[2,-2,1]$ je dána funkce $z = f(x,y)$ v implicitním tvaru $\ln z + x^2yz + 8 = 0$. Určete $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{s}}\Big|_A$, kde $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$, $A = [2,-2]$, $B = [3,-3]$.

Řešení : Označíme $F(x,y,z) = \ln z + x^2yz + 8$. V bodech, kde $F(x,y,z) = 0$ a $F_z(x,y,z) \neq 0$ platí :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2xyz}{\frac{1}{z}+x^2y} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{8}{7}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^2z}{\frac{1}{z}+x^2y} \longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(A) = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{s}}(A) = \operatorname{grad} f(A) \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = \left(-\frac{8}{7}, \frac{4}{7}\right) \cdot \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{-12}{7\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{7}.$$ ■

***Příklad* 189.** Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše definované implicitně rovnicí $F(x,y,z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$, v bodě $A = [3,0,4]$.

Řešení : Víme, že normálový vektor k ploše má vyjádření

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} - 1\right) = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}, -\frac{F'_y}{F'_z}, -1\right) \longrightarrow \vec{n} = (F'_x, F'_y, F'_z).$$

Je-li plocha vyjádřena v implicitním tvaru, pak poslední zápis je výhodnější. Tedy
$\vec{n} = (2x, 2y, 2z) \sim (x,y,z)\Big|_A = (3,0,4)$,

$$\tau : 3(x-3) + 0 \cdot y + 4(z-4) = 0 \longrightarrow 3x + 4z - 25 = 0,$$

$$n : [x,y,z] = [3,0,4] + t(3,0,4).$$ ■

***Příklad* 190**. Napište rovnici tečné roviny k ploše $F(x,y,z) \equiv x(y+z)+z^2-5=0$ rovnoběžné s rovinou $\varrho: 3x-3y+6z=2$.

Řešení : $\vec{n}=(3,-3,6)\sim(1,-1,2)$

$$\vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(y+z,x,x+2z)=k(1,-1,2)$$

$\left\{\begin{aligned} y+z&=k\\ x&=-k\\ x+2z&=2k\end{aligned}\right\}$ a z této soustavy musíme určit souřadnice dotykového bodu A.

Vychází $x=-k,\ \ y=-\dfrac{k}{2},\ \ z=\dfrac{3}{2}k$. Víme, že hledaný bod musí ležet na dané ploše, proto dosadíme do $F(x,y,z)=0$ a určíme konstantu k , a tím i souřadnice hledaného bodu. Dostáváme postupně

$$-k\Big(-\frac{k}{2}+\frac{3}{2}k\Big)+\Big(\frac{3}{2}k\Big)^2=5,\quad -k^2+\frac{9}{4}k^2=5,\quad k^2=4,\qquad k=\pm 2,$$

$$A_1=[-2,3,-1], A_2=[2,-3,1];$$

$$\tau_1: x-y+2z+7=0,\quad \tau_2: x-y+2z-7=0.$$ ■

***Příklad* 191**. Určete rovnici tečny v bodě $A=[-2,1,6]$ ke křivce v E_3, dané rovnicemi $2x^2+3y^2+z^2=47$, $x^2+2y^2=z$.

Řešení : Snadno určíme tečnou rovinu v bodě A k první ploše $\tau_1: -4x+3y+6z-47=0$ a tečnou rovinu ke druhé ploše $\tau_2: -4x+4y-z-6=0$. Směrový vektor hledané tečny je $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-27,-28,-4)\sim(27,28,4)$ a rovnice tečny

$$[x,y,z]=[-2,1,6]+t(27,28,4).$$

Uvedeme další možný postup. Při daném vyjádření křivky jako průniku dvou ploch budeme předpokládat, že jediná nezávislá proměnná je x. Potom y a z budou funkcemi proměnné x, tj. $y(x), z(x)$.

Hledaný tečný vektor $\vec{s}$ bude $(1,y'(x),z'(x))$. Proto danou soustavu zderivujeme podle x :

$$\left\{\begin{aligned} 4x+6yy'+2zz'&=0\\ 2x+4yy'&=z'\end{aligned}\right.\quad \text{neboli}\quad \left\{\begin{aligned} 2x+3yy'+zz'&=0\\ 2x+4yy'&=z'\end{aligned}\right..$$

Nás zajímá tečný vektor v daném bodě, proto dosadíme souřadnice bodu A a obdržíme postupně vzájemně ekvivalentní soustavy

$$\left\{\begin{aligned} -4+3y'+6z'&=0\\ -4+4y'-z'&=0\end{aligned}\right\},\ \left\{\begin{aligned} 3y'+6z'&=4\\ 4y'-z'&=4\end{aligned}\right\},\ \left\{\begin{aligned} y'&=\frac{\begin{vmatrix}4&6\\4&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&6\\4&-1\end{vmatrix}}=\frac{-28}{-27}=\frac{28}{27},\\ z'&=\frac{\begin{vmatrix}3&4\\4&4\end{vmatrix}}{-27}=\frac{-4}{-27}=\frac{4}{27}\end{aligned}\right\}.$$

Hledaný tečný vektor je $\vec{s}=\Big(1,\dfrac{28}{27},\dfrac{4}{27}\Big)\sim(27,28,4)$. Parametrické vyjádření tečny je tedy opět $[x,y,z]=[-2,1,6]+t(27,28,4)$. ■

***Příklad* 192**. a) Najděte jednotkový vektor $\vec{n}^o$ vnější normály v bodě $A=[1,-1,1]$ plochy vyjádřené implicitně ve tvaru $F(x,y,z)\equiv x^2+y^2+z^2-3=0$.

b) Spočítejte $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{n}^o}(A)$, kde $f(x,y,z)=xy^2z^3$.

Řešení : a) $\vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)=(2x,2y,2z)\sim(x,y,z)$, $\quad\vec{n}^o=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{n}^o}(A)=\operatorname{grad} f(A)\cdot\vec{n}^o=(1,-2,3)\cdot\dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$ ■

• Napište rovnici tečny t a normály n křivky definované implicitně rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě A :

193. $F(x,y) \equiv \arcsin x + xy^2 = 0,\ A=[0,2]$ $[t: x=0, n: y=2]$

194. $F(x,y) \equiv x^2y + xy^2 - axy - a^3 = 0,\ A=[a,a]$ $[t: y=-x+2a, n: y=x]$

195. Dokažte, že rovnicí $\ln(x+y)+2x+y=0$ je definována funkce $y=f(x)$ splňující $f(-1)=2$. Napište rovnici tečny ke křivce $y=f(x)$ v bodě $A=[-1,2]$. $[t: y-2=-\frac{3}{2}(x+1)]$

• Napište rovnici tečné roviny τ a normály n k ploše $F(x,y,z)=0$ v bodě A :

196. $x^2+2y^2+3z^2-21=0,\ A=[1,2,2]$
$[\tau: x+4y+6z-21=0,\ n: (x,y,z)=(1,2,2)+t(1,4,6)]$

197. $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0,\ A=[1,2,-1]$
$[\tau: x+11y+5z-18=0,\ n: (x,y,z)=(1,2,-1)+t(1,11,5)]$

198. $xyz^2-x-y-z=0,\ A=[1,-1,-1]$
$[\tau: -2x+z+3=0,\ n: (x,y,z)=(1,-1,-1)+t(-2,0,1)]$

• Napište rovnici takové tečné roviny k ploše $F(x,y,z)=0$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ.

199. $x^2+y^2+z^2-1=0,\ \varrho: x+2y+z=0$
$[x+2y+z\pm\sqrt{6}=0$, body dotyku $T_{1,2}=[\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\pm\frac{2}{\sqrt{6}},\pm\frac{1}{\sqrt{6}}]]$

200. $x^2+2y^2+3z^2-21=0,\ \varrho: x+4y+6z=0$ $[x+4y+6z\pm21=0,\ T_{1,2}=[\pm1,\pm2,\pm2]]$

201. Je dána funkce $z=f(x,y)$ v implicitním tvaru $e^z-xyz=e$. Určete $f'_x(A), f'_y(A)$, $f''_{xy}(A)$, kde bod $A=[0,e,1]$ $[f'_x(A)=1, f'_y(A)=0,\ f''_{xy}(A)=1/e]$

202. Jsou dány dvě plochy rovnicemi v implicitním tvaru $x+2y-\ln z+4=0$ a $x^2-xy-8x+\frac{1}{2}z^2+\overset{5{,}5}{\cancel{5}}=0$. Určete vzájemnou polohu tečných rovin obou ploch ve společném bodě $T=[2,-3,1]$. $[x+2y-z+5=0$ je společná tečná rovina$]$

II.10.* Transformace diferenciálních výrazů

Nechť platí :

1) *G a B jsou oblasti v E_n,*
2) *zobrazení $g=[g_1,\dots,g_n]: B \longrightarrow G$, splňující*
$[x_1,\dots,x_n]=\Big[g_1(u_1,\dots,u_n),\dots,g_n(u_1,\dots,u_n)\Big]$ *pro všechna* $[u_1,\dots,u_n]\in B$, *je prosté a má spojité parciální derivace v B,*
3) *Jacobián* $J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial u_n}\end{vmatrix} \neq 0$ *v celé oblasti B.*

Potom zobrazení $g = [g_1, \ldots, g_n]$ nazýváme **transformací** *souřadnic $[x_1, \ldots, x_n] \in G$ do soustavy souřadnic $[u_1, \ldots, u_n] \in B$.*

***Příklad* 203.** Je dána tzv. **Eulerova** diferenciální rovnice $x^2y'' + xy' - 4y = x \ln x$. Proveďte její transformaci, jestliže $x = e^t$.

Řešení : V daném případě máme jedinou nezávislou proměnnou x, $x \in G,$, $G = (0, \infty)$, y je funkce x. Transformační funkce $x = e^t : R \longrightarrow G, R = E_1, G \subset E_1$ je prostá a její Jacobián se redukuje na jedinou derivaci $\dfrac{dx}{dt} = e^t \neq 0$ pro všechna $t \in R$.

Spočítejme derivace $y' = \dfrac{dy}{dx}$ a $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ pomocí derivací $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$, $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dt^2}$:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y} \cdot e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{d(\dot{y} \cdot e^{-t})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left(\ddot{y} \cdot e^{-t} - \dot{y} \cdot e^{-t}\right) \cdot e^{-t} = (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot e^{-2t}.$$

Po dosazení do dané rovnice

$$e^{2t} \cdot (\ddot{y} - \dot{y}) \cdot e^{-2t} + e^t \cdot \dot{y} \cdot e^{-t} - 4y = e^t \cdot \ln e^t$$

obdržíme transformovanou rovnici $\quad \ddot{y} - 4y = t\, e^t$. ■

***Příklad* 204.** Rovnici $y \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $(y > 0)$ transformujte do nových souřadnic $u = x$, $v = x^2 + y^2$ a získanou rovnici pak vyřešte.

Řešení : Zde víme, že $z(x, y)$, $u(x, y)$, $v(x, y)$ a Jacobián inverzní transformace je $J^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y \neq 0$ pro $y > 0$, $[x, y] \in R \times (0, \infty) \longrightarrow [u, v] \in R \times (0, \infty)$.

Přistoupíme k výpočtu derivací :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y$$

Nyní dosadíme do dané rovnice,takže postupně odvodíme řešení :

$$y\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2x\right) - x \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y = 0, \quad y \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0 \text{ (protože } y > 0),$$

$$z(u) = \text{konst.}, \; z = f(v), \quad z = f(x^2 + y^2).$$ ■

***Příklad* 205.** Transformujte diferenciální výraz $\mathcal{W} = \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2$ do polárních souřadnic.

Řešení : Transformační rovnice

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos\varphi \\ y = r \sin\varphi \end{array} \right\},$$

zobrazují vždy bod $[r, \varphi]$ do bodu $[x, y]$, takže se oblast $(0, \infty) \times \langle 0, 2\pi)$ zobrazí do množiny $E_2 - [0, 0]$. přičemž $J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \neq 0$.

Podle pravidla o derivování složených funkcí je

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}.$$

Zderivujeme soustavu (1) nejdříve podle x, potom podle y a pamatujeme, že r a φ závisí na x, y.

Derivace podle x :

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\varphi - r\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\varphi + r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -r\sin\varphi \\ 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}} = \dfrac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & 1 \\ \sin\varphi & 0 \end{vmatrix}}{r} = \dfrac{-\sin\varphi}{r}. \end{array}$$

Derivace podle y :

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial r}{\partial y}\cos\varphi - r\sin\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 = \dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\varphi + r\cos\varphi\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -r\sin\varphi \\ 1 & r\cos\varphi \end{vmatrix}}{r} = \dfrac{r\sin\varphi}{r} = \sin\varphi, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos\varphi & 0 \\ \sin\varphi & 1 \end{vmatrix}}{r} = \dfrac{\cos\varphi}{r}. \end{array}$$

Dosadíme získané derivace do (2) a současně do daného diferenciálního výrazu :

$$\mathcal{W} = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cdot\sin^2\varphi +$$

$$+2\cdot\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 206**. Použijte předcházející příklad a transformujte diferenciální výraz

$$\mathcal{V} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Řešení :
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r}\right)\cdot\left(\frac{-\sin\varphi}{r}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{r^2}\right)\cdot\cos\varphi +$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi\,\partial r}\cdot\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\sin\varphi - \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{r}\right)\cdot\left(-\frac{\sin\varphi}{r}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cdot\cos^2\varphi - 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\sin^2\varphi}{r} + 2\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Podobným způsobem obdržíme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cdot\sin^2\varphi + 2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\cos^2\varphi}{r} -$$

$$-2\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}.$$

Po dosazení do původního výrazu (použijeme $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$) dostaneme

$$\mathcal{V} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{1}{r^2} + \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}. \qquad \blacksquare$$

207. Transformujte do polárních souřadnic diferenciální výrazy : $\mathcal{V} = x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$; $\mathcal{W} = x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (Použijte předcházející dva příklady a dopočítejte derivaci $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.) $\left[\mathcal{V} = r\frac{\partial z}{\partial r};\ \mathcal{W} = r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\right]$

208. Transformujte diferenciální výrazy $\mathcal{W}_1 = x\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$; $\mathcal{W}_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ do nových souřadnic u, v takových, že $x = u$, $y = uv$, kde $[u, v] \in (0,\infty)\times R$. $\left[\mathcal{W}_1 = u\frac{\partial z}{\partial u},\ \mathcal{W}_2 = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{v^2}{u^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]$

209. Transformujte diferenciální výraz $\mathcal{W} = 4xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 2y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$ do nových souřadnic u, v, jestliže $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$, kde $[u, v] \in (0,\infty)\times(0,\infty)$. $\left[\mathcal{W} = u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - v^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]$

210. Transformujte diferenciální rovnici : $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$, jestliže $x = \cos t$. ($x(t)$ musí být funkce prostá, proto $t \in \langle 0,\pi\rangle$.) $\left[\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0\right]$

211. Vyjádřete vzorec pro křivost křivky $y = f(x)$, $k = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$ v polárních souřadnicích. $\left[k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{\left(r^2 + (r')^2\right)^{3/2}},\ \text{kde } r' = \frac{dr}{d\varphi},\ r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right]$

212. Transformujte parciální diferenciální rovnici $(x+y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ do nových souřadnic u, v takových,že $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. $\left[\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0\right]$

II.11. Extrémy funkcí

***Příklad* 213**. Definujte ostré lokální maximum a minimum. Má funkce $z = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $A = [0, 0]$ lokální extrém?

Řešení : Nechť je funkce $f(X)$ definovaná v množině $\mathcal{D} \subset E_2$ a bod A je vnitřní bod množiny $\mathcal{D}$. Jestliže existuje okolí $\bigcup(A, r) \subset \mathcal{D}$ takové, že pro všechna $X \in \bigcup(A, r) - A$ platí $f(X) \le f(A)$, resp. $f(X) \ge f(A)$, pak říkáme, že funkce f má v bodě A lokální maximum, resp. lokální minimum.
Platí-li ostré nerovnosti, pak mluvíme o ostrém lokálním maximu, resp. minimu.
V daném příkladě platí $z(A) < z(X)$ pro každý bod X z okolí bodu A, a tedy v bodě A nastává ostré lokální minimum.

