ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

FAKULTA STROJNÍ

MATEMATIKA I

Jiří Neustupa

Elektronická verze skripta pro rok 2024/2025

Obsah

Úvod 3

I. Lineární algebra

1. Vektorové prostory 5
2. Matice a determinanty 10
3. Soustavy lineárních algebraických rovnic 18
4. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic 22
5. Přehled ekvivalentních vlastností čtvercové matice 25

II. Analytická geometrie v $\mathbb{E}_3$

1. Některé základní pojmy 26
2. Přímky v $\mathbb{E}_3$ 28
3. Roviny v $\mathbb{E}_3$ 31
*4. Kvadriky v $\mathbb{E}_3$ 35

III. Diferenciální počet

1. Posloupnosti reálných čísel 43
2. Funkce – základní pojmy 47
3. Vybrané konkrétní funkce 52
4. Limita a spojitost funkce 57
5. Derivace funkce 63
6. Užití derivace: intervaly monotónie a konvexnosti, l'Hospitalovo pravidlo, oskulační kružnice, křivost 71
7. Lokální a absolutní extrémy funkce, inflexní body 77
8. Asymptoty, průběh funkce 82
9. Taylorův polynom, Taylorova věta 85
*10. Funkce definované parametricky 88
*11. Přibližné řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$ 91

IV. Neurčitý integrál

1. Primitivní funkce, neurčitý integrál 95
2. Integrace per–partes 98
3. Substituční metoda 100
4. Integrace jednodušších racionálních funkcí 103
5. Integrace funkcí typu $\sin^n x \cdot \cos^m x$ 109
6. Integrace některých dalších typů funkcí 111
*7. Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými 114

V. Určitý (Riemannův) integrál

1. Historický přístup 119
2. Definice Riemannova integrálu 121

3. Důležité vlastnosti Riemannova integrálu 124
4. Výpočet Riemannova integrálu 127
*5. Numerická integrace 130
6. Nevlastní integrál 131
*7. Některé geometrické a fyzikální aplikace určitého integrálu 134

Doporučená literatura 136
Další literatura 136
Rejstřík 137

Úvod

Toto skriptum obsahuje přibližný soupis definic a vět, se kterými se studenti setkají v předmětu ,,Matematika I” v prvním semestru studia, spolu se stručnými poznámkami, komentáři a ilustrativními příklady. Skriptum není míněno jako zcela samostatná učebnice, ale jako pomůcka, která má společně s výkladem na přednáškách a prací na cvičeních studentům usnadnit pochopení a zvládnutí požadované látky. Tomu odpovídá zejména rozsah výkladu a omezený počet řešených i neřešených příkladů. V rámci studia je třeba si samostatně promyslet a spočítat podstatně větší množství příkladů. Vhodné příklady lze nalézt například ve sbírce [NK].

Čtenáře, kteří mají zájem se naučit anglickou matematickou terminologii, upozorňujeme na anglickou verzi čtvrtého vydání tohoto skripta (viz [Ne]), která obsahuje i stručný anglicko–český slovník užitých matematických pojmů.

Čísla odstavců nebo kapitol, jejichž obsah momentálně nepatří do požadavků ke zkoušce z Matematiky I, jsou vlevo nahoře označena symbolem $*$. Kapitolu II.4 o kvadratických plochách (takto označenou) použijete v Matematice II. Studenty bude zajímat, že důkazy vět nebo znalost odvození různých vzorců se momentálně u zkoušky z Matematiky I rovněž nevyžadují. Ve skriptu jsou však některé jednoduché důkazy nebo odvození ponechány: jednak pro zvídavější čtenáře a také proto, aby si studenti uvědomili, že matematika je exaktní věda, za jejímiž tvrzeními a výsledky logicky přesná odvození a důkazy vždy stojí. Věříme, že promyslet si a porozumět uvedeným důkazům může výrazně přispět k celkovému pochopení probírané látky.

Od školního roku 2007–08 je Matematika I na Strojní fakultě ČVUT zkoušena na dvou úrovních: A (vyšší) a B (nižší). Toto skriptum svým obsahem odpovídá úrovni A. Látka, která je požadována ke zkoušce úrovně B, je redukována co do rozsahu i náročnosti řešených úloh. Podrobnější informace studenti obdrží na přednáškách a cvičeních.

Odstavce, ve kterých definujeme nové pojmy, nejsou nazvány slovem ,,definice”, ale jsou označeny názvem zmíněného pojmu. Pojem, který je v odstavci definován, je napsán ležatým písmem a je podtržen.

Předpokládáme, že studenti jsou ze středních škol seznámeni s pojmem *množina* a že jsou jim též známy operace s množinami (*sjednocení*, *průnik*, *doplněk* a *rozdíl*). Připomínáme, že prázdná množina se značí $\emptyset$. Množinu těch bodů $x \in A$ (tj. patřících do množiny A), které mají vlastnost $V(x)$, značíme $\{ x \in A;\ V(x) \}$.

Dále předpokládáme znalost těchto pojmů:

- *zobrazení* z množiny A do množiny B (přiřazení, které každému prvku $x \in A$ přiřazuje nejvýše jediný prvek $y \in B$ – krátce to zapisujeme například takto: $F : A \to B$),
- *prosté zobrazení*,
- *zobrazení* množiny A *na* množinu B,
- *vzájemně jednoznačné zobrazení* množiny A na množinu B (prosté zobrazení množiny A na množinu B),
- *inverzní zobrazení* (značíme je F_{-1}),
- *složené zobrazení* (označujeme je $F * G$ nebo $F \circ G$),

- *definiční obor zobrazení* (značíme jej $D(F)$),
- *obor hodnot zobrazení* (značíme jej $H(F)$).

Další látkou, kterou by čtenáři měli znát ze střední školy, jsou základy matematické logiky. Jedná se zejména o pojem *výroku* a o operace s výroky:

- *negace výroku X* (označujeme ji non X),
- *konjunkce výroků X a Y* (značíme ji $X \wedge Y$ a čteme ji jako ,,oba výroky X a Y platí", ,,oba výroky X a Y jsou pravdivé" nebo pouze krátce ,,X a Y"),
- *alternativa* (nebo také *disjunkce*) *výroků X a Y* (značíme ji $X \vee Y$ a čteme ,,X nebo Y"),
- *implikace* (označujeme ji $X \Longrightarrow Y$ a čteme ,,z X plyne Y", ,,X implikuje Y", ,,platí-li X, pak platí také Y", ,,X je postačující podmínka pro Y", ,,Y je nutná podmínka pro X", ,,Y platí za předpokladu, že platí X", atd.) a
- *ekvivalence* (označujeme ji $X \Longleftrightarrow Y$ a čteme ji například: ,,X platí tehdy a jen tehdy, platí-li Y", ,,X je ekvivalentní Y", ,,X je nutná a postačující podmínka pro Y", ,,Y je nutná a postačující podmínka pro X", atd.).

Často budeme používat tzv. kvantifikátory:

- *universální* (nebo také *obecný*) *kvantifikátor* je označován symbolem $\forall$ a lze jej použít například ve spojení: $\forall\, x \in I \ :\ V(x)$ – čteme: ,,pro každé $x \in I$ platí výrok $V(x)$" nebo ,,každé $x \in I$ má vlastnost $V(x)$",
- *existenční kvantifikátor* je značen $\exists$ a používá se například ve větách tohoto typu: $\exists\, x \in I \ :\ V(x)$ – čteme to takto: ,,existuje $x \in I$ takové, že pro ně platí výrok $V(x)$", ,,existuje $x \in I$, pro něž platí $V(x)$", apod.

Kvantifikátory se často používají i ke konstrukci komplikovanějších výroků a tvrzení. Nepodceňujte je! Jejich nesprávné používání může zcela změnit smysl různých tvrzení. Porovnejte například tyto dvě věty, které se liší pouze záměnou kvantifikátorů: 1) ,,Ke každému ženatému muži existuje žena, která je jeho manželkou." 2) ,,Existuje takový ženatý muž, že každá žena je jeho manželkou."

Je-li n přirozené číslo (značíme: $n \in \mathbb{N}$), pak množinu všech uspořádaných n–tic reálných čísel budeme značit symbolem $\mathbb{R}^n$. Speciálně, množinu uspořádaných dvojic reálných čísel budeme značit $\mathbb{R}^2$, množinu uspořádaných trojic reálných čísel $\mathbb{R}^3$, atd. Výjimku budeme činit v případě $n = 1$, kdy místo $\mathbb{R}^1$ budeme většinou psát pouze $\mathbb{R}$. Prvky $\mathbb{R}^n$ budeme zapisovat například ve tvaru $[\,a_1, a_2\,]$, $[\,1, 3\,]$ (je-li $n = 2$), $[\,x_1, x_2, x_3\,]$ (je-li $n = 3$), $[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,]$ (pro obecné n), a budeme je nazývat *body* nebo také *aritmetické vektory*.

Přijmeme-li dohodu, že za *vzdálenost* dvou libovolných bodů $X = [\,x_1, x_2, \dots, x_n\,]$ a $Y = [\,y_1, y_2, \dots, y_n\,]$ z $\mathbb{R}^n$ budeme považovat číslo

$$d(X,Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

stává se z $\mathbb{R}^n$ tzv. *n–rozměrný Eukleidův prostor*, označovaný jako $\mathbb{E}_n$. Vzdálenost bodů X, Y z $\mathbb{E}_n$ (definovanou výše uvedeným výrazem) budeme též označovat $\|X - Y\|$. Ze střední školy je vám jistě známo, že $\mathbb{E}_1$ si lze představit jako přímku, $\mathbb{E}_2$ jako rovinu, apod.

I. Lineární algebra

I.1. Vektorové prostory

I.1.1. Aritmetický n–rozměrný prostor. Definujme pro libovolné dva aritmetické vektory $[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,]$, $[\,y_1, y_2, \dots, y_n\,]$ z $\mathbb{R}^n$ jejich součet předpisem

$$[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,] \; + \; [\,y_1, y_2, \dots, y_n\,] \; = \; [\,x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\,]$$

a pro libovolný aritmetický vektor $[\,x_1, x_2, \dots, x_n\,]$ a libovolné reálné číslo λ součin předpisem

$$\lambda \cdot [\,x_1, x_2, \dots, x_n\,] \; = \; [\,\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\,].$$

Množinu $\mathbb{R}^n$ s oběma takto zavedenými operacemi nazýváme *aritmetickým n–rozměrným prostorem*.