Poznámka : Derivace $z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v bodě A neexistují, a proto nelze použít $\operatorname{grad} z(A) = \vec{0}$. $\blacksquare$

• Najděte **lokální** extrémy funkce :

***Příklad* 214.** $z(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

Řešení : Máme zde funkci dvou proměnných v explicitním tvaru. Funkce z je diferencovatelná, proto nutné podmínky existence lokálních extrémů jsou : $z'_x = 0,\ z'_y = 0$.

$$\begin{cases} z'_x = 6x^2 + y^2 + 10x & \longrightarrow \quad 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ z'_y = 2xy + 2y & \longrightarrow \quad y(x+1) = 0 \longrightarrow \quad \text{buď } y = 0 \text{ nebo } x = -1 \end{cases}$$

$$y = 0: \quad 6x^2 + 10x = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \longrightarrow & A_1 = [0,0] \\ x_2 = -\dfrac{5}{3} \longrightarrow & A_2 = \left[-\dfrac{5}{3}, 0\right] \end{cases}$$

$$x = -1: \quad y^2 + 6 - 10 = 0 \longrightarrow y^2 = 4 \longrightarrow \quad \begin{cases} y = 2 \longrightarrow & A_3 = [-1,2] \\ y = -2 \longrightarrow & A_4 = [-1,-2] \end{cases}$$

Nyní si připravíme derivace druhého řádu :

	A_1	A_2	A_3	A_4
$z''_{xx} = 12x + 10$	10	-10	-2	-2
$z''_{yy} = 2x + 2$	2	$-\frac{4}{3}$	0	0
$z''_{xy} = 2y$	0	0	4	-4

$$\text{Pro } \triangle(A_i) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \text{existuje lokální extrém.} \\ < 0 & \text{neexistuje lokální extrém.} \end{cases}$$

$$\text{Pro } \triangle(A_1) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} > 0,\ z''_{xx} > 0 \quad \text{obdržíme lokální minimum } z(A_1) = 0.$$

$$\text{Pro } \triangle(A_2) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\dfrac{4}{3} \end{vmatrix} > 0,\ z''_{xx} < 0 \quad \text{dostaneme lokální maximum } z(A_2) = \frac{125}{27}.$$

$$\text{Pro } \begin{cases} \triangle(A_3) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} < 0 \\ \triangle(A_4) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} < 0 \end{cases} \quad \rightarrow \text{ v bodech } A_3 \text{ a } A_4 \text{ lokální extrémy neexistují.}$$

■

***Příklad* 215.** Funkce $y = f(x)$ je vyjádřena v implicitním tvaru $x^2 + 2xy - y^2 + 8 = 0$.

Řešení : Zderivujeme přímo danou rovnici podle x a spočítáme

$$y': \quad 2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0 \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{x+y}{y-x} \text{ pro } x \neq y.$$

Položíme $y' = 0$, tedy $x + y = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -x$ a dosadíme do zadání, abychom určili souřadnice případných lokálních extrémů

$$x^2 - 2x^2 - x^2 + 8 = 0 \longrightarrow \quad 2x^2 = 8 \longrightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \mp 2.$$

Dostali jsme dva body $A[2,-2]$ a $B = [-2,2]$. Nyní spočítáme

$$y'' = \frac{(1+y')(y-x) - (x+y)(y'-1)}{(y-x)^2}, \text{ takže}$$

$$y''(A) = \frac{-4}{16} < 0 \longrightarrow \quad f(2) = -2 \text{ je lokální maximum a}$$

$$y''(B) = \frac{4}{16} > 0 \longrightarrow \quad f(-2) = 2 \text{ je lokální minimum.}$$

■

***Příklad* 216**. Funkce $z = f(x,y)$ je dána rovnicí $z^3 - 3xyz = a^3$, $a \neq 0$.

Řešení : $z'_x = -\dfrac{-3yz}{3z^2 - 3xy} = \dfrac{yz}{z^2 - xy}$, $z'_y = \dfrac{xz}{z^2 - xy}$. Položíme obě derivace rovny 0.

Za předpokladu $z^2 - xy \neq 0$ vychází $\left\{ \begin{array}{c} yz = 0 \\ xz = 0 \end{array} \right\}$, což je splněno buď když $z = 0$ nebo $x = y = 0$, avšak $z = 0$ nevyhovuje rovnici $z^3 - 3xyz = a^3$.

Zbývá případ $x = y = 0$. Potom po dosazení do výchozího výrazu získáme $z = a$.

Dostali jsme jediný stacionární bod $A = [0,0]$. Nyní je

$$z''_{xx} = \left(\frac{yz'_x(z^2 - xy) - yz(2zz'_x - y)}{(z^2 - xy)^2}\right)\Big|_A = 0,$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{xz'_y(z^2 - xy) - xz(2zz'_y - x)}{(z^2 - xy)^2}\right)\Big|_A = 0,$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{(z + yz'_y)(z^2 - xy) - yz(2zz'_y - x)}{(z^2 - xy)^2}\right)\Big|_A = \frac{a^3}{a^4} = \frac{1}{a} \quad \text{a}$$

$$\triangle(A) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad \text{takže v bodě } A \text{ neexistuje lokální extrém.}$$ ■

***Příklad* 217**.* $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

Řešení :

$$\triangle_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix}, \quad \triangle_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \quad \triangle_1 = f''_{xx}$$

Podle **Sylvestrovy** věty o kvadratických formách platí :

Je-li $\triangle_2(M) > 0$, $\left\{ \begin{array}{l} \triangle_3(M) > 0, \triangle_1(M) > 0, \textit{pak } f(M) \textit{ je ostré lokální minimum.} \\ \triangle_3(M) < 0, \triangle_1(M) < 0, \textit{ pak } f(M) \textit{ je ostré lokální maximum.} \end{array} \right.$

Je-li $\triangle_2(M) < 0$, *pak v bodě* M *neexistuje lokální extrém.*

Výpočet vypadá následovně :

$$\left.\begin{array}{lll} f'_x = 3x^2 + 12y = 0 & \text{neboli} & x^2 + 4y = 0, \\ f'_y = 2y + 12x = 0 & \text{neboli} & y = -6x, \end{array}\right\}, \quad \begin{array}{l} \text{pak } x^2 - 24x = 0 \quad \to \text{a} \\ x_1 = 0,\ x_2 = 24, \end{array}$$

$$f'_z = 2z + 2 = 0, \quad \text{neboli} \quad z = -1$$

$$A = [0,0,-1], \quad B = [24,-144,-1]$$

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{yy} = 2, f''_{zz} = 2, \quad f''_{xy} = 12, \quad f''_{xz} = 0, \quad f''_{yz} = 0.$$

Protože $\triangle_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} < 0$, v bodě A nenastává lokální extrém.

Protože $\triangle_2(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 144 > 0$, $\triangle_3(B) = \begin{vmatrix} 144 & 12 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 288 > 0$ a

$\triangle_1(B) = 144 > 0$, je $f(B) = f(24,-144,-1) = -6913$ lokální minimum.

Můžeme se též přesvědčit přímo, že kvadratická forma $d^2f(B)$ je pozitivně definitní :

$d^2f(B) = 144\,(dx)^2 + 24\,dx\,dy + 2\,(dy)^2 + 2\,(dz)^2 = (12\,dx + dy)^2 + (dy)^2 + 2\,(dz)^2 > 0$ ■

Příklad* 218. $f(x,y,z) = \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} + x$

Řešení : Za předpokladu $xyz \neq 0$, položíme všechny derivace funkce f rovny 0.

$$(1)\ \begin{cases} f'_x = -\dfrac{y^2}{4x^2} + 1 = 0 \longrightarrow \left(\dfrac{y}{2x}\right)^2 = 1, \text{takže buď 1) } y = 2x \text{ nebo 2) } y = -2x, \\ f'_y = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{z^2}{y^2} = 0, \\ f'_z = \dfrac{2z}{y} - \dfrac{2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

Případ :

1) Nechť $y = 2x$. Pak $f'_y = 0 \to 1 - \dfrac{z^2}{4x^2} = 0,\quad z^2 = 4x^2,\quad z_1 = 2x,\ z_2 = -2x.$

Pro $z_1 = 2x,\quad f'_z = 0 \to \dfrac{4x}{2x} - \dfrac{2}{4x^2} = 0,\ 2 - \dfrac{1}{2x^2} = 0,\quad x^2 = \dfrac{1}{4}.$

Obdrželi jsme stacionární body $A = \left[\dfrac{1}{2}, 1, 1\right],\quad B = \left[-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right]$

Pro $z_2 = -2x,\quad f'_z = 0 \to \dfrac{-4x}{2x} - \dfrac{2}{4x^2} = 0,\ -2 - \dfrac{1}{2x^2} = 0,\quad x^2 = -\dfrac{1}{4},$

takže neexistuje řešení.

2) Nechť $y = -2x$. Pak $f'_y = 0 \to -1 - \dfrac{z^2}{y^2} = 0$ a řešení neexistuje .

Tím jsme vyčerpali řešení soustavy (1) v oboru reálných čísel. Přistoupíme k výpočtu druhých parciálních derivací :

$$f''_{xx} = \frac{y^2}{2x^3},\qquad f''_{xy} = -\frac{y}{2x^2},\qquad f''_{xz} = 0,$$
$$f''_{yy} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3},\qquad f''_{yz} = -\frac{2z}{y^2},\qquad f''_{zz} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3},$$

$$\triangle_2(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0,\ \triangle_3(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0,\ \triangle_1(A) = 4 > 0,$$

$$\triangle_2(B) = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0,\ \triangle_3(B) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -32 < 0,$$

$\triangle_1(B) = -4 < 0$. Je tedy

$f(A) = f\left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right) = 4$ lokální minimum a

$f(B) = f\left(-\dfrac{1}{2}, -1, -1\right) = -4$ lokální maximum. ■

• Najděte **vázané (podmíněné)** extrémy daných funkcí :

***Příklad* 219.** $z = 2(x^2 + y^2)$, jestliže $x + y = 2$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **rotačního paraboloidu** $z = 2(x^2 + y^2)$ s **rovinou** $x + y = 2$.

Z podmínky $x + y = 2$ vyjádříme např. $y = 2 - x$ a dosadíme do dané funkce $z = 2(x^2 + y^2)$. Tím dostaneme $z(x) = 2(x^2 + (2-x)^2)$, takže $z(x) = 4(x^2 - 2x + 2)$.

Pro funkci $z(x)$ hledáme lokální extrém. Položíme tedy

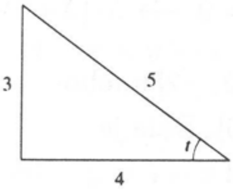
$z'(x) = 4(2x-2) = 0$. Odtud $x_1 = 1, y_1 = 2-1 = 1$ a $z''(x) = 8 > 0$ a $z(1,1) = 4$ je lokální minimum. ■

***Příklad* 220.** $z = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}$, jestliže $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení : Geometricky se jedná o nalezení extrémů z-ové souřadnice na průsečné křivce **roviny** $z = \dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4}$ s **rotačním válcem** $x^2 + y^2 = 1$.

Jelikož z podmínky $x^2 + y^2 = 1$ nelze jednoznačně vyjádřit ani x ani y, přejdeme do polárních souřadnic $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$, kde $r = 1$, tedy $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Potom $z = \dfrac{\cos t}{3} + \dfrac{\sin t}{4}$ a dále $z' = \dfrac{dz}{dt}\dfrac{-\sin t}{3} + \dfrac{\cos t}{4} = 0$, takže $\operatorname{tg} t = \dfrac{3}{4}$.



Jak vidíme na obrázku je $\sin t = \pm\dfrac{3}{5}$, $\cos t = \pm\dfrac{4}{5}$.

Pro $\sin t_1 = \dfrac{3}{5}$, $\cos t_1 = \dfrac{4}{5}$ je $t_1 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

a pro $\sin t_2 = -\dfrac{3}{5}$, $\cos t_2 = -\dfrac{4}{5}$ je $t_2 \in (\pi, \dfrac{3\pi}{2})$.

Dále je $z'' = \dfrac{d^2z}{dt^2} = -\dfrac{\cos t}{3} - \dfrac{\sin t}{4} \longrightarrow z''(t_1) < 0,\ z''(t_2) > 0$.

Dospěli jsme k lokálnímu maximu $z(t_1) = z\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{15} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{5}{12}$

a lokálnímu minimu $z(t_2) = z\left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{5}{12}$. ■

***Příklad* 221.** $z = \sin^2 x + \sin^2 y$, jestliže $y = x - \dfrac{\pi}{4}$.

Řešení : $z(x) = \sin^2 x + \sin^2(x - \dfrac{\pi}{4})$, $z'(x) = 2\sin x\cos x + 2\sin(x - \dfrac{\pi}{4})\cos(x - \dfrac{\pi}{4}) =$
$= \sin 2x + \sin(2x - \dfrac{\pi}{2}) = \sin 2x + \sin 2x\cos\dfrac{\pi}{2} - \cos 2x\sin\dfrac{\pi}{2} = \sin 2x - \cos 2x$

Položíme-li $z'(x) = 0$, dostaneme $\sin 2x = \cos 2x$ a dále

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \text{ takže } k_1 = 2n,\ k_2 = 2n+1.$$

Vypočteme druhou derivaci : $z''(x) = 2\cos 2x + 2\sin 2x$,

$$z''\left(\frac{\pi}{8} + 2n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} > 0,$$

$$z''\left(\frac{\pi}{8} + (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} < 0.$$

Tedy $z\left(\dfrac{\pi}{8} + n\pi\right) = 2\sin^2\dfrac{\pi}{8} = 1 - \cos\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ je lokální minimum

a $z\left(\dfrac{\pi}{8} + (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin^2\dfrac{5\pi}{8} + \sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \cos\dfrac{5\pi}{4} + 1 - \cos\dfrac{\pi}{4}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$ je lokální maximum. ■

***Příklad* 222.** $z = x^2 + 2y^2$, jestliže $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$.

Řešení : Zde použijeme **Lagrangeovu funkci** : *Je-li dána funkce* $z = f(x,y)$ *a podmínka* $g(x,y) = 0$*, potom Lagrangeova funkce má vyjádření*

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y).$$

Její stacionární body získáme řešením soustavy $\left\{\begin{aligned} \mathrm{L}'_{\mathrm{x}} &= 0 \\ \mathrm{L}'_{\mathrm{y}} &= 0 \\ g(x,y) &= 0. \end{aligned}\right.$

V našem příkladě máme $\quad \mathrm{L}(x,y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$

$$\mathrm{L}'_x = 2x + \lambda(2x-2) = 0 \quad \text{a odtud} \quad x = \frac{\lambda}{1+\lambda},$$

$$\mathrm{L}'_y = 4y + \lambda(4y+4) = 0 \quad \text{a odtud} \quad y = \frac{-\lambda}{1+\lambda}.$$

Tedy $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$, takže $\dfrac{\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \dfrac{2\lambda}{1+\lambda} + \dfrac{2\lambda^2}{(1+\lambda)^2} - \dfrac{4\lambda}{1+\lambda} = 0,$

$\dfrac{3\lambda^2}{(1+\lambda)^2} = \dfrac{6\lambda}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ a následně $\dfrac{3\lambda^2}{1+\lambda} = 6\lambda$, $3\lambda^2 + 6\lambda = 0 \longrightarrow \lambda\cdot(\lambda+2) = 0.$

Zde máme $\quad \lambda_1 = -2$, takže $x_1 = 2$, $y_1 = -2$, $\quad A_1 = [2,-2]$ anebo

$\lambda_2 = 0$ takže $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $\quad A_2 = [0,0]$. Dále je

$\mathrm{L}'_{\mathrm{xx}} = 2 + 2\lambda$, $\mathrm{L}'_{\mathrm{yy}} = 4 + 4\lambda$, $\mathrm{L}'_{\mathrm{xy}} = 0$ a odtud

$$\triangle(A_1) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} > 0,\ \mathrm{L}''_{\mathrm{xx}}(\mathrm{A}_1) < 0, \quad \mathrm{L}(A_1) = 12 \text{ je lokálním maximem,}$$

$$\triangle(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} > 0,\ \mathrm{L}''_{\mathrm{xx}}(\mathrm{A}_2) > 0, \quad \mathrm{L}(A_2) = 0 \text{ je lokálním minimem.}$$

■

***Příklad* 223.** V rovině $x + 2y - z + 3 = 0$ najděte bod, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $A = [1,1,1]$ a $B = [2,2,2]$ je nejmenší.