I.1.2. Vektory v $\mathbb{E}_2$ a v $\mathbb{E}_3$. Orientované úsečky AB a CD v $\mathbb{E}_2$ nazveme *ekvivalentní*, jestliže rovnoběžným posunutím úsečky AB lze docílit jejího ztotožnění s úsečkou CD. Množinu všech navzájem ekvivalentních orientovaných úseček v $\mathbb{E}_2$ nazýváme *volným vektorem* nebo krátce pouze *vektorem* v $\mathbb{E}_2$. Jakoukoliv úsečku z této množiny nazýváme *reprezentantem* příslušného vektoru. Množinu všech vektorů v $\mathbb{E}_2$ budeme značit $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$.

Každý vektor v $\mathbb{E}_2$ je jednoznačně určen svým libovolným reprezentantem. Vektory budeme označovat malými, silně tištěnými písmeny (například $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, apod.). V jakémkoliv pevně zvoleném kartézském souřadném systému můžeme každému vektoru jednoznačně přiřadit jeho *souřadnice* – je to uspořádaná dvojice čísel (v kulatých závorkách), kterou získáme tak, že za reprezentanta vektoru vezmeme orientovanou úsečku vycházející z bodu $[0, 0]$, souřadnice koncového bodu této úsečky jsou pak souřadnicemi vektoru.

Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ dva libovolné vektory v $\mathbb{E}_2$ a λ je libovolné reálné číslo, můžeme definovat součet vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a násobek vektoru $\mathbf{u}$ a čísla λ vztahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \, + \, \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, \, u_2 + v_2), \\ \lambda \cdot \mathbf{u} &= (\lambda u_1, \, \lambda u_2). \end{aligned}$$

Snadno můžeme ověřit, že takto definované operace mají následující vlastnosti:

(a) Pro libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ a libovolné reálné číslo λ patří součet $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ i součin $\lambda \cdot \mathbf{u}$ opět do $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$.

(b) Pro libovolné vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ a libovolná reálná čísla α, β platí:

(b1) $\quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \; = \; \mathbf{v} + \mathbf{u}$,

(b2) $\quad (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \; = \; \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$,

(b3) $\quad 1 \cdot \mathbf{u} \; = \; \mathbf{u}$,

(b4) $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) \; = \; (\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{u}$, (b5) $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \;=\; \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$,

(b6) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} \;=\; \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$.

(c) Existuje tzv. *nulový vektor* $\mathbf{o} = (0,0)$; pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ pak platí:

$$\mathbf{u} + \mathbf{o} = \mathbf{u}.$$

(d) Ke každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ existuje vektor $-\mathbf{u} \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ (tzv. *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{u}$) tak, že platí:

$$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{o}.$$

Vlastnosti (a) se říká ,,uzavřenost $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ vůči oběma operacím" (tj. vůči ,,sčítání vektorů" a vůči ,,násobení vektorů reálnými čísly").

Analogicky lze definovat i $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ a operace sčítání vektorů a násobení vektorů reálnými čísly v této množině. Zmíněné operace mají i ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ vlastnosti (a) – (d).

I.1.3. Vektorový prostor. Všimněte si, že operace sčítání prvků a násobení reálnými čísly v aritmetickém n–rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ mají také vlastnosti (a) – (d). Množiny $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ a $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ jsou si tedy určitým způsobem podobné. Neprázdné množiny, ve kterých jsou definovány operace sčítání prvků a násobení prvků reálnými čísly (s vlastnostmi (a) – (d) z odstavce I.1.2), se v matematice vyskytují velmi často. Takové množiny se nazývají *vektorové prostory.*

Prvky konkrétních vektorových prostorů nemusí být vždy klasické vektory, jako je tomu ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ a ve $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$. Jako příklady dalších vektorových prostorů můžeme uvést:

- množinu všech polynomů stupně menšího nebo rovného n (tj. funkcí, které mají tvar $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou reálná čísla),
- množinu všech funkcí, které mají tvar $f(x) = a_0 + a_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \cos x$, kde a_0, a_1, a_2 jsou reálná čísla,
- množinu všech posloupností reálných čísel, atd.

Rozmyslete si sami, jak lze v těchto prostorech definovat operace sčítání prvků a násobení prvků reálnými čísly tak, aby tyto operace měly již zmínění vlastnosti (a) – (d).

Vraťme se ještě k vektorovému prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$. Dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ z $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ jsou si rovny právě když jsou si rovny jejich odpovídající si souřadnice, tj. $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$. Toto jednoduché tvrzení plyne snadno z vlastností (a) – (d) z odstavce I.1.2. Obdobná tvrzení platí i pro $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ a pro $\mathbb{R}^n$.

V další části této kapitoly se budeme zabývat obecným vektorovým prostorem $\mathbb{V}$. Bude-li se vám výklad jevit příliš abstraktní, představte si, že na místě $\mathbb{V}$ stojí například $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$ nebo $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$. Prvky $\mathbb{V}$ budeme nazývat vektory a budeme je značit stejně jako prvky $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$, tj. malými tučnými písmeny. Nulový vektor bude opět značen $\mathbf{o}$.

I.1.4. Věta (o jednoznačnosti nulového prvku). *Ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ existuje jediný nulový prvek.*

Důkaz: Předpokládejme, že ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ existují dva různé nulové prvky $\mathbf{o}$ a $\mathbf{o}'$. Pak ale vzhledem k vlastnosti (c) z odstavce I.1.2 můžeme psát: $\mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{o}' =$

$\mathbf{o}' + \mathbf{o} = \mathbf{o}'$, což je spor s předpokladem, že nulové prvky $\mathbf{o}$ a $\mathbf{o}'$ jsou různé. Navzájem různé nulové prvky ve vektorovém prostoru tedy nemohou existovat. $\square$

I.1.5. Věta. *Je-li $\mathbb{V}$ vektorový prostor, $\mathbf{u} \in \mathbb{V}$ a α je reálné číslo, pak*

$$1)\quad 0 \cdot \mathbf{u} \;=\; \mathbf{o}, \qquad\qquad 2)\quad (-1) \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u}, \qquad\qquad 3)\quad \alpha \cdot \mathbf{o} \;=\; \mathbf{o}.$$

(Důkaz této věty zde neuvádíme. Lze jej však snadno provést s využitím vlastností (a) – (d) z odstavce I.1.2.)

I.1.6. Lineární závislost a nezávislost vektorů. Je-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ skupina vektorů ve vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou reálná čísla, pak vektor

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 \;+\; \alpha_2 \mathbf{u}_2 \;+\; \dots \;+\; \alpha_n \mathbf{u}_n$$

nazýváme *lineární kombinací* vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. (Lineární kombinace vektorů z $\mathbb{V}$ je opět vektorem z $\mathbb{V}$. Je to snadný důsledek bodu (a) z odstavce I.1.2.)

Skupinu vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ nazýváme *lineárně závislou,* jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (z nichž alespoň jedno je různé od nuly) tak, že

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 \;+\; \alpha_2 \mathbf{u}_2 \;+\; \dots \;+\; \alpha_n \mathbf{u}_n \;=\; \mathbf{o}.$$

Skupinu vektorů, která není lineárně závislá, nazýváme *lineárně nezávislou.*

I.1.7. Věta. *Je-li jedním ze skupiny vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ nulový vektor, je skupina $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně závislá.*

Důkaz: Nechť například první vektor z uvedené skupiny je nulový, tj. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Pak ale platí: $1 \cdot \mathbf{u}_1 + 0 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Utvořili jsme tedy lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$, která je rovna nulovému vektoru a přitom ne všechny koeficienty v této lineární kombinaci jsou nuly. Podle definice z odstavce I.1.6 je tudíž skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně závislá. $\square$

I.1.8. Věta. *Skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ (kde $n > 1$) z vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je lineárně závislá právě tehdy, je-li možné alespoň jeden z vektorů této skupiny vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů skupiny.*

Důkaz: a) Předpokládejme, že skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je lineárně závislá. Pak existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (z nichž alespoň jedno je různé od nuly – nechť je to například α_1) tak, že $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Odtud lze vypočítat:

$$\mathbf{u}_1 \;=\; -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\mathbf{u}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\,\mathbf{u}_3 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\,\mathbf{u}_n\,.$$

Vektor $\mathbf{u}_1$ je tedy lineární kombinací ostatních vektorů skupiny. Podobně, je-li $\alpha_2 \neq 0$, je možné vyjádřit $\mathbf{u}_2$ jako lineární kombinaci ostatních vektorů skupiny, atd.

b) Předpokládejme, že například vektor $\mathbf{u}_1$ je lineární kombinací ostatních vektorů, tj. existují čísla $\beta_2, \dots, \beta_n$ taková, že $\mathbf{u}_1 = \beta_2\mathbf{u}_2 + \dots + \beta_n\mathbf{u}_n$. Položíme-li $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$, je minimálně jedno z těchto čísel nenulové a přitom je $\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je tudíž lineárně závislá. $\square$

I.1.9. Věta. *Skupina vektorů* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *z vektorového prostoru* $\mathbb{V}$ *je lineárně nezávislá právě tehdy, má-li vektorová rovnice*

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o} \tag{I.1.1}$$

(pro neznámé $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$*) pouze nulové řešení* $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \dots,\ \alpha_n = 0$.
(Tvrzení této věty je okamžitým důsledkem definice lineární závislosti a nezávislosti vektorů z odstavce I.1.6.)

I.1.10. Příklad. Skupina vektorů (1,1,0), (0,2,3) a (3,5,3) v $\mathbb{E}_3$ je lineárně závislá. Rovnice (I.1.1), která má v našem případě tvar

$$\alpha_1 \cdot (1,1,0) + \alpha_2 \cdot (0,2,3) + \alpha_3 \cdot (3,5,3) = (0,0,0),$$

má totiž například toto nenulové řešení: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$. Lineární závislost zadané skupiny vektorů nyní plyne z věty I.1.9.

I.1.11. Věta. *Nechť* $\mathbb{V}$ *je vektorový prostor a* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *je skupina vektorů z* $\mathbb{V}$ *která je lineárně závislá. Pak každá skupina vektorů z* $\mathbb{V}$*, obsahující vektory* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$*, je rovněž lineárně závislá.*

<u>Důkaz:</u> Skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je lineárně závislá, tudíž existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (ze kterých alespoň jedno je různé od nuly) tak, že $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ je skupina vektorů, která vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ obsahuje. Předpokládejme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ jsou seřazeny tak, že $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2,\ \dots,\ \mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n$. Pak ale $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + 0 \cdot \mathbf{v}_{n+1} + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}_m = \mathbf{o}$. Z koeficientů $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots, 0$ je jistě alespoň jeden nenulový. Skupina vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ je proto lineárně závislá. □

I.1.12. Dimenze vektorového prostoru. Nechť n je přirozené číslo. O vektorovém prostoru $\mathbb{V}$ řekneme, že je <u>*n–rozměrný*</u> (neboli že má <u>*dimenzi*</u> rovnou n – používáme zápis $dim\, \mathbb{V} = n$), jestliže

a) v prostoru $\mathbb{V}$ existuje skupina n vektorů, která je lineárně nezávislá,

b) každá skupina více než n vektorů ve $\mathbb{V}$ je lineárně závislá.

Jinými slovy: dimenze vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých vektorů, které lze ve $\mathbb{V}$ nalézt.

I.1.13. Báze vektorového prostoru. Nechť $\mathbb{V}$ je n–rozměrný vektorový prostor. Každou lineárně nezávislou skupinu n vektorů z $\mathbb{V}$ nazýváme <u>*bází*</u> prostoru $\mathbb{V}$.

I.1.14. Poznámka. Uvědomte si, že počet vektorů v jakékoliv bázi $\mathbb{V}$ je stejný a je roven dimenzi $\mathbb{V}$.

I.1.15. Věta. *Je-li* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ *báze vektorového prostoru* $\mathbb{V}$*, pak každý vektor z* $\mathbb{V}$ *lze vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů této báze.*

<u>Důkaz:</u> a) <u>Existence vyjádření:</u> Nechť $\mathbf{v}$ je libovolně zvolený vektor z $\mathbb{V}$. Skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ je lineárně závislá (neboť je skupinou více než n vektorů). Existují tudíž čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$ (ne všechna rovna nule) tak, že

$$\alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{u}_n + \beta\mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

Kdyby bylo $\beta = 0$, plynula by odtud lineární závislost vektorů $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2 \ldots$, $\mathbf{u}_n$, což by byl spor s předpoklady věty. β je tedy různé od nuly a z výše uvedené rovnice lze $\mathbb{V}$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_n$:

$$\mathbf{v} = -\frac{\alpha_1}{\beta_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathbf{u}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta_n}\mathbf{u}_n\,.$$

b) <u>Jednoznačnost vyjádření:</u> Předpokládejme, že $\mathbf{v}$ lze napsat ještě jiným způsobem jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_n$: $\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$. Odečteme-li první vyjádření $\mathbf{v}$ od druhého, dostaneme:

$$\mathbf{o} = \left(c_1 + \frac{\alpha_1}{\beta}\right)\mathbf{u}_1 + \left(c_2 + \frac{\alpha_2}{\beta}\right)\mathbf{u}_2 + \ldots + \left(c_n + \frac{\alpha_n}{\beta}\right)\mathbf{u}_n\,.$$

Z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_n$ plyne: $c_1+\alpha_1/\beta = 0$, $c_2+\alpha_2/\beta = 0, \ldots,$ $c_n + \alpha_n/\beta = 0$. Odtud získáme rovnosti $c_1 = -\alpha_1/\beta$, $c_2 = -\alpha_2/\beta, \ldots, c_n = -\alpha_n/\beta$, které ukazují, že obě vyjádření vektoru $\mathbb{V}$ jsou stejná. □

I.1.16. Poznámka. Větu I.1.15 je možné „otočit". Tím míníme, že lze také dokázat správnost opačné implikace: *Je-li* $\mathbb{V}$ *vektorový prostor a* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_n$ *je skupina vektorů ve* $\mathbb{V}$ *která má tu vlastnost, že jakýkoliv vektor z* $\mathbb{V}$ *lze vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů této skupiny, pak vektory* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_n$ *tvoří bázi prostoru* $\mathbb{V}$.

I.1.17. Příklad. Vektory $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$. Každý vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ lze totiž zapsat jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$: $\mathbf{a} = a_1 \cdot (1,0,0) + a_2 \cdot (0,1,0) + a_3 \cdot (0,0,1)$. Vzhledem k poznámce I.1.14. zároveň dospíváme k nikterak překvapujícímu zjištění, že prostor $\mathbb{V}(\mathbb{E}_3)$ je trojrozměrný.

Podobně, aritmetické vektory $\mathbf{e}_1 = [1,0,...,0]$, $\mathbf{e}_2 = [0,1,...,0], \ldots, \mathbf{e}_n = [0,0,...,1]$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ (a tento prostor byl tedy v odstavci I.1.1. oprávněně nazván n – rozměrným).

I.1.18. Poznámka. <u>Báze vektorového prostoru není určena jednoznačně !</u> Můžete se přesvědčit o tom, že například skupiny vektorů $\mathbf{i} = (1,0)$, $\mathbf{j} = (0,1)$ a $\mathbf{u} = (2,-1)$, $\mathbf{v} = (1,1)$ tvoří obě báze vektorového prostoru $\mathbb{V}(\mathbb{E}_2)$. Každý vektorový prostor (s výjimkou tzv. triviálního vektorového prostoru, tvořeného jediným (a to nulovým) prvkem), má dokonce různých bází nekonečně mnoho.

Je-li $\mathbb{V}$ n–rozměrný vektorový prostor a je-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots , \mathbf{u}_j$ (kde $j < n$) lineárně nezávislá skupina vektorů ve $\mathbb{V}$, pak tuto skupinu lze vždy doplnit vhodnými vektory z $\mathbb{V}$ na bázi prostoru $\mathbb{V}$.

I.1.19. Podprostor vektorového prostoru. Nechť $\mathbb{V}$ je vektorový prostor a nechť $\mathbb{W}$ je podmnožina prostoru $\mathbb{V}$. Je-li $\mathbb{W}$ vektorovým prostorem (se stejně definovanými operacemi sčítání a násobení vektorů reálnými čísly jako v prostoru $\mathbb{V}$), nazýváme $\mathbb{W}$ <u>*podprostorem*</u> vektorového prostoru $\mathbb{V}$.

I.1.20. Jak poznat podprostor. Předpokládejme, že $\mathbb{W}$ je podmnožina vektorového prostoru $\mathbb{V}$. Chceme zjistit, zda $\mathbb{W}$ je podprostor $\mathbb{V}$. Operace sčítání vektorů z $\mathbb{W}$ a násobení vektorů z $\mathbb{W}$ reálnými čísly jsou definovány, protože tyto operace jsou definovány ve $\mathbb{V}$ a $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$. K tomu, abychom zjistili zda $\mathbb{W}$ je samostatným vektorovým prostorem (a tudíž podprostorem $\mathbb{V}$), tedy stačí ověřit uzavřenost $\mathbb{W}$ vůči oběma operacím. (Tj. je třeba zjistit, zda součet dvou libovolných vektorů z $\mathbb{W}$ je prvkem $\mathbb{W}$ a rovněž zda součin libovolného vektoru z $\mathbb{W}$ a libovolného reálného čísla je opět prvkem $\mathbb{W}$.)

I.1.21. Příklad. Množina všech aritmetických vektorů, které lze napsat ve tvaru $[\alpha,\ \beta,\ 0]$ (kde α, β jsou reálná čísla), je podprostorem $\mathbb{R}^3$.

Množina všech aritmetických vektorů, které lze zapsat ve tvaru $[\alpha,\ \beta,\ \gamma]$ (kde α, β, γ jsou reálná čísla, přičemž $\alpha > 0$), není podprostor $\mathbb{R}^3$.

***I.1.22. Poznámka.** Zkuste si sami dokázat tato jednoduchá tvrzení:

a) *Je-li $\mathbb{V}$ vektorový prostor a je-li $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ skupina vektorů z $\mathbb{V}$, pak množina všech možných lineárních kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ tvoří podprostor prostoru $\mathbb{V}$.* (Tento podprostor je nazýván *lineární obal* skupiny vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.)

b) *Je–li skupina vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislá, pak zároveň tvoří bázi svého lineárního obalu a dimenze lineárního obalu je tudíž rovna k.*

I.2. Matice a determinanty

I.2.1. Matice. *Maticí typu $m \times n$* nazýváme obdélníkové pole, tvořené z $m{\cdot}n$ reálných čísel (tzv. *prvků* matice), zapsaných v m řádcích a n sloupcích. Matice označujeme velkými písmeny. Pokud jejich prvky nevypisujeme přímo hodnotami, pak je značíme obvykle stejnými malými písmeny se dvěma indexy: první index udává v jakém řádku se prvek nachází a druhý index udává v jakém sloupci se prvek nachází.

I.2.2. Příklad.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0, & 2, & 3, & 4, & 8, & -5 \\ 2, & 3, & 5, & -1, & 9, & 17 \\ 3, & -8, & 7, & 6, & -4, & 23 \end{pmatrix}$$

A je matice typu $m \times n$, B je matice typu 3×6.
Je-li typ matice A známý, lze A zapsat úspornějším způsobem: $A = (a_{ij})$.

I.2.3. Rovnost dvou matic. Dvě matice pokládáme za sobě rovné, jsou-li stejného typu a mají–li na odpovídajících si místech stejné prvky.

I.2.4. Hlavní diagonála, horní trojúhelníková matice, nulová matice, transponovaná matice. Předpokládejme, že $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$.

Prvky a_{11}, a_{22}, … tvoří v matici A tzv. *hlavní diagonálu*.

Jsou-li v matici A všechny prvky pod hlavní diagonálou rovny nule, nazýváme A *horní trojúhelníkovou maticí*.

Matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule, nazýváme *nulovou maticí*.

Matici $B = (b_{ij})$ typu $n \times m$, pro jejíž prvky platí $b_{ij} = a_{ji}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$, nazýváme *transponovanou maticí* k matici A. Značíme ji A^T. (1. sloupec matice A^T je stejný jako 1. řádek matice A, 2. sloupec matice A^T je stejný jako 2. řádek matice A, atd. Jinými slovy: transponovanou matici k matici A získáme "překlopením" matice A kolem hlavní diagonály.

I.2.5. Čtvercová matice, jednotková matice. Matici typu $n \times n$ nazýváme *čtvercovou maticí*. (Čtvercová matice má stejný počet řádků, jako sloupců.)

Čtvercovou matici, která má na hlavní diagonále samé jednotky a všude mimo hlavní diagonálu nuly, nazýváme *jednotkovou maticí*. Tuto matici označujeme E.

I.2.6. Sčítání matic. Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ matice stejného typu $m \times n$, pak jejich *součtem* nazýváme matici $C = (c_{ij})$, která je rovněž typu $m \times n$ a pro její prvky platí: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. Používáme zápis $C = A + B$.

I.2.7. Násobení matic reálnými čísly. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a λ je reálné číslo, pak *součinem čísla λ a matice A* (nebo také *λ–násobkem matice A*) nazýváme matici $C = (c_{ij})$, která je rovněž typu $m \times n$ a pro její prvky platí: $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$. Používáme zápis $C = \lambda \cdot A$.