Řešení : Hledaný bod označíme $M = [x,y,z]$ a sestavíme součet $|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2$, který zapíšeme pomocí souřadnic bodů

$$f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2.$$

Bod M musí ležet v rovině $x + 2y - z + 3 = 0$. Tedy tato rovnice roviny je příslušná podmínka nebo též vazba, která musí být splněna.
Vyjádříme-li si např. $z = x + 2y + 3$ a dosadíme-li do $f(x,y,z)$, potom funkce $f(x,y,x+2y+3)$ bude funkcí dvou proměnných x a y :

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x+2y+2)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x+2y+1)^2,$$

$$f'_x = 2(x-1) + 2(x+2x+2) + 2(x-2) + 2(x+2y+1) = 8(x+y),$$
$$f'_y = 2(y-1) + 4(x+2y+2) + 2(y-2) + 4(x+2y+1) = 4(2x+5y) + 6.$$

$$\text{Položíme} \left\{\begin{array}{ll} f'_x = 0, \text{ pak} & x + y = 0 \longrightarrow y = -x, \\ f'_y = 0, \text{ takže} & 4x + 10y = -3 \longrightarrow -6x = -3, \end{array}\right\} x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Máme tedy } z_1 = \frac{5}{2}, \quad M = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

$$\text{Dále je} \left\{\begin{aligned} f''_{xx} &= 8 \\ f''_{xy} &= 8 \\ f''_{yy} &= 20 \end{aligned}\right. \quad \text{takže } \triangle(M) = \begin{vmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 20 \end{vmatrix} > 0, f''_{xx} > 0$$

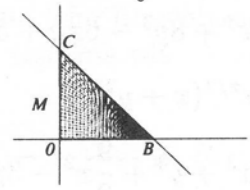
$$\text{a } f(M) = \frac{27}{2} \text{ je lokální minimum.}$$

■

• Určete **globální (absolutní)** extrémy funkce $z = f(x,y)$ na množině M :

***Příklad* 224**. $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - x - y,\ M = \{[x,y] \in E_2 : x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

Řešení : **1)** určíme stacionární body na M a jejich funkční hodnoty :



$$\left.\begin{array}{l} f'_x \equiv 2x + y - 1 = 0 \\ f'_y \equiv 2y + x - 1 = 0 \end{array}\right\} \ x = y = \frac{1}{3} \longrightarrow$$

$$A_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right] \in M, \quad f(A_1) = -\frac{1}{3}\,;$$

2) určíme stacionární body na jednotlivých stranách $\triangle\ OBC$

$$OB : y = 0 \longrightarrow\ h_1(x) = x^2 - x,\ h'_1(x) = 2x - 1 = 0 \quad \longrightarrow x = \frac{1}{2},$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 0\right] \in M,\ f(A_2) = -\frac{1}{4},$$

$$OC : x = 0 \longrightarrow\ h_2(y) = y^2 - y,\ h'_2(y) = 2y - 1 = 0 \quad \longrightarrow y = \frac{1}{2},$$

$$A_3 = \left[0, \frac{1}{2}\right] \in M,\ f(A_3) = -\frac{1}{4},$$

$$BC : y = 1 - x \longrightarrow h_3(x) = x^2 + (1-x)^2 + x(1-x) - x - 1 + x = -x^2 - x,$$

$$h'_3(x) = -2x - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = -\frac{1}{2},\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \notin M\ ;$$

3) určíme hodnoty funkce $f(x,y)$ ve vrcholech O, B, C

$$f(O) = f(0,0) = 0, \quad f(B) = f(1,0) = 0, \quad f(C) = f(0,1) = 0.$$

Ze všech spočítaných funkčních hodnot vybereme nejmenší a největší . Globální maximum nastává v bodech $O, B, C,\ f_{\max}(O) = f_{\max}(B) = f_{\max}(C) = 0$ a podobně globální minimum v bodě $A_1,\ f_{\min}(A_1) = -\dfrac{1}{3}$. ■

***Příklad* 225**. $z = x^2 + y^2 - 6x + 6y,\ M = \{[x,y] \in E_2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Řešení :

$$\mathbf{1)} \left\{\begin{array}{l} z'_x = 2x - 6 = 0 \longrightarrow x_1 = 3 \\ z'_y = 2y + 6 \quad\ \longrightarrow y_1 = -3 \end{array}\right. \quad \longrightarrow \quad A = [3, -3], \quad A \notin M.$$

2) Body na hranici množiny M zapíšeme v parametrickém tvaru $\left\{\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array}\right\}$.

Pak postupně $z = 4 - 12\cos t + 12\sin t, \quad \dfrac{dz}{dt} = 12\sin t + 12\cos t = 0,$

$$\sin t = -\cos t, \qquad t_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad t_2 = \frac{7}{4}\pi,$$

$t_1 = \dfrac{3}{4}\pi \longrightarrow B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}], \quad z(B) = 4 + 12\sqrt{2}$ je globální maximum a

$t_2 = \dfrac{7}{4}\pi \longrightarrow C = [\sqrt{2}, -\sqrt{2}], \quad z(C) = 4 - 12\sqrt{2}$ je globální minimum.

■

• Určete lokální extrémy funkce :

226. $z = \ln(xy) + x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7$

$$\left[\begin{array}{r} \text{lok.max. v bodě } A_1 = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \text{lok.min. v bodě } A_2 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ \text{další stac.b. } A_3 = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ A_4 = \left[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \end{array}\right]$$

227. $z = x^2 + y - x\sqrt{y} - 6x + 12$ $[z_{\min}(4,4) = 0]$

228. $z = x^2 + y^2 + 6x - 4y$ $[z_{\min}(-3,2) = -13]$

229. $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$ $[z_{\max}(0,0) = 0]$

230. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ $\left[z_{\min}\left(1, \frac{1}{2}\right) = 4, \text{ v bodě } [0,0] \text{ neex.extrém}\right]$

231. $z = e^{x/2}(x + y^2)$ $\left[z_{\min}(-2,0) = -\frac{2}{e}\right]$

232. $z = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 - 3y - 12x$ $\left[z_{\min}(1,1) = -\frac{17}{2}, z_{\max}(-4,-1) = 58 \text{ v bodech} [1,-1], [-4,1] \text{ neex.extrém}\right]$

233. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z + 13 = 0$ $[z_{\min}(2,-3) = 0, \ z_{\max}(2,-3) = 2]$

234. $x^2 + xy - z^2 + z + y + 5 = 0$ [ve stac.bodech $[-1,2,3]$, $[-1,2,-2]$ neex.extrémy]

235. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6z$ $[f(2,-1,-3)) = -14, \text{ lok.min.}]$

236. $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^3 - 12yz - 6x$ [$f(3,36,12) = -873$, lok.min., v bodě $[3,0,0]$ neex.extrém]

• Určete globální extrémy funkce $z = f(x,y)$ na množině M :

237. $f(x,y) = xy(x-a)(y-b)$, $M = \{[x,y] \in E_2 : 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le b\}$

[glob.max. $f(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) = \frac{a^2b^2}{16}$
glob.min. $f(0,0) = f(a,0) = f(0,b) = f(a,b) = 0$]

238. $f(x,y) = xy(2 - x - y)$, $M = \{[x,y] \in E_2 : x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 1\}$

[glob.max. $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$
glob.min. $f(x,0) = f(0,y) = 0$]

239. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, $M = \{[x,y] \in E_2 : |x| + |y| \le 1\}$

[glob.min. $f(0,0) = 0$
glob.max. $f(1,0) = f(0,1) =$
$= f(-1,0) = f(0,-1) = 1$]

240. $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1)$, $M = \{[x,y] \in E_2 : x \le 0, \ y \ge 0, x - y + 3 \ge 0\}$

[glob.min. $f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{5}{4}$
glob.max. $f(0,3) = 11$]

241. $f(x,y) = x^2 + y$, $M = \{[x,y] \in E_2 : x \ge 0, \ y \ge 0, \ x + y \le 6\}$

[glob.min. $f(0,0) = 0$
glob.max. $f(6,0) = 36$]

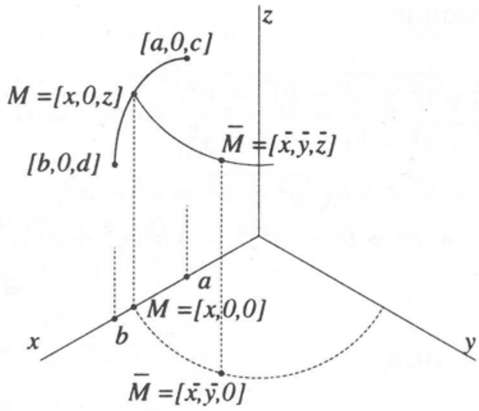
242. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $M = \{[x,y] \in E_2 : x^2 + y^2 \le 4\}$

[glob.min. $f(0,\pm 2) = -4$
glob.max. $f(\pm 2, 0) = 4$]

II.12. Rotační plochy

***Příklad* 243**. Oblouk křivky m (tzv. **meridián**) $f(x,z) = 0$, $y = 0$, odpovídající $x \in \langle a, b \rangle$, $(0 \le a < b)$ rotuje kolem osy z. Napište rovnici této rotační plochy.

Řešení :



Zvolíme libovolný bod M ležící na křivce m : $f(x,z)=0,\ y=0$, který při rotaci kolem osy z opíše kružnici o poloměru x v rovině kolmé k ose z. Označme jeho libovolnou otočenou polohu $\overline{M}$ a zapišme vše v souřadnicích :

$$M=[x,0,z]\longrightarrow \overline{M}=[\overline{x},\overline{y},\overline{z}],$$

$$\overline{z}=z,\ \overline{x}^2+\overline{y}^2=x^2\longrightarrow x=\pm\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2}.$$

Otočíme-li celý oblouk, pak platí $f(\pm\sqrt{\overline{x}^2+\overline{y}^2},\overline{z})=0$ a po vynechání pruhů obdržíme rovnici hledané rotační plochy

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0\quad (a^2\le x^2+y^2\le b^2).$$

Otočíme-li oblouk $f(x,z)=0,\ y=0,\ 0\le c\le z\le d$ kolem osy x, pak analogickým způsobem odvodíme plochu

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0\quad (c^2\le y^2+z^2\le d^2).$$

Rotací stejného oblouku kolem osy y vznikne mezikruží v rovině (xz). Nyní sestavíme formální tabulku křivek a ploch :

křivka	**osa rotace**	**rotační plocha**
$f(x,z)=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$
$y=0$	x	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$f(x,y)=0$	x	$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$z=0$	y	$f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$
$f(y,z)=0$	y	$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
$x=0$	z	$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

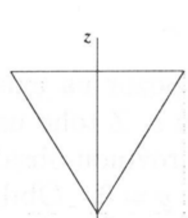
■

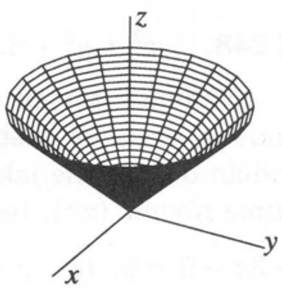
• Napište rovnici rotační plochy, která vznikne rotací křivky m kolem osy o :

***Příklad* 244.** $m:\ z=kx,\ y=0,\quad o:$ osa $z,\quad x\in\langle 0,a\rangle$

Řešení :

Víme, že vznikne **rotační kuželová plocha**.
$z=k(\pm\sqrt{x^2+y^2})\longrightarrow$
$z^2=k^2(x^2+y^2)$, kde
$0\le x^2+y^2\le a^2$

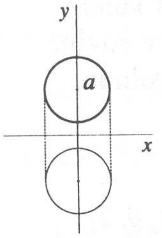


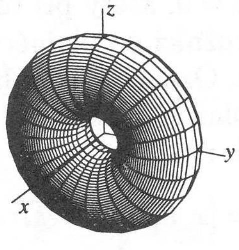


■

***Příklad* 245.** $m:\ x^2+(y-b)^2=a^2,\ z=0,\quad b>a>0,\quad o:$ osa x

Řešení : Kružnice, rotující kolem přímky ležící ve stejné rovině a neprotínající danou přímku vytvoří tzv. **anuloid**, jehož rovnici odvodíme :





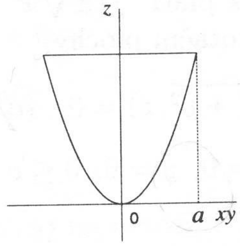
$$x^2 + (\pm\sqrt{y^2+z^2} - b)^2 = a^2,$$
$$(\pm\sqrt{y^2+z^2} - b)^2 = a^2 - x^2,$$
$$y^2 + z^2 + b^2 \mp 2b\sqrt{y^2+z^2} = a^2 - x^2,$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(y^2 + z^2).$$

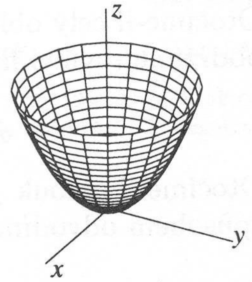
■

***Příklad* 246.** $m : z = kx^2,\ y = 0, \quad o :$ osa $z, \quad x \in \langle 0, a\rangle$

Řešení : Plocha je **rotačním paraboloidem**

$$z = k(x^2 + y^2),\ 0 \le x^2 + y^2 \le a^2$$

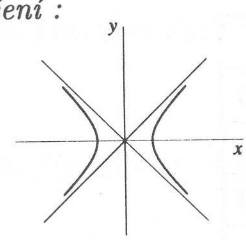




■

***Příklad* 247.** $m : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0, \quad o_1 :$ osa $x, \quad o_2 :$ osa y

Řešení :

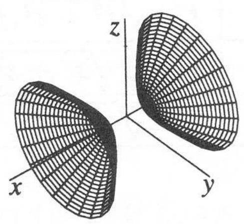


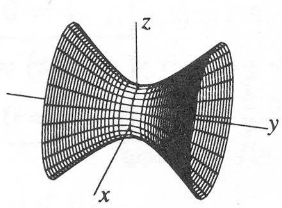
Rotací hyperboly kolem hlavní osy x vznikne **hyperboloid dvoudílný**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

Roztočíme-li tutéž hyperbolu kolem vedlejší osy y, dostaneme **hyperboloid jednodílný**

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$





■

- Je-li dána rotační plocha rovnicí $F(x, y, z) = 0$, určete osu rotace a meridián plochy.

***Příklad* 248.** $x^2 + y^2 + 3z - 9 = 0$

Řešení : Zvolíme-li rovinu $z =$ konst. (pozor na existenci řezu), pak řez plochy touto rovinou je kružnice se středem na ose z. Z toho usoudíme, že osa rotace je osa z. Meridián dostaneme jako řez plochy rovinou obsahující osu rotace.
Zvolíme rovinu (xz), tedy dosadíme $y = 0$. Obdržíme meridián
$x^2 + 3z - 9 = 0,\ tj.\quad z = 3 - \dfrac{x^2}{3}$, což je v rovině $y = 0$ parabola s vrcholem v bodě $V = [0, 0, 3]$. Daná plocha je **rotační paraboloid**, osa z je osou rotace. ■

***Příklad* 249.** $y^2+z^2-x^2+4x-4=0$

Řešení : $y^2+z^2=k^2 \longrightarrow$ osa rotace je osa x. Zvolíme $z=0$ (řez rovinou (xy)) : $y^2=(x-2)^2 \longrightarrow y=\pm(x-2)$. Meridián je přímka $y=x-2$ v rovině $z=0$. Daná plocha je **rotační kužel** s vrcholem $V=[2,0,0]$, osa x je osou rotace. ■

250. $x^2+y^2+z^3-8=0$ [osa z, $z=\sqrt[3]{8-x^2}$]

251. $4y^2+4z^2=x^2+1$ [osa x, $4y^2-x^2=1$, jednodílný rot.hyperboloid]

252. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ [osa y; $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$, rot.elipsoid]

253. $x^2=y^2+z^2$ [osa x, $y=x$, rotační kužel]

• Napište rovnici rotační plochy, znáte-li meridián m a osu rotace o :

254. $m:\ 2z=x,\ y=0,\ x\in\langle 0,4\rangle,\ o:$ osa x, $[4(y^2+z^2)=x^2]$

255. $m:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},\ z=0$ **(asterioda)** , $o:$ osa x $[x^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{y^2+z^2}=a^{\frac{2}{3}}]$

256. $m:\ z=y+4,\ x=0,\ o:$ osa z $[(z-4)^2=x^2+y^2]$

257. $m:\ x=1+2y^2,\ z=0,\ o:$ osa x $[x=1+2(y^2+z^2)]$

III. Dvojný a trojný integrál

III.1. Existence

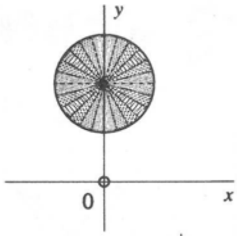
***Příklad* 258.** Rozhodněte, zda daný integrál $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ existuje, jestliže :

a) $D: x^2+(y-1)^2 \le \dfrac{1}{4}$;
b) $D: x^2+y^2 \le 1$;
c) $D: x^2+(y-1)^2 \le 2$.