I.2.8. Příklad.

$$\begin{pmatrix} 1, & -3, & 2 \\ 4, & -1, & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1, & 2, & 2 \\ -1, & 3, & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 4 \\ 3, & 2, & -5 \end{pmatrix}, \qquad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

I.2.9. Poznámka. Matice stejného typu také odčítat: *Rozdílem matic A a B* nazýváme matici $C = A + (-1) \cdot B$. Píšeme $C = A - B$.

I.2.10. Násobení matic. Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $B = (b_{ij})$ matice typu $n \times p$, pak *součinem matic A a B* nazýváme matici $C = (c_{ij})$ typu $m \times p$, pro jejíž prvky platí: $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{mj}$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, p)$. Používáme zápis: $C = A \cdot B$.

I.2.11. Poznámka. Definice násobení matic se zdá na první pohled umělá, proto se k ní nyní ještě vrátíme. Dříve se však seznámíme s jedním pojmem:

Skalárním součinem aritmetických vektorů $[\,u_1, u_2, \ldots, u_n\,]$ a $[\,v_1, v_2, \ldots, v_n\,]$ z $\mathbb{R}^n$ nazýváme číslo $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$.

Na řádky matice A můžeme hledět jako na aritmetické vektory z $\mathbb{R}^n$ (těchto řádků je m, každý z nich má n prvků). Podobně, na sloupce matice B můžeme hledět jako na aritmetické vektory rovněž z $\mathbb{R}^n$ (těchto sloupců je p, každý z nich má n prvků). Prvek c_{ij} v matici C není nic jiného, než skalární součin i–tého řádku v matici A a j–tého sloupce v matici B.

Abychom mohli utvořit součin dvou matic A a B (v tomto pořadí), musí mít matice A tolik sloupců, kolik má matice B řádků, tj. když napíšeme typy matic A a B vedle sebe (například $m \times n,\ n \times p$), musí být druhé a třetí číslo v zápisu stejné. Jinak matice A a B násobit (v tomto pořadí) nelze.

I.2.12. Příklad. Ověřte sami výpočtem, že platí

$$\begin{pmatrix} 3, & 2, & 5 \\ 2, & -4, & 6 \\ 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1, & 5 \\ 3, & -2 \\ -2, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & 11 \\ -22, & 18 \\ 1, & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 6, & -2 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

I.2.13. Pravidla pro operace s maticemi. Předpokládejme, že A, B a C jsou matice a α, β jsou reálná čísla. Pak každá z rovností

a) $A + B = B + A$,	b) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
c) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$,	d) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$,
e) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,	f) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$,
g) $A \cdot E = A$,	h) $E \cdot B = B$,
i) $(A + B)^T = A^T + B^T$,	j) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

platí, pokud typy matice jsou takové, že operace na levých stranách mají smysl. Zkuste za tohoto předpokladu platnost rovností a) – j) sami ověřit.

Násobení matic není komutativní, tj. neplatí obecně, že $A \cdot B = B \cdot A$! Je-li například matice A typu 3×5 a B matice typu 5×7, lze utvořit součin $A \cdot B$ (je to matice typu 3×7). Součin $B \cdot A$ však utvořit vůbec nelze. Avšak i tehdy, kdy oba součiny $A \cdot B$ i $B \cdot A$ mají smysl, lze najít takové příklady, kdy $A \cdot B \neq B \cdot A$.

I.2.14. Hodnost matice. Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice A (chápaných jako aritmetické vektory) nazýváme *hodností* matice A. Značíme ji $h(A)$.

I.2.15. Příklad. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 5 \\ 1, & 3, & 7 \\ 4, & -3, & 1 \end{pmatrix}.$$

Například pomocí věty I.1.9. lze zjistit, že první dva řádky matice jsou lineárně nezávislé. Třetí řádek je lineární kombinací prvních dvou (rovná se rozdílu 3–násobku prvního řádku a 2–násobku druhého řádku). Všechny tři řádky tvoří skupinu lineárně závislou. Maximální počet lineárně nezávislých řádků je dva, proto je $h(A) = 2$.

I.2.16. Poznámka. Je přirozené položit si otázku, zda by nebylo možné definovat hodnost matice A pomocí jejích sloupců místo řádků (tj. jako maximální počet lineárně nezávislých sloupců matice A, hledíme-li na tyto sloupce jako na aritmetické vektory). Odpověď je jednoduchá: ANO. "Řádková" i "sloupcová" definice přiřazuje matici totéž číslo, jakožto její hodnost. Musíme však upozornit čtenáře, že dokázat exaktně, že pomocí obou definic skutečně získáme stejné hodnosti, není zcela jednoduché.

Zabýváme-li se složitějšími maticemi, než byla matice A v příkladu I.2.15, nepodaří se nám ihned rozpoznat, které řádky tvoří lineárně nezávislou skupinu a které jsou naopak lineární kombinací ostatních řádků. Proto se otázce stanovení hodnosti matice budeme v několika následujících odstavcích věnovat podrobněji.

I.2.17. Věta. *Nechť A je horní trojúhelníková matice typu $m \times n$, která má všechny prvky na hlavní diagonále různé od nuly. Pak $h(A) = \min\{m; n\}$.*

Rozmyslete si sami, že pro matici vyhovující předpokladům této věty platí: $\min\{m;\, n\}$ = počet nenulových řádků.

I.2.18. Příklad. Místo obecného důkazu věty I.2.17 se zabývejme speciálním příkladem: Předpokládejme, že

$$A = \begin{pmatrix} 3, & 3, & 5, & 0, & -3, & 8 \\ 0, & 1, & 7, & -6, & 4, & 3 \\ 0, & 0, & 5, & 14, & 4, & 2 \end{pmatrix}.$$

Ukažme, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé. Sestavíme vektorovou rovnici

$$\alpha \cdot (3,\, 3,\, 5,\, 0,\, -3,\, 8) + \beta \cdot (0,\, 1,\, 7,\, -6,\, 4,\, 3) + \gamma \cdot (0,\, 0,\, 5,\, 14,\, 4,\, 2) = (0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0).$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici do souřadnic a postupujeme-li od první souřadnice, zjistíme, že existuje jediné řešení: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Lineární nezávislost řádků matice A nyní plyne z věty I.1.9. Tyto lineárně nezávislé řádky jsou tři, proto je $h(A) = 3$.

Podobně, matice

$$\begin{pmatrix} 1, & 3, & -2 \\ 0, & 4, & 7 \\ 0, & 0, & 5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2, & 3, & 0, & 5 \\ 0, & -1, & 5, & 0 \\ 0, & 0, & 15, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 0, & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & 2, & -5, & 8 \end{pmatrix}$$

mají postupně hodnosti 3, 4, 2, 1, 1.

I.2.19. Ekvivalentní úpravy matice. Máme-li určit hodnost obecné matice, pak pomocí tzv. *ekvivalentních úprav* (které nemění hodnost matice) převedeme nejprve na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále) a její hodnost pak určíme pomocí věty I.2.17. Ekvivalentní úpravy, které budeme používat, jsou tyto:

a) *změna pořadí řádků,*

b) *vynásobení některého řádku nenulovým číslem,*

c) *přičtení k některému řádku lineární kombinace ostatních řádků (speciálně, přičtení násobku jiného řádku),*

d) *vynechání řádku, který je lineární kombinací ostatních řádků (speciálně, vynechání řádku obsahujícího samé nuly nebo vynechání řádku, který je násobkem nějakého jiného řádku).*

Skutečnost, že tyto úpravy nemění hodnost matice, dokazovat nebudeme. Úpravy z bodů a) – d) lze provádět i se sloupci matice, hodnost se rovněž nemění.

Postup, jak pomocí ekvivalentních úprav převést libovolnou matici na horní trojúhelníkovou matici (s nenulovými prvky na hlavní diagonále), se nazývá *Gaussův algoritmus*. Tento algoritmus vysvětlíme na příkladu:

I.2.20. Příklad. Určíme hodnost matice

$$A = \begin{pmatrix} 2, & -1, & 1, & 8, & 2 \\ 4, & -3, & 5, & 1, & 7 \\ 8, & -6, & 8, & 12, & 12 \\ 6, & -4, & 6, & 9, & 9 \end{pmatrix}.$$

1. krok: Jelikož $a_{11} \neq 0$, první řádek opíšeme. (Kdyby bylo $a_{11} = 0$, pak bychom zaměnili řádky nebo sloupce matice tak, aby na místě a_{11} byl nenulový prvek.) Pod prvek a_{11} se nyní snažíme dostat samé nuly. Proto nejprve 1. řádek násobíme číslem (-2) a přičteme ke 2. řádku, poté 1. řádek násobíme číslem (-4) a přičteme ke 3. řádku a nakonec 1. řádek násobíme číslem (-3) a přičteme ke 4. řádku. Získáme matici:

$$\begin{pmatrix} 2, & -1, & 1, & 8, & 2 \\ 0, & -1, & 3, & -15, & 3 \\ 0, & -2, & 4, & -20, & 4 \\ 0, & -1, & 3, & -15, & 3 \end{pmatrix}.$$

2. krok: 1. řádek opíšeme. Jelikož na místě 2,2 je nenulový prvek, opíšeme i 2. řádek. Pod prvek na místě 2,2 se nyní snažíme dostat samé nuly. To se podaří, jestliže 2. řádek vynásobíme číslem (-2) a přičteme ke 3. řádku a nakonec 2. řádek odečteme od 4. řádku. Získáme matici:

$$\begin{pmatrix} 2, & -1, & 1, & 8, & 2 \\ 0, & -1, & 3, & -15, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 10, & -2 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}.$$

3. krok: Poslední řádek obsahuje samé nuly, proto jej vynecháme. Získáme horní trojúhelníkovou matici:

$$\begin{pmatrix} 2, & -1, & 1, & 8, & 2 \\ 0, & -1, & 3, & -15, & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 10, & -2 \end{pmatrix}.$$

Poslední matice má podle věty I.2.17 hodnost 3, proto i $h(A) = 3$.

I.2.21. Determinant. Nechť A je <u>čtvercová</u> matice. <u>*Determinantem*</u> matice A nazýváme číslo, které označujeme <u>$\det A$</u> a které lze matici A přiřadit podle těchto pravidel:

a) Je-li $A = (a)$ čtvercová matice typu 1×1, pak $\det A = a$.

b) Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$ (pro $n > 1$), vybereme libovolný řádek matice A (označíme jej jako i–tý) a položíme

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}, \tag{I.2.1}$$

kde A_{ij} je tzv. <u>*doplněk prvku a_{ij}*</u> v matici A. Tento doplněk je roven $(-1)^{i+j} \cdot A^*_{ij}$, kde A^*_{ij} je determinant čtvercové matice typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z matice A vynecháním i–tého řádku a j–tého sloupce.

I.2.22. Poznámka. Součtu (I.2.1.) říkáme <u>*rozvoj determinantu podle i–tého řádku*</u>. Lze dokázat, že nezáleží na tom, podle kterého řádku determinant rozvíjíme, vždy dospějeme ke stejnému výsledku. Determinant lze dokonce rozvíjet i podle libovolného sloupce. <u>*Rozvoj determinantu podle j–tého sloupce*</u> vypadá následovně:

$$\det A \;=\; a_{1j}\cdot A_{1j} \,+\, a_{2j}\cdot A_{2j} \,+\, \ldots \,+\, a_{nj}\cdot A_{nj}.$$

Ověřte sami, že pro čtvercovou matici $A=(a_{ij})$ typu 2×2 platí:

$$\det A \;=\; a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}.$$

Zapamatujte si tuto jednoduchou formuli!

Rozvojem determinantu podle některého řádku nebo sloupce převedeme otázku výpočtu determinantu matice typu $n\times n$ na otázku výpočtu n determinantů matic typu $(n-1)\times(n-1)$. Každý z těchto determinantů lze opět rozvést podle některého z jeho řádků nebo sloupců a tak problém převést na výpočet determinantů matic typu $(n-2)\times(n-2)$. Takto lze postupovat, až se dostaneme k maticím typu 2×2 (nebo dokonce 1×1), jejichž determinanty umíme počítat jinak.

I.2.23. Poznámka. Determinant matice $A=(a_{ij})$ často zapisujeme podobně jako matici A, pouze místo kulatých závorek používáme svislé čáry.

I.2.24. Sarussovo pravidlo. Při výpočtu determinantů matic typu 3×3 lze kromě rozvoje podle některého řádku či sloupce použít ještě tzv. "Sarussovo pravidlo":

$$\begin{aligned}\det A \;&=\; a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} - \\ &\quad - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}.\end{aligned}$$

Správnost tohoto vzorce lze dokázat pomocí rozvoje podle některého řádku či sloupce matice A. Vzorec si můžeme snadno zapamatovat pomocí následujícího schématu:

$$\begin{array}{c} \left|\begin{array}{ccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}\\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}\end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}\\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}\end{array}\end{array}$$

$$\ominus \qquad\qquad\qquad\qquad \oplus$$

I.2.25. Cvičení. Ověřte sami, že

a) $\begin{vmatrix} 2, & 5\\ 3, & 7\end{vmatrix} = -1,$ b) $\begin{vmatrix} 4, & 8, & 3\\ 5, & -1, & 0\\ 3, & 2, & -4\end{vmatrix} = 215,$ c) $\begin{vmatrix} 4, & 2, & 5, & 0\\ 2, & -1, & 0, & 2\\ 3, & 6, & -8, & 2\\ 7, & 1, & 0, & 1\end{vmatrix} = -501.$

Při výpočtu posledního determinantu je výhodné použít rozvoj podle 3. sloupce. (Proč?)

I.2.26. Geometrický význam determinantu. a) Předpokládejme nejprve, že A je čtvercová matice typu 2×2. Považujme její řádky za vektory $\mathbf{a}_1$ a $\mathbf{a}_2$. Doplňme v rovině $\mathbb{E}_2$ oba vektory na rovnoběžník. Jednoduchým výpočtem se můžete přesvědčit o tom, že plošný obsah tohoto rovnoběžníku je roven $|\det A|$.

b) Nyní předpokládejme, že A je čtvercová matice typu 3×3, jejíž řádky tvoří vektory vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Doplňme v $\mathbb{E}_3$ tyto vektory na rovnoběžnostěn. Pak objem tohoto rovnoběžnostěnu je roven $|\det A|$.

c) Obecně, nechť A je čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž řádky tvoří vektory $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. Doplňme v $\mathbb{E}_n$ tyto vektory na n–rozměrný rovnoběžnostěn. Pak n–rozměrný objem tohoto rovnoběžnostěnu je roven $|\det A|$.

Tvrzení a), b), c) zůstávají v platnosti, pracujeme-li se sloupci matice A místo s jejími řádky.

I.2.27. Důležité vlastnosti determinantu. Znalost následujících vět je důležitá při výpočtech determinantů. Předpokládáme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$ $(n > 1)$.

a) Obsahuje-li některý řádek (nebo sloupec) matice A samé nuly, je $\det A = 0$. (Je to patrné, rozvineme-li determinant podle nulového řádku nebo sloupce.)

b) $\det A = \det A^T$

c) Vyměníme-li v matici A navzájem dva řádky (nebo sloupce), je determinant nové matice roven $-\det A$.

d) Jsou-li dva řádky (nebo sloupce) v matici A stejné, je $\det A = 0$. (Je to důsledek bodu c): vyměníme-li navzájem dva stejné řádky, je podle bodu c) determinant nové matice roven $-\det A$. Nová matice je ale stejná jako A, její determinant je tudíž roven $\det A$. Z rovnosti $-\det A = \det A$ plyne: $\det A = 0$.)

e) Vynásobíme-li některý řádek (nebo sloupec) matice A číslem λ, je determinant nové matice roven $\lambda \cdot \det A$. (Lze se o tom snadno přesvědčit, rozvineme-li determinant nové matice podle vynásobeného řádku nebo sloupce.)

f) Je-li některý řádek (respektive sloupec) matice A násobkem jiného řádku (respektive sloupce), je $\det A = 0$. (Je to okamžitý důsledek bodů d) a e).)

g) Je-li některý řádek (respektive sloupec) matice A lineární kombinací ostatních řádků (respektive sloupců), je $\det A = 0$. (Lze se o tom přesvědčit, rozvineme-li determinant matice A podle toho řádku (respektive sloupce), který je lineární kombinací ostatních řádků (respektive sloupců) a použijeme-li body e) a d).)

h) Determinant se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku (respektive sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (respektive sloupců).

i) Jsou-li A a B čtvercové matice stejného typu, je $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

I.2.28. Poznámka. Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ (pro libovolné $n \in \mathbb{N}$) je roven 1.

Obecněji: *Determinant čtvercové matice, která má buď pod hlavní diagonálou nebo nad ní samé nuly (tj. také determinant čtvercové horní trojúhelníkové matice) je roven součinu prvků na hlavní diagonále.* Zkuste se o pravdivosti tohoto jednoduchého tvrzení sami přesvědčit.

(Termín „čtvercová horní trojúhelníková matice" zní poněkud podivně, nicméně po pečlivém přečtení definice čtvercové a horní trojúhelníkové matice uvidíte, že adjektiva „čtvercová" a „horní trojúhelníková" nejsou ve sporu.)

Determinant matice A typu $n \times n$ jsme definovali v odstavci I.2.21 pomocí rozvoje podle řádku (nebo sloupce). Determinanty „menších" matic lze pomocí těchto rozvojů skutečně i počítat. Výpočet determinantů ,,větších" matic pomocí rozvojů podle řádků nebo sloupců by však vyžadoval provedení nesmírně velkého množství operací. (Například pro matici typu 100×100 by na to ani moderním počítačům nestačila doba, po kterou existuje náš vesmír.) Takové determinanty lze počítat jinými (tzv. numerickými) metodami. Například: Pomocí úprav z bodu h) v odstavci I.2.27 lze determinant převést na determinant matice, která má pod hlavní diagonálou samé nuly. Poté je možné využít tvrzení z první části tohoto odstavce. O numerických metodách se dozvíte více v předmětu ,,Numerická matematika" ve druhém ročníku studia.

I.2.29. Regulární a singulární matice. Čtvercovou matici typu $n \times n$, která má maximální možnou hodnost (tj. n) nazýváme *regulární maticí*.

Čtvercovou matici, která není regulární, nazýváme *singulární maticí*.

I.2.30. Inverzní matice. Předpokládejme, že A a E jsou čtvercové matice typu $n \times n$, přičemž E je jednotková matice. Čtvercovou matici A^{-1} typu $n \times n$ nazýváme *inverzní maticí* k matici A, jestliže platí

$$A \cdot A^{-1} = E.$$

Z následujících odstavců je patrné, že inverzní matice A^{-1} nemusí existovat ke každé čtvercové matici A!

I.2.31. Věta. *Nechť A je čtvercová matice. Pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

a) *Matice A je regulární.*

b) $\det A \neq 0$.

c) *K matici A existuje inverzní matice A^{-1}.*

(Důkaz této věty vynecháme. Tato věta mimo jiné říká, kdy ke čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}.)

I.2.32. Věta. *Jsou-li A a B regulární matice téhož typu, je matice $A \cdot B$ rovněž regulární. Platí:*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Důkaz: Matice A i B jsou regulární, podle věty I.2.31 mají nenulové determinanty. Z vlastnosti I.2.27 h) plyne: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, což je různé od 0. Podle věty I.2.31 je matice $A \cdot B$ regulární. Vzorec pro $(A \cdot B)^{-1}$ plyne z rovností $(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E$. □

I.2.33. Věta. *Je-li A regulární matice, pak A^{-1} je také regulární matice a platí:*

$$\text{a)} \quad (A^{-1})^{-1} = A, \qquad\qquad \text{b)} \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Důkaz: a) Kdyby A^{-1} byla singulární matice, platilo by: $1 = \det E = \det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det A \cdot 0 = 0$, což ale není možné. Matice A^{-1} je tedy regulární. Dále zřejmě platí: $(A^{-1})^{-1} = (A \cdot A^{-1}) \cdot (A^{-1})^{-1} = A \cdot [\, A^{-1} \cdot (A^{-1})^{-1} \,] = A \cdot E = A$.

b) Vzorec $A \cdot A^{-1} = E$ je nám již známý. Zbývá tedy ukázat, že také $A^{-1} \cdot A = E$. Označme $B = A^{-1}$. Zřejmě platí: $A^{-1} \cdot A = B \cdot (A^{-1})^{-1} = B \cdot B^{-1} = E$. □

I.2.34. Věta. *Pokud ke čtvercové matici A existuje inverzní matice A^{-1}, je určena jednoznačně.*

Důkaz: Předpokládejme, že A_I^{-1} a A_{II}^{-1} jsou obě inverzní matice k matici A. Pak platí:

a) $A_I^{-1} \cdot A \cdot A_{II}^{-1} = (A_I^{-1} \cdot A) \cdot A_{II}^{-1} = E \cdot A_{II}^{-1} = A_{II}^{-1}$,

b) $A_I^{-1} \cdot A \cdot A_{II}^{-1} = A_I^{-1} \cdot (A \cdot A_{II}^{-1}) = A_I^{-1} \cdot E = A_I^{-1}$.