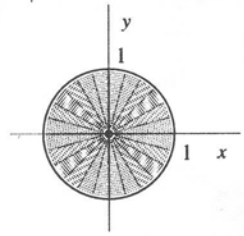
Řešení : Budeme vycházet z toho, že dvojný a trojný integrál je definován pouze pro funkce omezené na D a dále budeme používat větu o existenci:

Nechť D je měřitelná (v Jordanově smyslu) množina v E_2 (resp. E_3) a funkce f je omezená na D. Nechť množina bodů nespojitosti funkce f v D má míru 0. Potom f je integrovatelná v D, tj. integrál

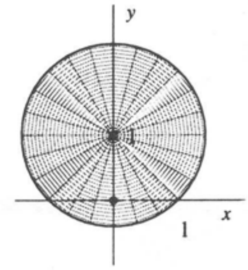
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{(resp. } \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz) \qquad \textit{existuje.}$$

a) 

Množina D je měřitelná (je omezená a její hranice má míru 0) a $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ je spojitá a omezená na D. Integrál existuje.

b) 

Množina D je měřitelná, ale $f(x,y)$ není omezená v D, protože $[0,0] \in D$ a $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty$. Integrál neexistuje.

c) 

$f(x,y)$ opět není omezená na D $([0,0] \in D)$, integrál neexistuje.

■

***Příklad* 259.** Je dána množina $D: x^2+y^2 \le 4$. Vyšetřete, zda existují integrály :

a) $\displaystyle\iint_D \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$, b) $\displaystyle\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, c) $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$,

d) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{1+xy}\,dx\,dy$, e) $\displaystyle\iint_D \frac{e^{xy}-1}{xy}\,dx\,dy$, f) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$.

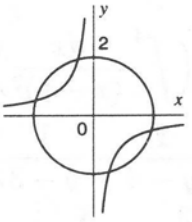
Řešení :

a) existuje, $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1,$

b) neexistuje, $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x}{x^2+y^2} = \infty,$

c) existuje, $\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ je spojitá v celém E_2,

d) neexistuje, protože např. $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \left|\dfrac{1}{1+xy}\right| = \infty,$



e) existuje, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{xk}-1}{xk} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^{yk}-1}{yk} = 1,$ kde $k \in \langle -2, 2\rangle$

f) neexistuje, protože např. $\lim\limits_{[x,y]\to[1,-1]} \dfrac{1}{(x+y)^2} = \infty.$

■

***Příklad* 260**. Vyšetřete, zda existují integrály :

a) $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+z)^3},\quad W: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 0,\ -2 \le z \le 2,$

b) $\displaystyle\iiint_W (x+yz)\,dx\,dy\,dz,\quad W: x^2 \le y \le 2,\ z \ge 3,$

c) $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{x^2+y^2+z^2-9}\,dx\,dy\,dz,\quad W: 1 < x^2+y^2+z^2 < 4.$

Řešení :

a) neexistuje, protože funkce $\dfrac{1}{(1+x+z)^3}$ není omezená v W, $\{1+x+z=0\}\cap W \ne \emptyset$,

b) neexistuje, protože W není měřitelná v E_3,

c) existuje, $x^2+y^2+z^2-9 \ne 0$ v W. ■

III.2. Fubiniova věta pro dvojný integrál

• Vypočítejte dvojné integrály na daných obdélníkových množinách :

***Příklad* 261**. $I = \displaystyle\iint_D y^2 \sin^2 x\,dx\,dy,\quad D: 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 1 \le y \le 2$

Řešení : $\displaystyle I = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx \cdot \int_1^2 y^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \cdot \left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2 =$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{7}{3} = \frac{7\pi}{12}.$ ■

***Příklad* 262**. $I = \displaystyle\iint_D \frac{xye^{x^2}}{y^2+3}\,dx\,dy,\quad D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$

Řešení :

$\displaystyle I = \int_0^2 xe^{x^2}\,dx \cdot \int_0^3 \frac{y}{y^2+3}\,dy = \left[\begin{array}{c} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \end{array}\right] = \frac{1}{2}\int_0^4 e^t\,dt \cdot \frac{1}{2}\Big[\ln|y^2+3|\Big]_0^3 =$

$$= \frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^4 \cdot \frac{1}{2}\Big(\ln 12 - \ln 3\Big) = \frac{1}{2}(e^4-1)\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{12}{3} = \frac{1}{4}(e^4-1)\ln 4 = \frac{1}{2}(e^4-1)\ln 2.$$

■

***Příklad* 263.** $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2-2xy+y^2}, \quad D: 3 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^2 \Big(\int_3^4 \frac{dx}{(x-y)^2}\Big)\,dy = \int_0^2 \Big[\frac{-1}{x-y}\Big]_3^4 dy = \int_0^2 \Big(\frac{-1}{4-y} + \frac{1}{3-y}\Big)\,dy =$$
$$= \int_0^2 \Big(\frac{1}{y-4} - \frac{1}{y-3}\Big)\,dy = \Big[\ln|y-4| - \ln|y-3|\Big]_0^2 = \ln 2 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 3 =$$
$$= \ln\frac{2\cdot 3}{4} = \ln\frac{3}{2}.$$

■

***Příklad* 264.** $I = \displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x-2y+3)^2}, \quad D: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$

Řešení :

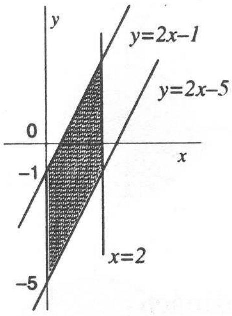
$$I = \int_0^1 \Big[\frac{-1}{x-2y+3}\Big]_0^2 dy = \int_0^1 \Big(\frac{-1}{5-2y} + \frac{1}{3-2y}\Big)\,dy = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2y-5} - \frac{1}{2y-3}\Big)\,dy =$$
$$= \Big[\frac{1}{2}\ln|2y-5| - \frac{1}{2}\ln|2y-3|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}.$$

■

• Množina D je omezená zadanými křivkami. Načrtněte ji a popište pomocí nerovnic.

***Příklad* 265.** $2x - y = 1,\ 2x - y = 5,\ x = 0,\ x = 2$

Řešení :



$↑$

$$D: \begin{cases} 2x-5 \le y \le 2x-1 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

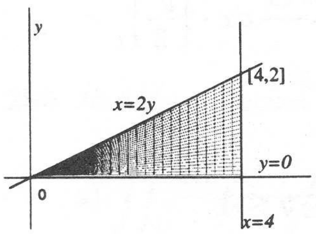
$↑$ Šipka označuje možný směr vnitřní integrace při výpočtu dvojného integrálu na D pomocí Fubiniovy věty.

■

***Příklad* 266.** $y = 0,\ x = 2y,\ x = 4$

Řešení :

$\rightarrow$



$↑$

1) $↑$
$$D: \begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{x}{2} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

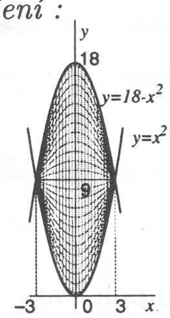
nebo

2) $\rightarrow$
$$D: \begin{cases} 2y \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

■

***Příklad* 267.** $y = 18 - x^2,\ y = x^2$

Řešení :



$$18 - x^2 = x^2 \longrightarrow x^2 = 9 \longrightarrow x_{1,2} = \pm 3$$

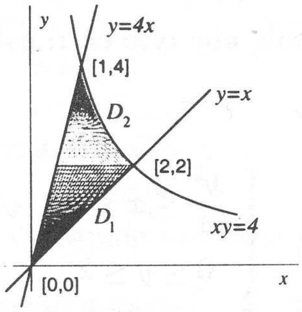
$$\uparrow \qquad D : \begin{cases} x^2 \le y \le 18 - x^2 \\ -3 \le x \le 3 \end{cases}$$

■

Příklad 268. $xy = 4, \ y = x, \ y = 4x, \ (x \ge 0)$

Řešení :

$\rightarrow$



$$D = D_1 \cup D_2$$

$\rightarrow$

$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{y}{4} \le x \le y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} \dfrac{y}{4} \le x \le \dfrac{4}{y} \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

■

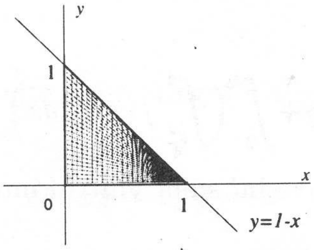
• Zaměňte pořadí integrace :

Příklad 269. $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} f(x,y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \rightarrow$$

$\uparrow$



$\uparrow$

$$2) \begin{cases} 0 \le x \le 1 - y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-y} f(x,y)\, dx \Big)\, dy.$$

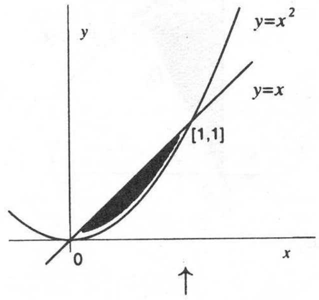
■

Příklad 270. $I = \displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\, dy \Big)\, dx$

Řešení :

$$1) \begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \rightarrow$$

$\uparrow$



$\uparrow$

$$2) \begin{cases} y \le x \le \sqrt{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$\rightarrow$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$ ■

***Příklad* 271.** $I = \int_0^4 \Big(\int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$

Řešení :

$$1)\begin{cases} \sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

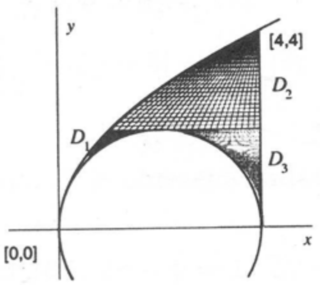
$\uparrow$

Množina D je omezená křivkami :
$y = \sqrt{4x - x^2}$, což je rovnice horní poloviny kružnice $(x-2)^2 + y^2 = 4$,
$y = \sqrt{4x}$, což je rovnice horní větve paraboly $y^2 = 4x$,
$x = 4, \quad x = 0.$

2) Ve směru osy x rozdělíme množinu D na tři části tak, aby tyto části byly elementárními množinami.

$\rightarrow \qquad D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

$\rightarrow$



$$D_1 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} \le x \le 2 - \sqrt{4-y^2} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} \dfrac{y^2}{4} \le x \le 4 \\ 2 \le y \le 4 \end{cases}$$

$$D_3 : \begin{cases} 2 + \sqrt{4-y^2} \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$\uparrow$

$$I = \int_0^2 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_2^4 \Big(\int_{\frac{y^2}{4}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_0^2 \Big(\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{4} f(x,y)\,dx \Big)\,dy.$$

Tento příklad ukazuje, že původní směr vnitřní integrace byl mnohem výhodnější. ■

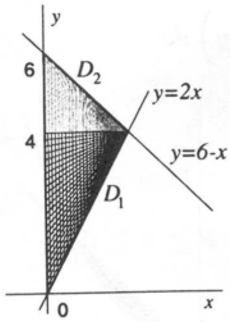
***Příklad* 272.** $I = \int_0^4 \Big(\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy + \int_4^6 \Big(\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx \Big)\,dy$

Řešení :

$D = D_1 \cup D_2$

$$D_1 : \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{y}{2} \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

$$D_2 : \begin{cases} 0 \le x \le 6 - y \\ 4 \le y \le 6 \end{cases}$$



Nový směr vnitřní integrace dovoluje vyjádřit celou množinu D bez předcházejícího dělení :

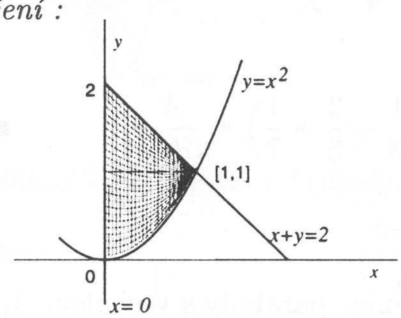
$$D : \begin{cases} 2x \le y \le 6 - x \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

$$I = \int_0^2 \Big(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy \Big)\,dx.$$ ■

• Rozložte pomocí Fubiniovy věty dvojný integrál $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ na dvojnásobné integrály, jestliže množina $D \subset E_2$ je omezená křivkami :

***Příklad* 273.** $x = 0,\ y = x^2,\ x + y = 2\ (x \geq 0)$

Řešení :

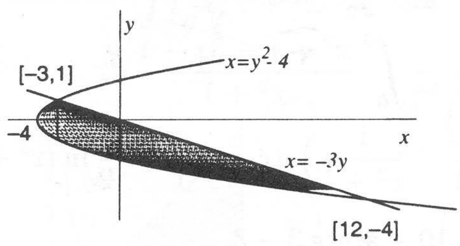


$$\int_0^1 \Big(\int_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy\Big)\,dx =$$
$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy + \int_1^2 \Big(\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$$

■

***Příklad* 274.** $x = y^2 - 4,\ x = -3y$

Řešení : Vyřešením soustavy $\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = -3y \end{cases}$ dostaneme průsečíky paraboly $x = y^2 - 4$ s přímkou o rovnici $x = -3y$.



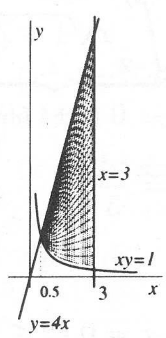
$$\int_{-4}^1 \Big(\int_{y^2-4}^{-3y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy =$$
$$= \int_{-4}^{-3} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{\sqrt{x+4}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx +$$
$$+ \int_{-3}^{12} \Big(\int_{-\sqrt{x+4}}^{-\frac{x}{3}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx.$$

■

• Načrtněte množinu D a vypočítejte dané integrály :

***Příklad* 275.** $I = \iint_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy, \quad D : xy = 1,\ y = 4x,\ x = 3$

Řešení :

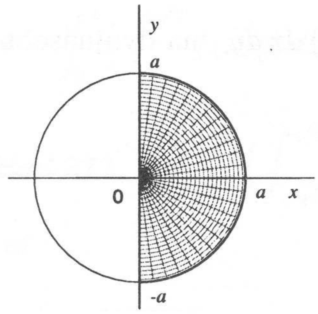


$$\int_{1/2}^3 \Big(\int_{1/x}^{4x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_{1/2}^3 x^2\Big[-\frac{1}{y}\Big]_{1/x}^{4x}\,dx =$$
$$= \int_{1/2}^3 x^2\Big(-\frac{1}{4x} + x\Big)\,dx = \int_{1/2}^3 \Big(x^3 - \frac{x}{4}\Big)\,dx =$$
$$= \Big[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{8}\Big]_{1/2}^3 = \frac{1225}{64}.$$

■

***Příklad* 276.** $I = \iint_D x^3y^2\,dx\,dy, \quad D : x^2 + y^2 = a^2,\ x = 0\ (x \geq 0)$

Řešení :



$$\int_{-a}^{a}\Big(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x^3y^2\,dx\Big)\,dy = \int_{-a}^{a} y^2\Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy =$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{y^2}{4}(a^2-y^2)^2\,dy = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^a y^2(a^4-2a^2y^2+y^4)\,dy =$$

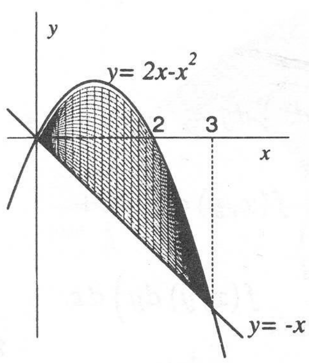
$$= \frac{1}{2}\Big[a^4\frac{y^3}{3} - 2a^2\frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7}\Big]_0^a = \frac{1}{2}a^7\Big(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\Big) = \frac{4}{105}a^7. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 277**. $I = \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+1}, \quad D: y = 2x - x^2,\ y = -x$

Řešení : $y = 2x - x^2$ neboli $\quad y - 1 = -(x-1)^2$ je rovnice paraboly s vrcholem $[1, 1]$.

Průsečíky paraboly s přímkou $y = -x$ najdeme tak, že zjistíme jejich x-ové souřadnice :

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \quad \text{po dosazení} \quad \begin{aligned} -x = 2x - x^2 \ &\longrightarrow \ x(x-3) = 0 \\ &\longrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3 \end{aligned}$$



$$\int_0^3\Big(\int_{-x}^{2x-x^2}\frac{dy}{x^2+1}\Big)\,dx = \int_0^3 \frac{1}{x^2+1}(2x-x^2+x)\,dx =$$

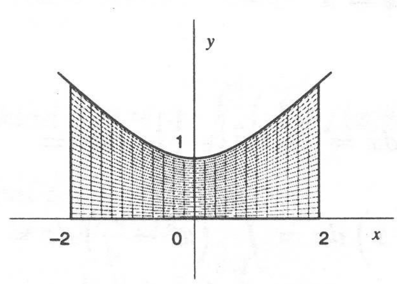
$$= \int_0^3 \frac{-x^2+3x}{x^2+1}\,dx = -\int_0^3 \frac{x^2+1-3x-1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= -\int_0^3\Big(1 - 3\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\Big)\,dx = -\Big[x - \frac{3}{2}\ln|x^2+1| -$$

$$-\operatorname{arctg} x\Big]_0^3 = \frac{3}{2}\ln 10 + \operatorname{arctg} 3 - 3. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 278**. $I = \iint_D (x+y)\,dx\,dy, \quad D: y^2 - x^2 \le 1,\ y \ge 0,\ x \in \langle -2, 2\rangle$

Řešení : $y^2 - x^2 = 1$ je rovnice hyperboly .



$$\int_{-2}^{2}\Big(\int_0^{\sqrt{1+x^2}}(x+y)\,dy\Big)\,dx = \int_{-2}^{2}\Big[xy + \frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

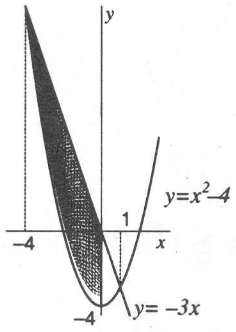
$$= \int_{-2}^{2}\Big(x\sqrt{1+x^2} + \frac{1+x^2}{2}\Big)\,dx = \underbrace{\int_{-2}^{2} x\sqrt{1+x^2}\,dx}_{=\ 0\ (\text{lichá funkce})} +$$

$$+\frac{2}{2}\int_0^2 \underbrace{(1+x^2)}_{\text{sudá funkce}}\,dx = \Big[x + \frac{x^3}{3}\Big]_0^2 = \frac{14}{3}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 279**. $I = \iint_D (1+x)\,y\,dx\,dy, \quad D: y = x^2 - 4,\ y = -3x,\ x = 0\ (x \le 0)$

Řešení : Stanovíme x-ové souřadnice průsečíků paraboly s přímkou :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = -3x \end{cases} . \quad \text{Po dosazení} \quad \begin{aligned} x^2 + 3x - 4 = 0 \\ x_1 = 1, x_2 = -4 \end{aligned}$$

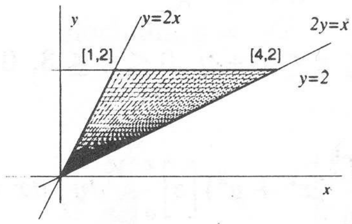


$$\int_{-4}^{0}\Big(\int_{x^2-4}^{-3x}(1+x)y\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(1+x)\Big[y^2\Big]_{x^2-4}^{-3x}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(1+x)(9x^2-(x^2-4)^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-4}^{0}(-x^5-x^4+$$
$$+17x^3+17x^2-16x-16)\,dx = \frac{1}{2}\Big[-\frac{x^6}{6}-\frac{x^5}{5}+\frac{17x^4}{4}+$$
$$+\frac{17x^3}{3}-8x^2-16x\Big]_{-4}^{0} = \frac{-1376}{15}.$$

■

***Příklad* 280.** $\iint_D (x+1)\,dx\,dy, \quad D: y=2x,\ 2y=x,\ y=2$

Řešení :

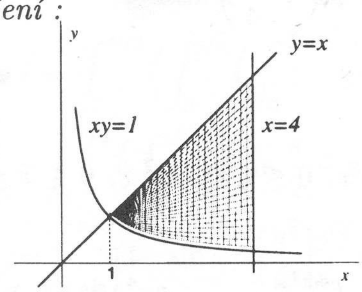


$$\int_0^2\Big(\int_{y/2}^{2y}(x+1)\,dx\Big)\,dy = \cdots = 8.$$

■

***Příklad* 281.** $\iint_D \frac{1}{y}\,dx\,dy, \quad D: xy=1,\ y=x,\ x=4\ (x\geq 0)$

Řešení :



$$\int_1^4\Big(\int_{1/x}^{x}\frac{1}{y}\,dy\Big)\,dx = \int_1^4\Big[\ln|y|\Big]_{1/x}^{x}dx =$$
$$= \int_1^4\Big(\ln x - \ln\frac{1}{x}\Big)\,dx = 2\int_1^4 \ln x\,dx = \text{(per partes)}$$
$$= \left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & v'=1 \\ u'=\frac{1}{x}, & v=x\end{array}\right| = 2\Big[x\ln x - x\Big]_1^4 = 8\ln 4 - 6.$$

■

282. $\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y)^2}, \quad D: x=3,\ x=4,\ y=1,\ y=2$ $\quad\left[\ln\frac{25}{24}\right]$

283. $\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=\pi,\ y=x$ $\quad[-2]$

284. $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy, \quad D: y=0,\ y=1-x,\ y=1+x$ $\quad\left[\frac{1}{3}\right]$

285. $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy, \quad D: x=y^2-4,\ x=5$ $\quad[50,4]$

286. $\iint_D xy\,dx\,dy, \quad D: y=x-4,\ y^2=2x$ $\quad[90]$

287. $\iint_D \frac{1}{y+1}\,dx\,dy, \quad D: x=0,\ y=2,\ y=4,\ y^2=x$ $\quad\left[4+\ln\frac{5}{3}\right]$

288. $\iint_D \frac{x}{y^2}\,dx\,dy, \quad D: y^2=x,\ y^2=4x,\ y=2$ $\quad\left[\frac{5}{4}\right]$

289. $\iint_D (xy+y)\,dx\,dy, \quad D: x=1,\ x=2,\ xy=4,\ y=0$ $\quad\left[4+8\ln 2\right]$

III.3. Fubiniova věta pro trojný integrál

• Vypočítejte trojné integrály na daných množinách $W \subset E_3$:

***Příklad* 290.** $I = \iiint_W \frac{x}{y}(z+1)^2\,dx\,dy\,dz; \quad W: 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le e^2,\ 0 \le z \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_1^{e^2} \frac{1}{y}\,dy \cdot \int_0^2 (z+1)^2\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 \cdot \Big[\ln|y|\Big]_1^{e^2} \cdot \Big[\frac{(z+1)^3}{3}\Big]_0^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(9-\frac{1}{3}) = \frac{26}{3}.$$ ∎

***Příklad* 291.** $I = \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz; \quad W: 0 \le z \le x+y,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 2$

Řešení :

$$I = \int_0^2 \Big(\int_0^3 \Big(\int_0^{x+y} (x^2+y^2)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^2+y^2)\Big[z\Big]_0^{x+y} dy\Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^2+y^2)(x+y)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^3+x^2y+xy^2+y^3)\,dy\Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \Big[x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\Big]_0^3 dx = \int_0^2 \Big(3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x + \frac{81}{4}\Big)\,dx =$$
$$= \Big[\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{4}x\Big]_0^2 = \frac{165}{2}.$$ ∎

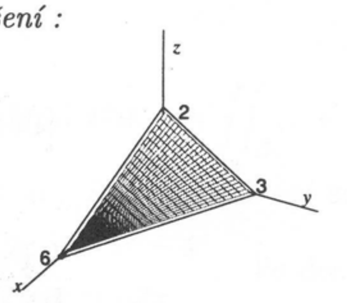
***Příklad* 292.** $I = \iiint_W z^3 y \sin x\,dx\,dy\,dz; \ W: 0 \le z \le \sin x,\ 0 \le y \le \sin^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

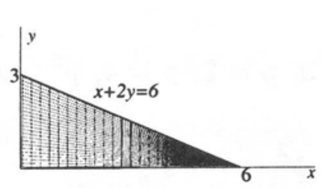
Řešení :

$$I = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} \Big(\int_0^{\sin x} y \sin x \cdot z^3\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} y \sin x \cdot \Big[\frac{z^4}{4}\Big]_0^{\sin x} dy\Big)\,dx =$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} y \sin^5 x\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cdot \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sin^2 x} dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^9 x\,dx =$$
$$\text{(podle Wallisovy formule viz př. 29)} = \frac{1}{8}\cdot\frac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\cdot 1 = \frac{16}{315}.$$ ∎

***Příklad* 293.** Vypočítejte $\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+3z)^3}$, kde W je čtyřstěn omezený rovinami $x+2y+3z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Řešení :





$$0 \le z \le \frac{6-x-2y}{3}$$
$$0 \le y \le \frac{6-x}{2}$$
$$0 \le x \le 6$$

$$I=\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}}\frac{1}{(1+3z)^3}\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{3}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big[\frac{-1}{2(1+3y)^2}\Big]_0^{\frac{6-x-2y}{3}}\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(\frac{-1}{2(7-x-2y)^2}+\frac{1}{2}\Big)\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{6}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(1-\frac{1}{(7-x-2y)^2}\Big)\,dy\Big)\,dx=$$

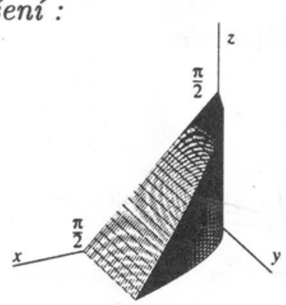
$$=\frac{1}{6}\int_0^6\Big[y-\frac{1}{2(7-x-2y)}\Big]_0^{\frac{6-x}{2}}\,dx=\frac{1}{6}\int_0^6\Big(\frac{6-x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(7-x)}\Big)\,dx=$$

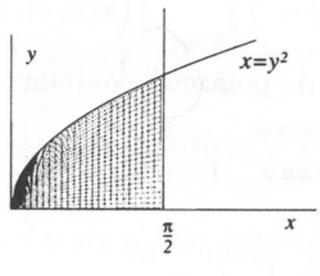
$$=\frac{1}{12}\int_0^6\Big(5-x-\frac{1}{x-7}\Big)\,dx=\frac{1}{12}\Big[5x-\frac{x^2}{2}-\ln|x-7|\Big]_0^6=\frac{12+\ln 7}{12}=1+\frac{\ln 7}{12}.$$

■

***Příklad* 294.** Vypočítejte $\iiint_W y\cdot\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz$, kde množina W je omezená plochami $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Řešení :





$$0\le z\le\frac{\pi}{2}-x$$
$$0\le y\le\sqrt{x}$$
$$0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cdot\cos(x+z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y\Big[\sin(x+z)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-x}\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y\Big(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\Big)\,dy\Big)\,dx=\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\sin x)\,dy\Big)\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)\cdot\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\sin x)x\,dx=\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\pi/2}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}x\sin x\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}u=x, & v'=\sin x\\ u'=1, & v=-\cos x\end{array}\right|=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\Big[-x\cos x+\sin x\Big]_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

■

• Vypočítejte integrály na daných množinách W :

295. $\iiint_W(x+y+z)\,dx\,dy\,dz,\quad W: x=1,\ y=0,\ y=x,\ z=0,\ z=\sqrt{2}$ $\quad\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

296. $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz,\quad W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=xy,\ x+y=1$ $\quad\left[\frac{1}{60}\right]$

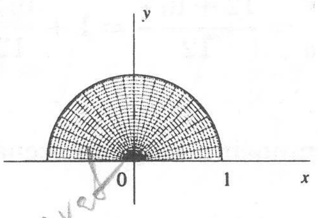
297. $\iiint_W x^2yz^3\,dx\,dy\,dz,\quad W: z=xy,\ y=x,\ y=1,\ z=0$ $\quad\left[\frac{1}{364}\right]$

298. $\iiint_W(x+y)\,dx\,dy\,dz,\quad W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x=a,\ y=a,\ z=a^2-x^2-y^2$ $\quad\left[\frac{a^5}{6}\right]$

299. $\iiint_W xz\,dx\,dy\,dz,\quad W: x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=1,\ z=x^2+y^2+1$ $\quad\left[\frac{7}{120}\right]$

***Příklad* 300.** Rozhodněte, zda integrál $\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy$, kde $D = \{[x,y] \in E_2 : x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\}$ existuje a v kladném případě jej spočítejte.

Řešení : $x \neq 0$



Funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ je nespojitá na ose y (tj. $x = 0$). Nicméně, množina D je měřitelná a funkce f je na D omezená, neboť
$|\operatorname{arctg}\frac{y}{x}| \le \frac{\pi}{2}$ pro všechny body $[x,y] \in E_2$.
Proto daný integrál existuje. Víme, že

neodhasovat ne míň

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{B(u,v)} f\Big(x(u,v), y(u,v)\Big)|J|\,du\,dv.$$

Zde použijeme transformaci do polárních souřadnic.

$$\iint_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le \pi \\ J = r & & \end{array}\right] = \int_0^\pi \Big(\int_0^1 \varphi \cdot r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi \varphi\,d\varphi \cdot \int_0^1 r\,dr = \left[\frac{\varphi^2}{2}\right]_0^\pi \cdot \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{\cancel{4}\ 16} \qquad \blacksquare$$

• Vypočítejte integrály :

***Příklad* 301.** $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\ D = \{[x,y] \in E_2 : x^2 + y^2 - bx \le 0\},\ b > 0$

Řešení :

$$D : \Big(x - \frac{b}{2}\Big)^2 + y^2 \le \frac{b^2}{4}$$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \left[\begin{array}{lcc} x = r\cos\varphi & & x^2 + y^2 \le bx \longrightarrow r^2 \le br\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi & | & 0 \le r \le b\cos\varphi \longrightarrow \cos\varphi \ge 0 \\ J = r & & -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_0^{b\cos\varphi} r \cdot r\,dr\Big)\,d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{b\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} b^3\cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}b^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{2}{3}b^3 \cdot \frac{2}{3\cdot 1} \cdot 1 = \frac{4}{9}b^3. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 302.** $\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2)\,dx\,dy,\ D : x^2 + y^2 \le a^2,\ x \le 0$

Řešení :

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ccc} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & \mid & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{3\pi}{2} \\ J = r & & \end{array}\right] =$$

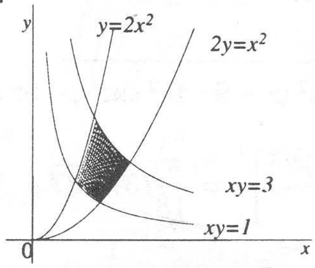
$$= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^a \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \cdot \int_0^a \ln(1+r^2) r\,dr = \left[\begin{array}{c} 1+r^2 = t \\ 2r\,dr = dt \end{array}\right] =$$

$$= \pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_1^{1+a^2} \ln t\,dt = \frac{\pi}{2}\Big[t\ln t - t\Big]_1^{1+a^2} = \frac{\pi}{2}\{(1+a^2)\ln(1+a^2)+1\}.$$
$- a^2$

■

***Příklad* 303.** $\iint_D x^3\,dx\,dy$, kde D je množina ohraničená křivkami $xy=1$, $xy=3$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=2x^2$.

Řešení :



Použijeme transformaci $\left\{\begin{array}{l} xy = u \\ \dfrac{y}{x^2} = v \end{array}\right.$. Potom množina D bude mít vyjádření $1 \le u \le 3$, $\dfrac{1}{2} \le v \le 2$.