Odtud plyne, že $A_I^{-1} = A_{II}^{-1}$. To znamená, že inverzní matice (pokud existuje) je určena jednoznačně. □

I.2.35. Výpočet inverzní matice. Praktickou otázkou je, jak k regulární matici A typu $n \times n$ inverzní matici A^{-1} vypočítat. Lze například dokázat, že

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}, & \ldots, & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}, & \ldots, & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

kde A_{ij} jsou doplňky prvků a_{ij} v matici A (viz odstavec I.2.21, bod b). Používání tohoto vzorce však pro větší n není výhodné vzhledem k pracnosti výpočtů prvků A_{ij}. Na cvičení se proto seznámíte s méně pracnou metodou, založenou na podobném postupu, jako je Gaussův algoritmus popsaný v příkladu I.2.20. Metoda je též vysvětlena v příkladu 159 na str. 9 a 10 ve skriptu [NK].

I.3. Soustavy lineárních algebraických rovnic

I.3.1. Základní pojmy. Soustavu rovnic

$$\text{(I.3.1)} \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

(kde a_{11}, a_{12}, $\ldots$, a_{mn}, b_1, b_2, $\ldots$, b_m jsou zadaná reálná čísla a x_1, x_2, $\ldots$, x_n jsou neznámé) nazýváme *soustavou lineárních algebraických rovnic*. Matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} & b_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

nazýváme *matice soustavy* (I.3.1) a *rozšířená matice soustavy* (I.3.1). Označme dále

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

X je matice typu $n \times 1$ a B je matice typu $m \times 1$. Pomocí těchto matic můžeme soustavu (I.3.1) zapsat podstatně úspornějším způsobem:

$$A \cdot X = B. \tag{I.3.1}$$

Za řešení soustavy (I.3.1) považujeme každou uspořádanou n–tici reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, která soustavě (I.3.1) vyhovuje. Na řešení soustavy lze tudíž nahlížet jako na aritmetické vektory, tj. prvky $\mathbb{R}^n$. Věříme, že nemůže dojít k nedorozumění, budeme-li řešení chápané jako aritmetický vektor označovat stejně, jako řešení chápané jako matice typu $n \times 1$ (tj. v obou případech například jako X).

Jsou-li všechna čísla $b_1, b_2, \dots, b_m$ rovna nule, nazýváme soustavu (I.3.1) *homogenní*. V opačném případě nazýváme soustavu (I.3.1) *nehomogenní*. Homogenní soustavu můžeme úsporným způsobem zapsat:

$$A \cdot X = O, \tag{I.3.2}$$

kde O je nulová matice typu $m \times 1$.

Nehomogenní soustava nemusí mít vždy řešení. (Příklad: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$) Naproti tomu homogenní soustava má vždy alespoň jedno, a to nulové, řešení: $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (též nazývané *triviální řešení*). Samozřejmě, v mnoha případech má i další, nenulová řešení.

Dvě soustavy rovnic se nazývají *ekvivalentní*, jestliže množina všech řešení jedné soustavy je stejná, jako množina všech řešení druhé soustavy.

Naším dalším cílem bude naučit se nalézt všechna řešení soustavy (I.3.1) a seznámit se se strukturou množiny všech řešení soustavy (I.3.1) (případně (I.3.2)).

I.3.2. Gaussova eliminační metoda. Touto metodou lze řešit soustavu (I.3.1). Podrobněji se s ní seznámíme na cvičení, základní kroky postupu jsou však tyto:

1. krok: Napíšeme rozšířenou matici soustavy. Tuto matici převádíme na horní trojúhelníkovou matici pomocí úprav, popsaných v bodech a) – d) v odstavci I.2.19 a v příkladu I.2.20. (Úpravy a) – d) provádíme s řádky matice. Některé úpravy lze s jistými komplikacemi provádět i se sloupci, v tomto výkladu se takovými případy ale nezabýváme.)

2. krok: K získané matici opět přiřadíme soustavu rovnic (ekvivalentní s původní soustavou) a tuto soustavu řešíme postupně od poslední až po první rovnici. Na každou z rovnic přitom hledíme jako na jednu rovnici pro jednu neznámou – tu neznámou, která má v rovnici nejnižší index.

2a) Tento postup umožní v případě, kdy poslední rovnice má tvar $c_n x_n = \gamma$ (kde $c_n \neq 0$) z této rovnice jednoznačně spočítat x_n, po dosazení za x_n do předposlední rovnice odtud spočítat x_{n-1}, atd.

2b) Má-li poslední rovnice tvar $0 = \gamma$, kde $\gamma \neq 0$, soustava nemá řešení.

2c) Má-li poslední rovnice tvar $c_h x_h + c_{h+1} x_{h+1} + \cdots + c_n x_n = \gamma$, kde $c_h \neq 0$, pak $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_n$ položíme rovny obecným parametrům (které můžeme značit například $p_1, p_2, \dots, p_{n-h}$). Z rovnice vyjádříme x_h a v postupu pokračujeme dosazením za x_h, x_{h+1}, ..., x_n do předposlední rovnice. Soustava má nyní nekonečně mnoho řešení, různá konkrétní řešení získáme konkrétní volbou parametrů p_1, p_2, ..., p_{n-h}.

I.3.3. Poznámka. Zabývejme se nejprve podrobněji homogenní soustavou (I.3.2). Při jejím řešení Gaussovou eliminační metodou samozřejmě nemůže nastat případ 2b). (Poslední sloupec rozšířené matice soustavy obsahuje samé nuly a úpravami z bodů a) – d) z odstavce I.2.19 na tom nic nezměníme. Z tohoto důvodu při řešení homogenní soustavy můžeme pracovat pouze s maticí soustavy místo rozšířené matice soustavy). Soustava má tedy vždy řešení – jediné, triviální (v případě 2a), nebo nekonečně mnoho řešení (v případě 2c). Následující věta poskytuje důležitou informaci o tom, jakou má množina všech řešení v tomto posledním případě strukturu.

I.3.4. Věta. *Množina všech řešení homogenní soustavy (I.3.2) je podprostor aritmetického n–rozměrného prostoru $\mathbb{R}^n$, který má dimenzi rovnou $n - h(A)$.*

Důkaz: Množina všech řešení homogenní soustavy (I.3.2) je podmnožinou $\mathbb{R}^n$ (neboť každý její prvek patří do $\mathbb{R}^n$). Jsou-li X a Y řešení soustavy (I.3.2), platí: $A\cdot(X+Y) = A\cdot X + A\cdot Y = O+O = O$, tj. $X+Y$ je také řešením soustavy (I.3.2). Podobně, je-li X řešení soustavy (I.3.2) a λ je libovolné reálné číslo, je $A\cdot(\lambda X) = \lambda(A\cdot X) = \lambda O = O$, tj. λX je také řešením soustavy (I.3.2). Množina všech řešení homogenní soustavy (I.3.2) je tedy uzavřená vzhledem k operacím ,,sčítání" a ,,násobení reálnými čísly". Proto je podprostorem $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení o dimenzi tohoto podprostoru plyne z věty I.2.17 a z postupu, popsaného v odstavci I.3.2. (Dimenze je rovna počtu parametrů, které jsou v bodě 2c) v odstavci (I.3.2) označeny p_1, p_2, ..., p_{n-h} – zkuste si sami rozmyslet proč.) □

I.3.5. Příklad. Řešme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0, \\ 5x_1 & - & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 0, \\ 3x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0. \end{array}$$

S maticí soustavy provedeme dle návodu z odstavců I.3.2 a I.2.19 úpravy:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1, & -3 \\ 5, & -2, & -8 \\ 3, & -4, & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & -3 \\ 0, & -7, & 7 \\ 0, & -7, & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & -3 \\ 0, & -7, & 7 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1, & 1, & -3 \\ 0, & -7, & 7 \end{pmatrix}.$$

Poslední matici můžeme zpětně přiřadit soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 0, \\ & - & 7x_2 & + & 7x_3 & = & 0. \end{array}$$

Položíme $x_3 = p$ (kde p je parametr) a ze druhé rovnice vypočítáme: $x_2 = p$. Po dosazení za x_1 a x_2 do první rovnice vypočítáme: $x_1 = 2p$. Řešení tedy můžeme obecně vyjádřit: $[x_1, x_2, x_3] = [2p, p, p] = [2, 1, 1]\,p$. Odtud je též patrné, že řešení existuje nekonečně mnoho a množina všech řešení tvoří jednorozměrný podprostor $\mathbb{R}^3$, jehož bází je aritmetický vektor $[2, 1, 1]$. To koresponduje s tím, že $1 = 3 - 2$ (3 je počet neznámých, 2 je hodnost matice soustavy) – viz větu I.3.4.

I.3.6. Poznámka. Je-li hodnost matice A rovna počtu neznámých, tj. n, pak množina všech řešení homogenní soustavy (I.3.2) je podprostorem $\mathbb{R}^n$ dimenze $n - n$, tj. nula. Takový podprostor obsahuje jediný prvek – nulový (tj. n–tici samých nul). Toto je tedy přesně ten případ, kdy homogenní soustava (I.3.2) má pouze triviální (= nulové) řešení.

Popsaný případ nastává například tehdy, je-li matice A čtvercová a regulární. Pak homogenní soustava $A \cdot X = O$ má jediné, a to nulové, řešení. Naopak, je-li matice A singulární, je číslo $n - h(A)$ kladné. Množina všech řešení soustavy $A \cdot X = O$ podle věty I.3.4 tvoří vektorový prostor kladné dimenze – soustava tedy má i nenulová řešení.

Nyní se vrátíme k obecné soustavě (I.3.1), která může být homogenní i nehomogenní. Následující věta je velmi důležitá. Umožňuje totiž rozlišit kolik řešení soustava má, aniž ji řešíme.

I.3.7. Frobeniova věta.

I. Soustava lineárních algebraických rovnic (I.3.1) (pro n neznámých) má řešení právě tehdy, je-li $h(A) = h(A \,|\, B)$.

II. Je-li $h(A) = h(A \,|\, B) = n$, má soustava (I.3.1) jediné řešení.
Je-li $h(A) = h(A \,|\, B) < n$, má soustava (I.3.1) nekonečně mnoho řešení.