Nyní spočítáme x a y pomocí u a v a dále Jakobián

$$y = \frac{u}{x},\ y = vx^2,\quad \frac{u}{x} = vx^2 \longrightarrow x^3 = \frac{u}{v},\quad x = \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \longrightarrow y = v\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} = \sqrt[3]{u^2 v}\ ;$$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{9}v^{-1} + \frac{2}{9}v^{-1} = \frac{1}{3v} \neq 0.$$

Užitím věty o substituci dostaneme

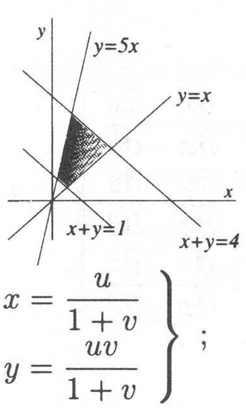
$$\iint_D x^3\,dx\,dy = \int_{1/2}^2 \Big(\int_1^3 \frac{u}{v}\cdot\frac{1}{3v}\,du\Big)\,dv = \frac{1}{3}\int_{1/2}^2 \frac{1}{v^2}\,dv \cdot \int_1^3 u\,du = \frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{v}\Big]_{\frac{1}{2}}^2 \cdot \Big[\frac{u^2}{2}\Big]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4 = 2.$$

■

***Příklad* 304.** $\iint_D (2x-y)\,dx\,dy$, $D: x+y=1$, $x+y=4$, $y=x$, $y=5x$

Řešení :



Nejvhodnější substituce bude následující

$$\left\{\begin{array}{c} x+y = u \\ \dfrac{y}{x} = v \end{array}\right\},\quad 1 \le u \le 4,\ 1 \le v \le 5.$$

Potom $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{u}{1+v} \\ y = \dfrac{uv}{1+v} \end{array}\right\}$; $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \dfrac{u}{(1+v)^3} + \dfrac{uv}{(1+v)^3} = \dfrac{u}{(1+v)^2} \neq 0;$

$$\iint_D (2x-y)\,dx\,dy = \int_1^5 \left(\int_1^4 \left(\frac{2u}{1+v} - \frac{uv}{1+v}\right) \frac{u}{(1+v)^2}\,du\right) dv = \int_1^4 u^2\,du \cdot \int_1^5 \frac{2-v}{(1+v)^3}\,dv =$$

$$= \left[\frac{u^3}{3}\right]_1^4 \cdot \int_1^5 -\frac{v+1-3}{(1+v)^3}\,dv = 21 \cdot \int_1^5 \left(-\frac{1}{(1+v)^2} + \frac{3}{(1+v)^3}\right) dv =$$

$$= 21 \cdot \left[\frac{1}{1+v} - \frac{3}{2(1+v)^2}\right]_1^5 = 21\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{2 \cdot 36} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2 \cdot 4}\right) = 0. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 305.** $\displaystyle\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy,\ D : 4x^2+9y^2 \le 36,\ y \ge 0$

Řešení : Množina D je vnitřek elipsy $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1$ ležící nad osou x.

Použijeme transformaci do zobecněných polárních souřadnic (eliptických) :

$$\begin{cases} x = 3r\cos\varphi \\ y = 2r\sin\varphi \end{cases},\quad J = 3 \cdot 2 \cdot r,\ 0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le \pi.$$

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+9y^2}\,dx\,dy = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \sqrt{1+4\cdot 9r^2\cos^2\varphi + 9 \cdot 4r^2\sin^2\varphi} \cdot 6r\,dr\right) d\varphi =$$

$$= \int_0^\pi d\varphi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+36r^2} \cdot 6r\,dr = \pi \cdot \frac{1}{12}\left[\frac{(1+36r^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{18}(37\sqrt{37}-1).$$

$\blacksquare$

306. $\displaystyle\iint_D (x-2y+3)\,dx\,dy,\quad D : x^2+y^2 \le a^2$ $\qquad [3\pi a^2]$

307. $\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy,\quad D : (x-2)^2 + \frac{(y-1)^2}{4} \le 1$

(Použijte souřadnice $x = 2 + r\cos\varphi, y = 1 + 2r\sin\varphi$.) $\qquad [4\pi]$

308. $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy,\quad D : x^2+y^2 \le 2x$ $\qquad \left[\frac{32}{9}\right]$

309. $\displaystyle\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy,\quad D : xy = 1,\ xy = 4,\ y = x,\ y = 9x$

(Použijte souřadnice $xy = u, \dfrac{y}{x} = v$.) $\qquad \left[J = \frac{1}{4v}, \frac{19}{3}\right]$

III.5. Substituční metoda pro trojný integrál

• Spočítejte integrály substitucí do sférických souřadnic :

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

$r > 0$; $0 \le \varphi < 2\pi$; $-\dfrac{\pi}{2} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$;

$x^2+y^2+z^2 = r^2$;

***Příklad* 310.** $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,\quad W : x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \le 0$

Řešení :

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{c} 0 \le r \le 3 \\ \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big(\int_{3\pi/2}^{2\pi} \Big(\int_0^3 r \cdot r^2 \cos\vartheta\,dr \Big)\,d\varphi \Big)\,d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\,d\vartheta \cdot \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^3 r^3\,dr =$$

$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{81}{4} = \frac{81}{4}\pi.$$ ■

***Příklad* 311.** $\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad W: 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ y \ge 0,\ z \le 0$

Řešení :

$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{c} 1 \le r \le 3 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0 \end{array}\right] =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \Big(\int_0^{\pi} \Big(\int_1^3 r^2 \cos^2\vartheta \cdot r^2 \cos\vartheta\,dr \Big)\,d\varphi \Big)\,d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{0} \cos^3\vartheta\,d\vartheta \cdot \int_0^{\pi} d\varphi \cdot \int_1^3 r^4\,dr =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta\,d\varphi \cdot \pi \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{242}{5} = \frac{484}{15}\pi.$$ ■

***Příklad* 312.** $\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz, \quad W: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \le 1,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

Řešení :

$$\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{cc} x = 2r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le 1 \\ y = 3r\sin\varphi\cos\vartheta & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ z = 2r\sin\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = 12r^2\cos\vartheta & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big(\int_0^1 6r^2 \sin\varphi\cos\varphi\cos^2\vartheta \cdot 12r^2\cos\vartheta\,dr \Big)\,d\varphi \Big)\,d\vartheta =$$

$$= 72 \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot 1\right] = -\frac{24}{5}.$$ ■

• Spočítejte integrály substitucí do cylindrických souřadnic :

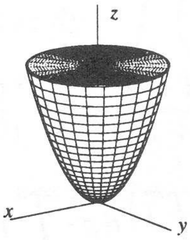
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = v \end{cases} \qquad J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = r$$

$r > 0\ ; \quad 0 \le \varphi < 2\pi\ ;$

$x^2 + y^2 = r^2$

***Příklad* 313.** $\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \quad W: x^2+y^2 \le az,\ z \le a,\ (a > 0)$

Řešení :



W je část vnitřku rotačního paraboloidu :

$$x^2+y^2 \le az \longrightarrow r^2 \le av \longrightarrow \frac{r^2}{a} \le v \le a,$$
$$z=a : x^2+y^2=a^2 \longrightarrow r^2=a^2,$$
$$0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\int_{\frac{r^2}{a}}^a r^2 r\,dv\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a r^3\Big[v\Big]_{\frac{r^2}{a}}^a\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^a r^3(a-\frac{r^2}{a})\,dr = 2\pi\Big[a\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6a}\Big]_0^a = 2\pi(\frac{a^5}{4}-\frac{a^5}{6}) = \frac{2\pi\cdot a^5}{12} = \frac{\pi a^5}{6}.$$

V tomto příkladě jsme mohli postupovat i bez použití cylindrických souřadnic. Mohli jsme vyjádřit z přímo : $\dfrac{x^2+y^2}{a} \le z \le a$ a potom vzít v úvahu průmět tělesa do roviny (xy), což je řez tělesa rovinou $z=a$ tj. $x^2+y^2 \le a^2$. Tedy

$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le a} \Big(\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a (x^2+y^2)\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le a} (x^2+y^2)\Big[z\Big]_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a\,dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le a} (x^2+y^2)\Big(a-\frac{x^2+y^2}{a}\Big)\,dx\,dy =$$

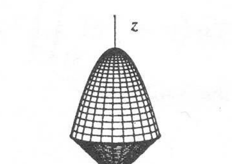
$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi & 0\le r\le a \\ y=r\sin\varphi \quad | & 0\le\varphi\le 2\pi \\ J=r & \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2(a-\frac{r^2}{a})\,r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi a^5}{6}.$$

■

***Příklad* 314.** $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz, \quad W : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6-x^2-y^2$

Řešení :

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ je rovnice rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku;



$z=6-x^2-y^2$ je rovnice rotačního paraboloidu.
Obě plochy mají společnou osu rotace z, a proto se protínají v kružnici, jejíž poloměr dostaneme ze soustavy :

$$\begin{cases} z^2=x^2+y^2, \\ z=6-x^2-y^2. \end{cases} \quad \text{Tedy } z=6-z^2,\ z^2+z-6=0,$$

$(z-2)(z+3)=0$. Úloze vyhovuje řešení $z=2 \longrightarrow x^2+y^2=4$.

Použijeme cylindrické souřadnice a určíme příslušné meze : $\begin{cases} r\le v\le 6-r^2 \\ 0\le r\le 2 \\ 0\le\varphi\le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2\Big(\int_r^{6-r^2} r\cdot r\,dv\Big)\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(6-r^2-r)\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot\Big[\frac{6r^3}{3}-\frac{r^5}{5}-\frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(16-\frac{32}{5}-4\Big) = \frac{56\pi}{5}.$$

■

***Příklad* 315.** Vypočítejte integrál $\displaystyle\iiint_W z^3\,dx\,dy\,dz$, kde $W : x\le 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ (**elipsoid**).

Řešení : Použijeme zobecněné sférické souřadnice :

$$\begin{cases} x = ar\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = br\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = cr\sin\vartheta \end{cases} \qquad J = abcr^2\cos\vartheta, \qquad \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\iiint_W z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^1 c^3r^3\sin^3\vartheta\cdot abcr^2\cos\vartheta\,dr\right)d\,\varphi\right)d\,\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}d\varphi\cdot\int_0^1 r^5\,dr = abc^4\left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{abc^4\pi}{48}.$$ ■

• Vypočítejte integrály :

316. $\iiint_W \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-4}\,dx\,dy\,dz,\ W: x^2+y^2+z^2 \le 1,\ y \ge 0,\ z \le 0$ $\left[\pi\left(\frac{9}{2}+16\ln 3\right)\right]$

317. $\iiint_W x^2y\,dx\,dy\,dz,\ W: z \le 4-x^2-y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ $\left[\frac{2752}{105}\right]$

318. $\iiint_W (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\ W: 4x^2+y^2+\frac{z^2}{9} \le 1$ $[4\pi]$

319. $\iiint_W \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2+2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz,\ W: x^2+y^2+z^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0$

$\frac{\pi}{6}(8-3\sqrt{3})$ $\cancel{\left[\frac{\pi(4-\sqrt{2})}{3}\right]}$

320. $\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\ W: x^2-2x+y^2 \le 0,\ -1 \le z \le 1$ $\left[\frac{11}{3}\pi\right]$

321. $\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz,\ W: 0 \le x^2+z^2 \le 4,\ 0 \le y \le 4-x^2-z^2,\ x \ge 0$

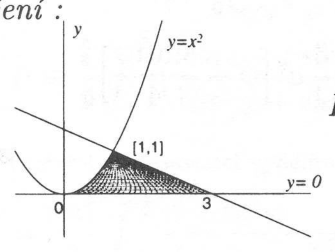
(Návod : cylindrické souř. $x = r\cos\varphi, y = h, z = r\sin\varphi$) $\left[\frac{1024}{105}\right]$

III.6. Aplikace dvojných a trojných integrálů

• Určete plošný obsah rovinného obrazce D ohraničeného danými křivkami :

***Příklad* 322**. $y = x^2,\ x+2y = 3,\ y = 0$

Řešení :



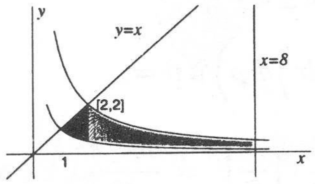
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}dx\right)dy = \int_0^1\left(3-2y-\sqrt{y}\right)dy =$$

$$= \left[3y-y^2-\frac{2y\sqrt{y}}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

■

***Příklad* 323.** $xy = 1, \; xy = 4, \; y = x, \; x = 8$

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \int_1^2 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{x} dy \Big)\, dx + \int_2^8 \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{4}{x}} dy \Big)\, dx =$$

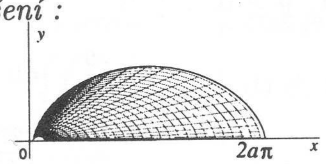
$$= \int_1^2 \Big(x - \frac{1}{x} \Big)\, dx + \int_2^8 \Big(\frac{4}{x} - \frac{1}{x} \Big)\, dx = \Big[\frac{x^2}{2} - \ln|x| \Big]_1^2 +$$

$$+3\Big[\ln|x| \Big]_2^8 = 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} + 3(\ln 8 - \ln 2) = \frac{3}{2} + \ln \frac{8^3}{2 \cdot 2^3} =$$

$$= \frac{3}{2} + \ln 32. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 324.** Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného osou x a jedním obloukem cykloidy o parametrických rovnicích $x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t)$.

Řešení :



Jeden oblouk cykloidy opíše bod kružnice, která se kotálí po přímce $y = 0$, tj. $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

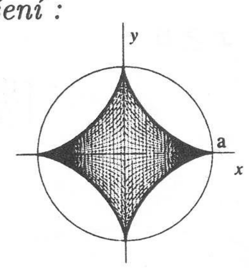
$$P = \iint_D dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_0^{2\pi} y\,\dot{x}\,dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\,dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \Big(1 - 2\cos t + \cos^2 t \Big)\, dt = a^2 \Big[t - 2\sin t \Big]_0^{2\pi} + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2} \Big[t + \frac{\sin 2t}{2} \Big]_0^{2\pi} = 2\pi a^2 + a^2 \pi = 3\pi a^2. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 325.** Určete plošný obsah rovinného obrazce D omezeného asteroidou $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy$$

Použijeme transformace do souřadnic : $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\sin^3\varphi \end{array} \right.$

$$\Big(r\cos^3\varphi \Big)^{2/3} + \Big(r\sin^3\varphi \Big)^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow r^{2/3} = a^{2/3} \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{array} \right], \; J = \left| \begin{array}{ll} \cos^3\varphi & -3r\cos^2\varphi\sin\varphi \\ \sin^3\varphi & 3r\sin^2\varphi\cos\varphi \end{array} \right| = 3r\sin^2\varphi\cos^4\varphi + 3r\sin^4\varphi\cos^2\varphi =$$

$$= 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$

$$P = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^a 3r\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,dr \Big)\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi \cdot 3\int_0^a r\,dr =$$

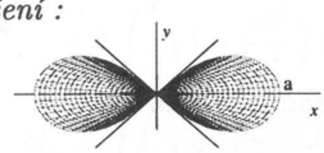
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 2\varphi}{4}\, d\varphi \cdot 3\Big[\frac{r^2}{2} \Big]_0^a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2}\, d\varphi \cdot \frac{3}{2}a^2 = \frac{3}{4}a^2 \Big[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8}\pi a^2. \qquad \blacksquare$$

- Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného uzavřenou křivkou :

***Příklad* 326.** $\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2(x^2-y^2)$ **(Bernoulliova lemniskáta)**

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ J = r \end{bmatrix}.$$

Po dosazení do zadání dostáváme postupně : $r^4 = a^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$, $r^2 = a^2\cos 2\varphi$,

$0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\varphi} \longrightarrow \cos 2\varphi \ge 0, \quad \varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\rangle \cup \langle \frac{7\pi}{4}, 2\pi\rangle.$

$$P = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr\Big)\,d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 2a^2\Big[\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

■

***Příklad* 327.** $\left(x^2+9y^2\right)^2 = x^2y$

Řešení : $P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = \frac{r}{3}\sin\varphi \\ J = \frac{1}{3}r \end{bmatrix}$

$r^4 = r^2\cos^2\varphi\cdot\frac{r}{3}\sin\varphi$

$0 \le r \le \frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi$

$\cos^2\varphi\sin\varphi \ge 0 \longrightarrow 0 \le \varphi \le \pi$

$$P = \int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} \frac{1}{3}\,r\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi} d\varphi =$$

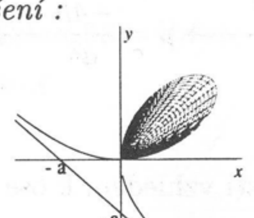
$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\frac{1}{9}\cos^4\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{54}\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,(1-\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{27}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d\varphi = \text{(Wallisova formule)} = \frac{1}{27}\Big(\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{864}.$$

■

***Příklad* 328.** $(x^3+y^3) = 3axy$ **(Descartesův list)**

Řešení :



$$P = \iint_D dx\,dy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le r(\varphi) \\ y = r\sin\varphi \;\; | & \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2 \\ J = r & \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\Big(\int_0^{r(\varphi)} r\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Nyní určíme $r(\varphi)$ a dosadíme do posledního integrálu.