***I.3.8. Poznámka.** Zabývejme se posledním případem, kdy hodnosti obou matic jsou rovny h, přičemž $h < n$. Ukažme, jakou má množina všech řešení strukturu. Podle věty I.3.4 tvoří množina všech řešení příslušné homogenní soustavy (I.3.2) vektorový prostor (který je podprostorem $\mathbb{R}^n$) dimenze $n - h$. Je-li $X_1, \ldots, X_{n-h}$ báze tohoto prostoru, můžeme řešení homogenní soustavy (I.3.2) obecně vyjádřit ve tvaru $X_H = c_1 X_1 + \cdots + c_d X_{n-h}$. Známe-li nějaké konkrétní řešení Y nehomogenní soustavy (I.3.1), můžeme všechna řešení nehomogenní soustavy (I.3.1) symbolicky zapsat ve tvaru:

$$X = c_1 X_1 + \ldots + c_{n-h} X_{n-h} + Y. \tag{I.3.3}$$

To znamená (řečeno ne zcela přesně), že probíhají-li $c_1, \ldots, c_{n-h}$ nezávisle na sobě množinou všech reálných čísel, probíhá X množinou všech řešení nehomogenní soustavy (I.3.1). X se proto často nazývá *obecné řešení* soustavy (I.3.1).

I.3.9. Cramerovo pravidlo. Nyní se zabývejme speciálním případem, kdy soustava (I.3.1) je soustavou n lineárních rovnic pro n neznámých. Matice soustavy je v tomto případě čtvercová. Z Frobeniovy věty bezprostředně plyne toto důležité tvrzení:

Je-li matice A soustavy rovnic (I.3.1) regulární, má soustava jediné řešení.

(Rozmyslete si sami, proč tomu tak je.) Řešení lze v tomto případě, kromě Gaussovy eliminační metody, také získat pomocí vzorců

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

kde $\Delta = \det A$ a Δ_i je determinant čtvercové matice, která vznikne z matice A po nahrazení i–tého sloupce sloupcem pravých stran soustavy rovnic (I.3.1).

(Při odvozování tohoto vzorce lze vyjít z maticového zápisu soustavy: $A \cdot X = B$, z následného zápisu vektoru řešení ve tvaru $X = A^{-1} \cdot B$ a z vyjádření A^{-1} pomocí vzorce z odstavce I.2.35.)

I.4. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic

I.4.1. Motivace. V zájmu zjednodušení zápisu bude v této kapitole výhodné vektorem rozumět n–tici čísel, zapsaných do sloupce. Na takový vektor lze hledět jako na matici typu $n \times 1$. Vektory zde budeme proto značit stejně jako matice, tj. velkými písmeny.

Předpokládejme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$. V matematice i jejích aplikacích se často setkáváme s otázkou, zda existuje nenulový vektor $X \in \mathbb{V}(\mathbb{E}_n)$ takový, že součin $A \cdot X$ je vektorem, ležícím na stejné přímce, jako X. Skutečnost, že $A \cdot X$ leží na stejné přímce jako X, znamená, že pro vhodné číslo λ platí: $A \cdot X = \lambda X$. Důležitou otázkou není jenom nalezení takových vektorů X, ale také příslušných čísel λ. Řešení těchto problémů má velký význam například v teorii stability mechanických soustav.

Protože rovnice $A \cdot X = \lambda X$ může obecně mít komplexní řešení, budeme v této kapitole připouštět možnost, že λ je komplexní číslo a rovněž souřadnice vektoru X nejsou pouze reálná, ale i komplexní čísla. O čtvercové matici A, se kterou zde pracujeme, však předpokládáme, že jejími prvky jsou pouze reálná čísla.

I.4.2. Vlastní číslo, vlastní vektor. Komplexní číslo λ nazýváme *vlastním číslem* čtvercové matice A typu $n \times n$, existuje-li nenulový vektor X takový, že

$$A \cdot X = \lambda X.$$

Takový vektor X se nazývá *vlastním vektorem* matice A odpovídajícím vlastnímu číslu λ.

I.4.3. Poznámka. Vlastní vektor není určen jednoznačně, vždy je jich nekonečně mnoho. Je-li totiž $A \cdot X = \lambda\, X$ (tj. X je vlastním vektorem matice A odpovídajícím vlastnímu číslu λ) a $k \in \mathbb{C}$, $k \neq 0$, pak také platí: $A \cdot (kX) = \lambda\,(kX)$, neboli vektor kX je také vlastním vektorem matice A odpovídajícím vlastnímu číslu λ.

I.4.4. Výpočet vlastních čísel. Rovnici $A \cdot X = \lambda\, X$ lze psát v ekvivalentním tvaru $A \cdot X - \lambda\, E \cdot X = O$, neboli $(A - \lambda E) \cdot X = O$. ($E$ je jednotková matice typu $n \times n$ a O je nulový vektor, tj. nulová matice typu $n \times 1$.) Na vektorovou rovnici $(A - \lambda E) \cdot X = O$ lze hledět jako na soustavu homogenních lineárních algebraických rovnic pro neznámé složky vektoru X. Tato soustava má nenulové řešení X právě když hodnost matice soustavy, tj. matice $A - \lambda E$, je menší než n. (Viz větu I.3.4 a poznámku I.3.6.) Nerovnost $h(A - \lambda E) < n$ vyjadřuje požadavek, aby matice $A - \lambda E$ byla singulární (viz odstavec I.2.29). To je splněno právě tehdy, je-li

$$\det(A - \lambda E) = 0. \qquad \text{(I.4.1)}$$

(Viz větu I.2.31.) Nenulový vektor X vyhovující rovnici $A \cdot X = \lambda\, X$ tedy existuje právě tehdy, platí-li (I.4.1). Rovnici (I.4.1) (pro neznámou λ) nazýváme *charakteristickou rovnicí* matice A. Jejím řešením získáme všechna vlastní čísla matice A.

I.4.5. Příklad. Jaká má vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 5, & 5 \end{pmatrix}$?

Řešení: Charakteristická rovnice matice A má tvar

$$\det(A-\lambda E) \;=\; \begin{vmatrix} 3-\lambda, & 4 \\ 5, & 5-\lambda \end{vmatrix} \;=\; (3-\lambda)\cdot(5-\lambda) - 4\cdot 5 \;=\; 0,$$

tj. $\lambda^2 - 8\lambda - 5 \;=\; 0$. Řešení je $\lambda_1 = 4+\sqrt{21}$ a $\lambda_2 = 4-\sqrt{21}$.

I.4.6. Výpočet vlastních vektorů. Vlastní, vektory odpovídající vlastnímu číslu λ, můžeme najít řešením homogenní soustavy lineárních algebraických rovnic

$$(A-\lambda E)\cdot X \;=\; O$$

pro neznámé $x_1,\dots,x_n$, které jsou složkami vektoru X.

I.4.7. Příklad. Najděte vlastní vektory matice A z příkladu I.4.5, které odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4+\sqrt{21}$.

<u>Řešení:</u> Po dosazení hodnoty $4+\sqrt{21}$ za λ do vektorové rovnice $(A-\lambda E)\cdot X = O$ a po rozepsání do souřadnic obdržíme soustavu lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} (-1-\sqrt{21})\,x_1 \;&+\; 4\,x_2 \;=\; 0, \\ 5\,x_1 \;&+\; (1-\sqrt{21})\,x_2 \;=\; 0. \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení: $x_1 = (1-\sqrt{21})p$, $x_2 = -5p$ (kde $p \in \mathbb{C}$). Každý vektor X s těmito souřadnicemi x_1, x_2 (kde $p \neq 0$ neboť X nesmí být nulovým vektorem) je hledaný vlastní vektor.

I.4.8. Poznámka. Je-li λ reálné vlastní číslo matice A, pak lze nalézt odpovídající vlastní vektor X, jehož složky jsou také reálnými čísly. To znamená, že k reálným vlastním číslům lze nalézt reálné vlastní vektory.

I.4.9. Poznámka. Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercových matic mají řadu dalších zajímavých vlastností. Například:

a) *Vlastní vektory matice A, odpovídající různým vlastním číslům, jsou lineárně nezávislé.*

   (Ukažme to pro jednoduchost pouze pro skupinu dvou vlastních vektorů X_1 a X_2, odpovídajících vlastním číslům λ_1 a λ_2: jsou-li vektory lineárně závislé, existuje $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ takové, že $X_2 = k\,X_1$. Pak ale $A\cdot X_2 = A\cdot k\,X_1 = k\,A\cdot X_1 = k\,\lambda_1 X_1 = \lambda_1 X_2$. Odtud vidíme, že X_2 je vlastní vektor, odpovídající vlastnímu číslu λ_1. To znamená, že $\lambda_2 = \lambda_1$. Naopak tedy platí: je-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$, pak vlastní vektory X_1 a X_2 nemohou být lineárně závislé.)

b) *Matice A má vlastní číslo 0 právě když je singulární.*

   (A má vlastní číslo 0 právě když existuje nenulový vektor X takový, že $A\cdot X = 0\cdot X = O$. Na tuto vektorovou rovnici lze nahlížet jakožto na soustavu n lineárních algebraických rovnic se čtvercovou maticí A. Taková soustava má nenulové řešení právě když matice A je singulární – viz poznámku I.3.6.)

Další jednoduchá tvrzení uvádíme bez důkazů:

c) *Je-li λ vlastním číslem matice A a X je příslušný vlastní vektor, pak $\overline{\lambda}$ je také vlastním číslem matice A a $\overline{X}$ je příslušným vlastním vektorem.*

d) *Je-li λ vlastním číslem matice A a X je příslušný vlastní vektor, pak λ^2 je vlastním číslem matice A^2 a X je opět příslušným vlastním vektorem.*

e) *Existuje-li inverzní matice A^{-1}, je λ vlastním číslem matice A právě když $1/\lambda$ je vlastním číslem matice A^{-1}. Odpovídající vlastní vektory jsou v tomto případě stejné.*

*f) *Je-li A symetrickou čtvercovou maticí, pak všechna její vlastní čísla jsou reálná. Vlastní vektory, odpovídající různým vlastním číslům, jsou v tomto případě kolmé.*

I.4.10. Příklad. A je čtvercová matice typu 3×3. Rozhodněte, zda může mít tato vlastní čísla, případně i vlastní vektory:

a) $2,\ 3$ b) $3,\ 2+\mathrm{i},\ -3-2\mathrm{i}$ c) $5+\mathrm{i},\ 5-\mathrm{i},\ 7$

d) $4,\ 3-\mathrm{i},\ 3+\mathrm{i},\ 5$ e) $7,\ 5,\ 1,\ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Řešení: a) Matice A může mít vlastní čísla 2 a 3. Může se ale stát, že toto nejsou všechna vlastní čísla. Charakteristická rovnice matice A je kubickou rovnicí a ta může mít až tři různé kořeny.

b) Je-li $2+\mathrm{i}$ vlastním číslem matice A, pak $2-\mathrm{i}$ je také vlastním číslem A. (Viz poznámku I.4.10, bod c).) Podobně, jelikož $-3-2\mathrm{i}$ je vlastním číslem, je komplexně sdružené číslo $-3+2\mathrm{i}$ rovněž vlastním číslem. Matice A ale nemůže mít vlastní čísla 3, $2\pm\mathrm{i}$ a $-3\pm 2\mathrm{i}$, protože těchto čísel je pět a A, jakožto matice typu 3×3, může mít nejvýše tři vlastní čísla.

c) $5+\mathrm{i},\ 5-\mathrm{i},\ 7$ mohou být vlastní čísla matice A.

d) Uvedená čísla jsou čtyři, vlastní čísla mohou být nejvýše tři. Proto je odpověď v tomto případě negativní.

e) Uvedená čísla mohou být vlastními čísly matice A. Čísla jsou různá, proto by odpovídající vlastní vektory měly být lineárně nezávislé. (Viz poznámku I.4.10, bod a).) To však není splněno, protože třetí vektor je dvojnásobkem druhého. Odpověď je tedy negativní.