$x^3+y^3 = 3axy \quad\longrightarrow\quad r^3\cos^3\varphi + r^3\sin^3\varphi = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi,$ takže

$$r(\varphi) = \frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad r(0) = r(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{3a\cos\varphi\sin\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}\Big)^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\left(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi\right)^2}d\varphi =$$

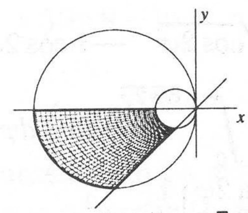
(čitatel a jmenovatel vydělíme $\cos^6\varphi$)

$$= \frac{9\,a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{tg}^2\varphi}{\left(\mathrm{tg}^3\varphi+1\right)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\,\varphi = u \\ \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = du \end{bmatrix} = \frac{9\,a^2}{2\cdot 3}\int_0^{\infty}\frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du =$$

$$= \frac{3}{2}\,a^2 \lim_{C\to+\infty} \int_0^C \frac{3u^2}{(u^3+1)^2}\,du = \frac{3\,a^2}{2} \lim_{C\to+\infty} \left[\frac{-1}{u^3+1}\right]_0^C = \frac{3\,a^2}{2} \lim_{C\to+\infty} \left(\frac{-1}{C^3+1}+1\right) =$$
$$= \frac{3\,a^2}{2}.$$
■

***Příklad* 329.** Určete plošný obsah rovinného obrazce omezeného křivkami
$x^2+y^2+x=0,\ x^2+y^2+4x=0,\ y=x,\ y=0.$

Řešení :

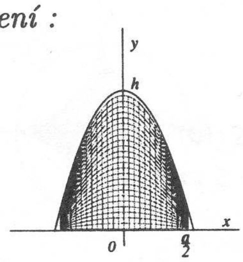


$$x^2+y^2+x=0 \longrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$
$$x^2+y^2+4x=0 \longrightarrow (x+2)^2+y^2=4$$

$$P = \iint_D dx\,dy = \left[\begin{array}{l|r} x=r\cos\varphi & x^2+y^2+x=0 \longrightarrow r=-\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi & x^2+y^2+4x=0 \longrightarrow r=-4\cos\varphi \\ J=r & -\cos\varphi \le r \le -4\cos\varphi \\ & \pi \le \varphi \le \frac{5}{4}\pi \end{array}\right] =$$
$$= \int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \left(\int_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} r\,dr\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \left[r^2\right]_{-\cos\varphi}^{-4\cos\varphi} d\varphi = \frac{1}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \left(16\cos^2\varphi-\cos^2\varphi\right) d\varphi =$$
$$= \frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{15}{2}\int_\pi^{\frac{5}{4}\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{15}{4}\left[\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_\pi^{\frac{5}{4}\pi} =$$
$$= \frac{15}{4}\left(\frac{5}{4}\pi+\frac{\sin\frac{5}{2}\pi}{2}-\pi-\frac{\sin 2\pi}{2}\right) = \frac{15}{4}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{15(\pi+2)}{16}.$$
■

***Příklad* 330.** Je dána parabolická úseč s tětivou kolmou k ose. Délka tětivy je a, výška úseče h, a hustota $\varrho=1$. Určete :
a) moment setrvačnosti úseče vzhledem k tětivě, b) těžiště úseče.

Řešení :



Analytické vyjádření této paraboly bude $y-h=px^2$.
Použijeme-li bod $\left[\frac{a}{2},0\right]$, pak $-h=p\frac{a^2}{4} \longrightarrow p=\frac{-4h}{a^2} \longrightarrow$
$y=h-\frac{4h}{a^2}x^2.$

a) Moment setrvačnosti k tětivě je nyní momentem setrvačnosti vzhledem k ose x.

$$I_x = \iint_D y^2\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} D: & 0\le y\le h-\frac{4h}{a^2}x^2 \\ & -\frac{a}{2}\le x\le \frac{a}{2} \end{array}\right] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} y^2\,dy\right) dx =$$
$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[y^3\right]_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2} dx = \frac{1}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(h-\frac{4h}{a^2}x^2\right)^3 dx = \frac{h^3}{3}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(1-\frac{4x^2}{a^2}\right)^3 dx =$$
$$= \frac{2h^3}{3}\int_0^{\frac{a}{2}} \left(1-\frac{12x^2}{a^2}+\frac{48x^4}{a^4}-\frac{64x^6}{a^6}\right) dx = \frac{2h^3}{3}\left[x-\frac{4x^3}{a^2}+\frac{48x^5}{5a^4}-\frac{64x^7}{7a^6}\right]_0^{\frac{a}{2}} =$$
$$= \frac{2h^3}{3}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}-\frac{a}{14}\right) = \frac{h^3 a}{3}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) = \frac{16\,h^3 a}{105}.$$

b) $T=\left[0,y_T\right],\quad y_T=\dfrac{M_x}{m}$

$$m=\iint_D dx\,dy=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2}dy\Big)dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\Big(h-\frac{4h}{a^2}x^2\Big)dx=$$

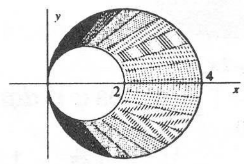
$$=2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\Big(1-\frac{4x^2}{a^2}\Big)dx=2h\Big[x-\frac{4x^3}{3a^2}\Big]_0^{\frac{a}{2}}=2h\Big(\frac{a}{2}-\frac{a}{6}\Big)=\frac{2}{3}\,ha,$$

$$M_x=\iint_D y\,dx\,dy=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\Big(\int_0^{h-\frac{4h}{a^2}x^2}y\,dy\Big)dx=\dots=\frac{2}{5}\,h^2a,$$

$$y_T=\frac{\frac{2}{5}\,h^2a}{\frac{2}{3}\,ha}=\frac{3}{5}\,h,\qquad T=\Big[0,\frac{3}{5}\,h\Big].$$ ■

***Příklad* 331.** Určete těžiště rovinné desky omezené křivkami $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x=0$, je-li $\varrho=10$.

Řešení :



$$x^2+y^2-2x=0\longrightarrow(x-1)^2+y^2=1$$

$$x^2+y^2-4x=0\longrightarrow(x-2)^2+y^2=4$$

$$T=\Big[x_T,0\Big],\ x_T=\frac{M_y}{m},$$

$$m=10\cdot P=10\Big(\pi\cdot 2^2-\pi\cdot 1^2\Big)=30\pi$$

$$M_y=\iint_D 10x\,dx\,dy=\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ J=r \end{array} & \begin{array}{c} x^2+y^2\ge 2x\longrightarrow\quad r\ge 2\cos\varphi\\ x^2+y^2\le 4x\longrightarrow\quad r\le 4\cos\varphi\\ 2\cos\varphi\le r\le 4\cos\varphi\\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \end{array}\end{array}\right]=$$

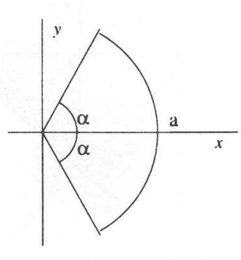
$$=10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}r^2\cos\varphi\,dr\Big)d\varphi=10\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}d\varphi=\frac{10}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}56\cos^4\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{20}{3}\cdot 56\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1120}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}=70\pi,$$

$$x_T=\frac{70\pi}{30\pi},\qquad T=\Big[\frac{7}{3},0\Big].$$ ■

***Příklad* 332.** Určete souřadnice těžiště kruhové výseče (viz obrázek), je-li $\varrho=$ konst.

Řešení :



$$T=\Big[x_T,0\Big],\quad m=\frac{\pi a^2}{2\pi}\cdot 2\alpha\varrho=a^2\alpha\varrho,$$

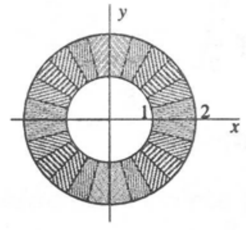
$$M_y=\iint_D x\varrho\,dx\,dy=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} x=r\cos\varphi\\ y=r\sin\varphi\\ J=r \end{array} & \begin{array}{c} 0\le r\le a\\ -\alpha\le\varphi\le\alpha \end{array}\end{array}\right]=\varrho\int_{-\alpha}^{\alpha}\Big(\int_0^a r^2\cos\varphi\,dr\Big)d\varphi=\varrho\Big[\frac{r^3}{3}\Big]_0^a\cdot\Big[\sin\varphi\Big]_{-\alpha}^{\alpha}=$$

$$=\frac{2}{3}\,\varrho\,a^3\sin\alpha,\qquad x_T=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sin\alpha}{\alpha}.$$ ■

***Příklad* 333.** Určete moment setrvačnosti vzhledem k počátku soustavy souřadnic homogenní rovinné desky omezené křivkami $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $\varrho=k$.

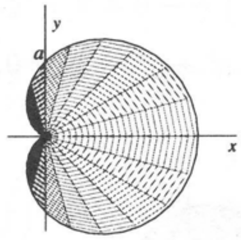
Řešení :



$$I_{[0,0]} = k \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = [\text{polární souřadnice}] = = k\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3\,dr\,d\varphi = \frac{15}{2}\,k\pi.$$ ■

***Příklad* 334.** Určete polohu těžiště obrazce omezeného **kardioidou** $r = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $a > 0$, $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = \Big[x_T, 0\Big], m = P_D = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2\,d\varphi =$$
(viz př. 328)

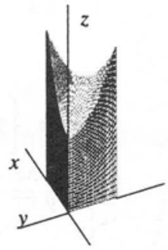
$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{2}a^2\Big[\varphi+2\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = a^2\pi + a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}a^2\pi,$$
$$M_y = \iint_D x\,dx\,dy = \Big[\text{polární souř.}\Big] = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2\cos\varphi\,dr\Big)\,d\varphi =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\cdot a^3(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\Big(\cos\varphi+3\cos^2\varphi+3\cos^3\varphi+\cos^4\varphi\Big)\,d\varphi =$$
$$= \frac{5}{4}a^3\pi; \qquad x_T = \frac{5\,a}{6}.$$ ■

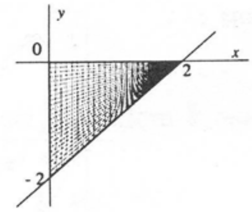
• Vypočítejte objem tělesa W omezeného plochami :

***Příklad* 335.** $z = x^2+y^2+4$, $x-y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

Řešení :

W je část trojbokého hranolu se základnou v rovině $z=0$. Hranol je shora omezený rotačním paraboloidem.

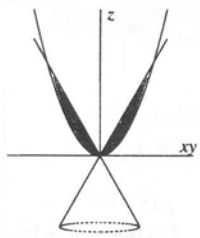




$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} W: & 0 \le z \le x^2+y^2+4 \\ & x-2 \le y \le 0 \\ & 0 \le x \le 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \int_0^2\Big(\int_{x-2}^0\Big(\int_0^{x^2+y^2+4} dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2\Big(\int_{x-2}^0 (x^2+y^2+4)\,dy\Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2\Big[x^2y + \frac{y^3}{3} + 4y\Big]_{x-2}^0\,dx = -\int_0^2\Big(x2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + 4(x-2)\Big)\,dx =$$
$$= -\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} + 2x^2 - 8x\Big]_0^2 = \frac{32}{3}.$$ ■

***Příklad* 336.** $z = 2(x^2 + y^2)$, $z^2 = 16(x^2 + y^2)$

Řešení :



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \big(\text{použijeme cylindrické souřadnice}\big)$$

$$\left[\begin{array}{lll} x = r\cos\varphi \quad | & 2(x^2+y^2) \le z \le 4\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow & 2r^2 \le v \le 4r \\ y = r\sin\varphi & 2r^2 \le 4r & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = v & r \le 2 \longrightarrow & 0 \le r \le 2 \\ J = r & & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2\Big(\int_{2r^2}^{4r} r\,dv\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^2 r(4r - 2r^2)\,dr = 2\pi \cdot \Big[\frac{4}{3}r^3 - \frac{2r^4}{4}\Big]_0^2 =$$

$$= \frac{16}{3}\pi.$$

■

***Příklad* 337.** $z = 1 - x^2 - 4y^2$, $z = 0$

Řešení : Plocha $z = 1 - x^2 - 4y^2$ je eliptickým paraboloidem s vrcholem v bodě $[0, 0, 1]$.

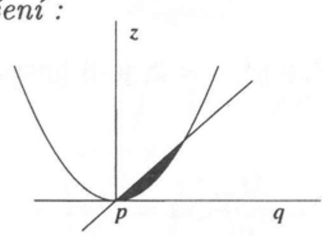
$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+4y^2\le 1}\Big(\int_0^{1-x^2-4y^2} dz\Big)\,dx\,dy = \iint_{x^2+4y^2\le 1}\Big(1-x^2-4y^2\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = \frac{r}{2}\sin\varphi \quad | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = \frac{r}{2} & \end{array}\right] = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 (1 - r^2)\cdot\frac{r}{2}\,dr\Big)\,d\varphi = \frac{2\pi}{2}\Big[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

■

***Příklad* 338.** $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$

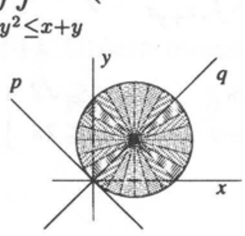
Řešení :



$$V = \iiint_W dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{c} x^2 + y^2 \le z \le x + y \\ (x, y) \in \{x^2 + y^2 \le x + y\} \end{array}\right] =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le x+y}\Big(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le x+y}\Big(x + y - x^2 - y^2\Big)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{c} x + y - x^2 - y^2 = \frac{1}{2} - \big(x - \frac{1}{2}\big)^2 - \big(y - \frac{1}{2}\big)^2 \\ x^2 + y^2 \le x + y \longrightarrow \big(x - \frac{1}{2}\big)^2 - \big(y - \frac{1}{2}\big)^2 \le \frac{1}{2} \end{array}\right] =$$



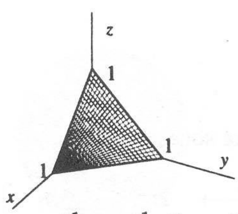
$$= \left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi & 0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi \quad | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{1/2}}\Big(\frac{1}{2} - r^2\Big)r\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\Big[\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{1/2}} = 2\pi\cdot\Big(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{8}.$$

■

***Příklad* 339.** Určete hmotnost a x-ovou souřadnici těžiště tělesa omezeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení : Hmotnost tělesa při $\varrho = 1$ se rovná objemu.



$$m = V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}, \quad M_{yz} = \iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \Big(\int_0^{1-x-y} x\,dz \Big) dy \Big) dx = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy \Big) dx =$$

$$= \int_0^1 x\Big[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\Big((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\Big) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{24}, \qquad x_T = \frac{1}{4}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 340.** Určete hmotnost koule, jestliže hustota ϱ je rovna čtverci vzdálenosti od středu koule.

Řešení : Zvolíme počátek soustavy souřadnic ve středu koule. Pak koule je popsána nerovnicí $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ a hustota $\varrho = x^2 + y^2 + z^2$.

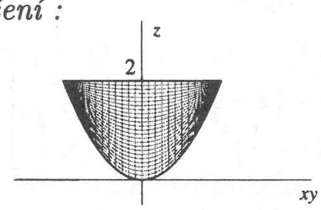
$$m = \iiint_W \varrho\,dx\,dy\,dz = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \leq r \leq a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^a r^4 \cos\vartheta\,dr \Big) d\vartheta \Big) d\varphi =$$

$$= 2\pi\Big[\sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^a = \frac{4\pi a^5}{5}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 341.** Určete těžiště tělesa omezeného plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení :



Těžiště $T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $m = V =$

$$= \iiint_W dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^2 dz \Big) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} (2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \leq r \leq \sqrt{2} \\ y = r\sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right] =$$

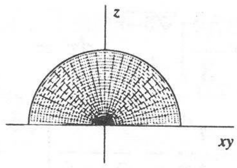
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r\,dr \Big) d\varphi = 2\pi \cdot \Big[r^2 - \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\leq 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^2 z\,dz \Big) dx\,dy = \cdots = \frac{8}{3}\pi, \quad T = [0, 0, \frac{4}{3}].$$

$\blacksquare$

***Příklad* 342.** Určete těžiště tělesa $W : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad z \geq 0, \quad \varrho = 1.$

Řešení :



Těžiště $T = [0,0,z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad m = V$,

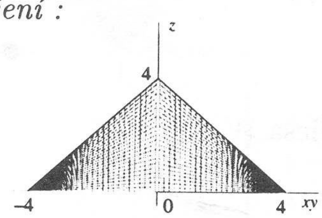
$$V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3,\quad M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \quad | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a r\sin\vartheta\, r^2\cos\vartheta\,dr\Big)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{2},\qquad T = [0,0,\frac{3}{8}a].$$ ■

***Příklad* 343**. Určete těžiště kužele se základnou $x^2+y^2 \le 16$ a vrcholem v bodě $[0,0,4]$, je-li hustota $\varrho = 1$.

Řešení :



$$T = [0,0,z_T],\ \text{kde}\ z_T = \frac{M_{xy}}{m}, m = V = \frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 4 = \frac{64}{3}\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z\,dx\,dy\,dz$$

Uvažovaný kužel je rotační, osa z je jeho osou rotace. Meridiánem tohoto rotačního kužele je část přímky $x + z = 4 \longrightarrow z = 4 - x$. Potom rovnice kuželové plochy je $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$

$$M_{xy} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\Big(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\Big)\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 16}\left(4-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 dx\,dy = \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi \quad | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & 0 \le r \le 4 \\ J = r & \end{array}\right] =$$

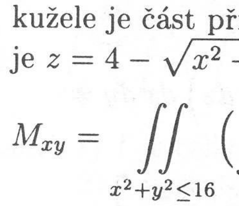
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^4 (4-r)^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\int_0^4 (16r - 8r^2 + r^3)\,dr = \pi\left[8r^2 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{r^4}{4}\right]_0^4 = \frac{64}{3}\pi,$$

$$T = [0,0,1].$$ ■

***Příklad* 344**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k bodu $[0,0,0]$ tělesa W

$$W = \left\{[x,y,z] \in E_3;\ \ \frac{x^2+y^2}{2} \le z \le \sqrt{3-x^2-y^2}\right\},\quad \varrho = 1.$$

Řešení :



$$I_{[0,0,0]} = \iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \frac{r^2}{2} \le h \le \sqrt{3-r^2} \longrightarrow\ \frac{r^2}{2} \le \sqrt{3-r^2} \longrightarrow r^4 \le 4\,(3-r^2) \longrightarrow \\ y = r\sin\varphi \quad | & r^4 + 4r^2 - 12 \le 0 \longrightarrow (r^2-2)(r^2+6) \le 0 \longrightarrow\ r^2 \le 2 \longrightarrow \\ z = h & \qquad 0 \le r \le \sqrt{2},\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array}\right] =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}}\Big(\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}(r^2+h^2)r\,dh\Big)\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot\int_0^{\sqrt{2}}\Big[r^3h + r\frac{h^3}{3}\Big]_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}}dr =$$

$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\Big(r^3\sqrt{3-r^2}+\frac{r}{3}(3-r^2)\sqrt{3-r^2}-\frac{r^5}{2}-\frac{r^7}{24}\Big)\,dr = 2\pi\Big[-\frac{r^6}{12}-\frac{r^8}{24\cdot 8}\Big]_0^{\sqrt{2}}+$$

$$+ 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\Big(r\sqrt{3-r^2}+\frac{2}{3}r^3\sqrt{3-r^2}\Big)\,dr = 2\pi\Big(-\frac{8}{12}-\frac{16}{24\cdot 8}\Big)-$$

$$-\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{3-r^2}\Big(1+\frac{2}{3}r^2\Big)(-2r)\,dr = \begin{bmatrix} 3-r^2=t & \mid\ r_1=0\to t_1=3 \\ -2r\,dr=dt & r_2=\sqrt{2}\to t_2=1\end{bmatrix} =$$

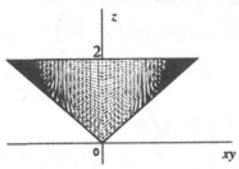
$$= -\frac{3}{2}\pi-\pi\int_3^1\sqrt{t}\Big(1+\frac{2}{3}(3-t)\Big)\,dt = -\frac{3}{2}\pi+\pi\int_1^3\Big(3\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big)\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\pi+\pi\Big[\frac{2\cdot 3t^{3/2}}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2t^{5/2}}{5}\Big]_1^3 = -\frac{3}{2}\pi+\pi\Big(2\cdot 3\sqrt{3}-\frac{4}{15}\cdot 9\sqrt{3}-2+\frac{4}{15}\Big) =$$

$$= \pi\Big(\frac{18\sqrt{3}}{5}-\frac{97}{30}\Big) \doteq 3{,}002\,\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 345**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z tělesa W,
$W = \{[x,y,z]\in E_3;\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\},\ \varrho = 1.$

Řešení :



$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

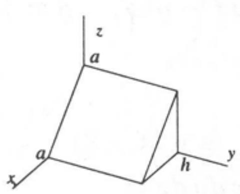
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\Big((x^2+y^2)\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\Big(2-\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy = \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi & \mid\ 0\le r\le 2 \\ y=r\sin\varphi & 0\le\varphi\le 2\pi \\ J=r & \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(2-r)r\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\Big[2\cdot\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(8-\frac{32}{5}\Big) = \frac{16\pi}{5}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 346**. Určete statický moment M_{yz} (vzhledem k rovině (yz)) tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=a,\ y=h,\ (a>0, h>0)$, je-li hustota ϱ konstantní.

Řešení :



$$M_{yz} = \varrho\cdot\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \begin{bmatrix} W: & 0\le z\le a-x \\ & 0\le x\le a \\ & 0\le y\le h\end{bmatrix} =$$

$$= \varrho\int_0^a\Big(\int_0^h\Big(\int_0^{a-x}x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \varrho\int_0^a\Big(\int_0^h x(a-x)\,dy\Big)\,dx = \varrho\cdot h\Big[a\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{\varrho h a^3}{6}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 347**. Určete moment setrvačnosti I_{xy} (vzhledem k rovině (xy)) tělesa W,
$W = \{[x,y,z]\in E_3; x^2-2x+y^2\le 0,\ -1\le z\le 1\},\ \varrho = 1.$

Řešení : Těleso W je rotační válec s osou rovnoběžnou s osou z.

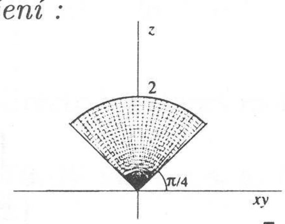
$$I_{xy} = \iiint_W z^2\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big(\int_{-1}^{1} z^2\,dz\Big)\,dx\,dy = \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big[\frac{z^3}{3}\Big]_{-1}^{1}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{2}{3}\iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} dx\,dy = \frac{2}{3}\cdot\pi\cdot 1 = \frac{2}{3}\,\pi. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 348.** Vypočítejte integrál a pomocí vzorců stanovte jeho možný fyzikální význam:

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz, \qquad W:\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2},\ y \ge 0.$$

Řešení :



$W:\ z^2 = x^2+y^2$ (rotační kuželová plocha)

$z^2 = 4-x^2-y^2 \longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 4$ (kulová plocha)

$$\left[\begin{array}{l|c} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & 0\le r\le 2 \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & 0\le\varphi\le\pi \\ z = r\sin\vartheta & (y\ge 0) \\ J = r^2\cos\vartheta & \frac{\pi}{4}\le\vartheta\le\frac{\pi}{2} \end{array}\right]$$

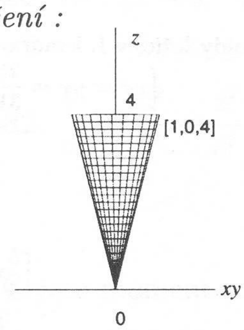
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\pi}\Big(\int_0^2 r\cdot r^2\cos\vartheta\,dr\Big)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta = \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^2\cdot\Big[\sin\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\pi = 4\pi\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big).$$

Význam : 1) I je celková hmota tělesa při hustotě $\varrho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
2) I je statický moment tělesa vzhledem k bodu $[0,0,0]$ při hustotě $\varrho = 1$.

$\blacksquare$

***Příklad* 349.** Vypočítejte hmotnost kužele s poloměrem podstavy $a = 1$ a výškou $h = 4$. Hustota se lineárně mění v závislosti na vzdálenosti bodu tělesa od podstavy. Ve vrcholu je $\varrho = 1$ a $\varrho = 5$ v každém bodě podstavy.

Řešení :



Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem ve vrcholu kužele, osa z bude osou rotace, meridiánem bude část přímky $z = 4x$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$. Potom kuželová plocha bude mít rovnici $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$. Uvažované těleso W zapíšeme pomocí nerovnic.

$$W:\quad 4\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4$$

$$x^2+y^2 \le 1$$

Pro hustotu platí : $\varrho(z) = k_1(4-z)+k_2$: $\quad \varrho(0) = 1 \longrightarrow \quad 1 = 4k_1+k_2$

$$\varrho(4) = 5 \longrightarrow \quad 5 = k_2 \longrightarrow k_1 = -1$$

$$\longrightarrow \quad \varrho(z) = -(4-z)+5 = z+1$$

$$m = \iiint_W \varrho\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\Big(\int_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4}(z+1)\,dz\Big)\,dx\,dy = \cdots = \frac{16}{3}\pi. \qquad \blacksquare$$

• Určete plošný obsah P rovinného obrazce D ohraničeného danými křivkami :

350. $x = y^2,\ 8x = y^2,\ y = 5$ $\left[\frac{875}{24}\right]$

351. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0,\ x = 0,\ x = 1$ $\left[\frac{13}{6}\right]$

352. $x = y^2,\ xy = 1,\ x = 4y$ $\left[\frac{1}{6} + \ln 2\right]$

353. $\left(4x^2 + \frac{y^2}{9}\right)^2 = xy$ $\left[\frac{9}{8}\right]$

354. $y = \ln x,\ x - y = 1,\ y = -1$ $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}\right]$

355. $y = \frac{x^2}{4},\ y = \frac{8}{4 + x^2}$ $\left[2\left(\pi - \frac{2}{3}\right)\right]$

• Určete hmotnost m rovinné desky omezené křivkami :

356. $y = x^2,\ x - y + 2 = 0$, je-li hustota $\varrho(x, y) = xy$ $\left[\frac{45}{8}\right]$

357. $x^2 + y^2 = 2ax$, je-li $\varrho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},\ a > 0$ $\left[\frac{32}{9}a^3\right]$

358. $x = y^2,\ xy = 1,\ x = 4$, je-li $\varrho(x, y) = 2x$ $\left[\frac{94}{5}\right]$

359. $x^2 + y^2 = 1,\ x + y \geq 1$, je-li $\varrho(x, y) = y$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

360. $x^2 + y^2 - 2x = 0,\ x^2 + y^2 - 4x = 0,\ y = x,\ y = 0$, je-li hustota $\varrho(x, y)$ v libovolném bodě rovna vzdálenosti tohoto bodu od počátku soustavy souřadnic. $\left[\frac{70\sqrt{2}}{9}\right]$

• Určete těžiště T rovinné desky omezené křivkami :

361. $y = 2x - 3x^2,\ y = -x$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}\right]\right]$

362. $y = \sin x,\ y = 0,\ x \in \langle 0, \pi \rangle$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right]\right]$

363. $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ $\left[T = \left[\frac{2}{5}, 0\right]\right]$

364. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},\ x \geq 0,\ y \geq 0$, je-li $\varrho(x, y) = 1$ (jde o čtvrtinu asteroidy ležící v I. kvadrantu, použijte souřadnice $x = r\cos^3\varphi,\ y = r\sin^3\varphi$) $\left[x_T = y_T = \frac{256a}{315\pi}\right]$

• Určete moment setrvačnosti :

365. kruhu o poloměru a vzhledem k jeho tečně, $\varrho(x, y) = 1$, $\left[\frac{5}{4}\pi a^4\right]$

366. elipsy $4x^2 + y^2 \leq 1$ vzhledem k ose y, $\varrho(x, y) = y$, $\left[\frac{1}{30}\right]$

367. čtvrtiny kruhu o poloměru a vzhledem k jeho ose souměrnosti, $\varrho(x, y) = 1$, (Zvolte polohu tak, aby osa x byla osou souměrnosti.) $\left[\frac{a^4(\pi - 2)}{16}\right]$

368. čtverce o straně a vzhledem k jeho vrcholu, $\varrho(x, y) = 1$, $\left[\frac{2}{3}a^4\right]$

369. části mezikruží $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 4$, omezeného přímkami $y = x,\ y = 0$ v I. kvadrantu s hustotou $\varrho(x, y) = k,\ (k > 0)$ vzhledem ke středu mezikruží. $\left[\frac{15k\pi}{16}\right]$

• Vypočítejte objem V tělesa W omezeného plochami :

370. $z = 0,\ y + z = 1,\ y = \ln x,\ y = \ln^2 x$ $[3e - 8]$

371. $z = 0,\ z = a^2 - x^2,\ x^2 + y^2 = a^2$ $\left[\frac{3}{4}\pi a^4\right]$

372. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 \leq b^2,\ 0 \leq b \leq a$ $\left[\frac{4}{3}\pi\left(a^3 - \sqrt{(a^2 - b^2)^3}\right)\right]$

373. $(x + y)^2 + 2z = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ $\left[\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - 1)\right]$

374. $1 + x^2 + y^2 = z^2,\ z = 5 - x^2 - y^2,\ (z \geq 0)$ $\left[\frac{35}{6}\pi\right]$

375. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\left[\frac{4}{3}\pi abc\right]$

• Určete hmotnost m tělesa W :

376. $W : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c$, jestliže hustota $\varrho(x, y, z) = x + y + z$.
$\left[\frac{abc}{2}(a + b + c)\right]$

377. W je koule o poloměru a, jestliže hustota je rovna čtverci vzdálenosti od průměru.
(Zvolte kouli se středem v počátku souřadnic a průměr ležící na ose z.) $\left[\frac{8}{15}\pi a^5\right]$

378. W je omezené plochami o rovnicích: $z = 0,\ 2x + y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0$,
je-li $\varrho(x, y, z) = 4x$. $\left[\frac{32}{2}\right]$

379. W je omezené plochami o rovnicích : $z = x^2 + y^2 + 4,\ z = 3 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1$,
je-li $\varrho(x, y, z) = 2z(x^2 + y^2)$. $\left[\frac{49\pi}{6}\right]$

• Určete těžiště T tělesa W omezeného plochami :

380. $W : z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0, \varrho(x, y, z) = 1$
$\left[T = \left[2, 2, \frac{35}{6}\right]\right]$

381. $W : 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ z \geq 0,\ \varrho(x, y, z) = 1$
$\left[T = \left[0, 0, \frac{5}{6\sqrt{3} - 5}\right]\right]$

382. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (v prvním oktantu), $\varrho(x, y, z) = 1$
$\left[T = \left[\frac{3a}{8}, \frac{3b}{8}, \frac{3c}{8}\right]\right]$

• Určete moment setrvačnosti tělesa W :

383. $x^2 + y^2 = 2z,\ x + y = z$ vzhledem k osám souřadnic, je-li $\varrho(x, y, z) = 1$.
$\left[I_{xy} = \frac{7}{2}\pi, I_{xz} = I_{yz} = \frac{4}{3}\pi,\right]$

384. $x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ (z \geq 0)$ vzhledem k ose z, je-li $\varrho(x, y, z) = 1$.
$\left[I_z = \frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2} - 5)\right]$

385. rotačního válce s poloměrem podstavy a a výškou b vzhledem k přímce p, která se dotýká pláště válce a je rovnoběžná s osou rotace.
(Zvolte válec $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2,\ 0 \leq z \leq b$, přímka p pak bude osa z.) $\left[\frac{3}{2}\pi a^4 b\right]$