I.4.11. Cvičení. Najděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následujících matic.

a) $\begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 5, & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0, & a \\ -a, & 0 \end{pmatrix}$ $(a \neq 0)$ d) $\begin{pmatrix} 5, & 6, & -3 \\ -1, & 0, & 1 \\ 1, & 2, & -1 \end{pmatrix}$

Výsledky: a) $\lambda_1 = 3,\ X_1 = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix},\ \lambda_2 = 1,\ X_2 = \begin{pmatrix} p \\ -p \end{pmatrix}$; b) $\lambda_1 = 7,\ X_1 = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -2,\quad X_2 = \begin{pmatrix} -4p \\ 5p \end{pmatrix}$; c) $\lambda_{1,2} = \pm a\,\mathrm{i},\ X_{1,2} = \begin{pmatrix} p \\ \pm p\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$;

d) $\lambda = 2,\ X = \begin{pmatrix} -2p+q \\ p \\ q \end{pmatrix}$ (Parametry p, q mohou být libovolnými komplexními čísly, příslušný vlastní vektor však musí být nenulový.)

I.5. Přehled ekvivalentních vlastností čtvercové matice

V této kapitole se neseznámíme s žádným novým pojmem, ani s žádnou novou větou nebo metodou. Vše, co zde následuje, již znáte. Nicméně, pokud se s lineární algebrou seznamujete poprvé, je možné, že vaše vědomosti nejsou dosud dostatečně utříděné a propojené. Abyste si dobře uvědomili souvislosti různých tvrzení a vět, uvádíme v této kapitole znovu přehled ekvivalentních výroků, které lze utvořit o čtvercové matici A. (To znamená, že pro každou konkrétní čtvercovou matici A buď jsou všechny uvedené výroky pravdivé nebo jsou všechny nepravdivé.)

Předpokládáme, že A je čtvercová matice typu $n \times n$.

Pak následující výroky jsou ekvivalentní:

1. *Matice A je regulární.*

2. $\det A \neq 0$.
`(Viz větu I.2.31.)`

3. *Inverzní matice A^{-1} existuje.*
`(Viz větu I.2.31.)`

4. *Matice A má hodnost n.*
`(Viz definici regulární matice v odstavci I.2.29.)`

5. *Řádky matice A jsou lineárně nezávislé.*
`(Viz definici hodnosti matice v odstavci I.2.14 a výrok 4.)`

6. *Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.*
`(Viz poznámku I.2.16 a výrok 4.)`

7. *Homogenní soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = O$ má jediné (a to nulové) řešení.*
`(Viz poznámku I.3.6.)`

8. *Obecná (tj. homogenní nebo nehomogenní) soustava lineárních algebraických rovnic $A \cdot X = B$ má jediné řešení.*
`(Viz Frobeniovu větu I.3.7.)`

9. 0 *není vlastním číslem matice A.*
`(Viz poznámku I.4.9, bod b).)`

Pochopitelně, ekvivalentní jsou i negace všech výše uvedených výroků. Utvořte a napište si sami tyto negace.

II. Analytická geometrie v $\mathbb{E}_3$

II.1. Některé základní pojmy

II.1.1. Kartézské souřadnice v $\mathbb{E}_3$. K popisu polohy bodů a dalších objektů ve trojrozměrném Eukleidově prostoru $\mathbb{E}_3$ používáme tři navzájem kolmé souřadné osy, protínající se v jednom bodě. Označujeme je Ox, Oy, Oz nebo pouze x, y, z nebo x_1, x_2, x_3. Jejich orientaci volíme tak, aby tvořily tzv. *pravotočivý systém*. To znamená, že když držíte pravou ruku tak, že prsty směřují od kladné části osy x ke kladné části osy y, pak palec míří stejným směrem, jako kladná část osy z. Společný průsečík všech os se nazývá *počátek* souřadného systému.

Každému bodu v $\mathbb{E}_3$ můžeme jednoznačně přiřadit jeho *kartézské souřadnice* – jsou jimi postupně vzdálenosti kolmých projekcí tohoto bodu na osy x, y, z od počátku, brané se znaménkem „+" nachází–li se projekce na kladné části osy a se znaménkem „−" v opačném případě.

Podobně můžeme přiřadit jednoznačně kartézské souřadnice i každému volnému vektoru v $\mathbb{E}_3$ – vektor umístíme tak, že jeho počáteční bod je v počátku souřadného systému, kartézské souřadnice jeho koncového bodu pak prohlásíme za kartézské souřadnice vektoru. (Viz též odstavec I.1.2.)

Abychom rozlišili body a volné vektory v $\mathbb{E}_3$, zapisujeme kartézské souřadnice bodů v $\mathbb{E}_3$ v hranatých závorkách (například $[1, 2, 3]$) a kartézské souřadnice vektorů v kulatých závorkách (například $(1, 2, 3)$).

II.1.2. Délka vektoru v $\mathbb{E}_3$. Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektor v $\mathbb{E}_3$, pak jeho *délkou* nazýváme číslo

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

II.1.3. Skalární součin vektorů v $\mathbb{E}_3$. Jsou-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektory v $\mathbb{E}_3$, pak jejich *skalárním součinem* nazýváme číslo

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

(Srovnejte se skalárním součinem prvků z $\mathbb{R}^n$, tj. aritmetických vektorů, definovaným v odstavci I.2.11.)

II.1.4. Věta. *Jsou-li* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *nenulové vektory v* $\mathbb{E}_3$ *a je-li* φ *úhel, který tyto vektory svírají, pak*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos\varphi.$$

Důkaz: Zvolme v $\mathbb{E}_3$ libovolně bod A a položme $B = A + \mathbf{u}$ a $C = A + \mathbf{v}$. Vektor $B - C$ lze zřejmě psát též jako $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Aplikací kosinové věty na trojúhelník ABC dostáváme: $\|B - C\|^2 = \|B - A\|^2 + \|C - A\|^2 - 2\,\|B - A\|\,\|C - A\| \cdot \cos\varphi$, neboli: $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cdot \cos\varphi$. Rozepsáním této rovnosti obdržíme: $(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2\,\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos\varphi$. Odtud již snadno plyne žádaný vzorec. $\square$

II.1.5. Poznámka. Nenulové vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou tudíž kolmé právě když $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

II.1.6. Jiný zápis vektorů v $\mathbb{E}_3$. Označme $\mathbf{i} = (1,0,0)$, $\mathbf{j} = (0,1,0)$, $\mathbf{k} = (0,0,1)$. Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektor v $\mathbb{E}_3$, pak pomocí vektorů $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ lze $\mathbf{u}$ zapsat následujícím způsobem: $\mathbf{u} = u_1\,\mathbf{i} + u_2\,\mathbf{j} + u_3\,\mathbf{k}$.

II.1.7. Vektorový součin vektorů v $\mathbb{E}_3$. Nechť $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou vektory v $\mathbb{E}_3$. *Vektorovým součinem* vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ (v tomto pořadí) nazýváme vektor, který značíme $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a pro který platí:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\mathbf{k}.$$

II.1.8. Věta. *Jsou-li* $\mathbf{u}$ *a* $\mathbf{v}$ *nenulové vektory v* $\mathbb{E}_3$ *a je-li* φ *úhel, který tyto vektory svírají, pak*

a) *Vektor* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ *je kolmý k oběma vektorům* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$.

b) $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\sin\varphi$.

(Důkaz této věty neuvádíme. O tvrzení a) se lze však přesvědčit výpočtem skalárních součinů $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$, které jsou rovny nule.)

II.1.9. Součet bodu a vektoru. Je-li $A = [\,a_1, a_2, a_3\,]$ bod v $\mathbb{E}_3$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ vektor v $\mathbb{E}_3$, pak *součtem bodu A a vektoru* $\mathbf{u}$ nazýváme bod

$$B = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, a_3 + u_3\,]$$

v $\mathbb{E}_3$. Píšeme: $B = A + \mathbf{u}$.

Naopak, *rozdílem dvou bodů* $B = [\,b_1, b_2, b_3\,]$ a $A = [\,a_1, a_2, a_3\,]$ v $\mathbb{E}_3$ (v tomto pořadí) je vektor

$$\mathbf{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Píšeme: $\mathbf{u} = B - A$.

II.1.10. Vzdálenost dvou bodů. Připomínáme, že jsou-li $A = [\,a_1, a_2, a_3\,]$ a $B = [\,b_1, b_2, b_3\,]$ dva body z $\mathbb{E}_3$, je jejich vzdálenost $\|B - A\|$ dána rovností

$$\|B - A\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

(Je to délka vektoru $B - A$.)

II.1.11. Vzdálenost bodu od množiny a vzdálenost dvou množin. Je-li $A = [\,a_1, a_2, a_3\,]$ bod v $\mathbb{E}_3$ a je-li $M \subset \mathbb{E}_3$, pak *vzdáleností bodu A od množiny M* nazýváme číslo

$$d(A, M) = \inf\{\,\|A - X\|;\ X \in M\,\}.$$

(Pojem „infimum” je vysvětlen na str. 46.) *Vzdáleností množin M a N* v $\mathbb{E}_3$ nazýváme číslo

$$d(M, N) = \inf\{\,\|X - Y\|;\ X \in M,\ Y \in N\,\}.$$

II.2. Přímky v $\mathbb{E}_3$

II.2.1. Přímka v $\mathbb{E}_3$. Je-li $A = [\,a_1, a_2, a_3\,]$ bod v $\mathbb{E}_3$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nenulový vektor v $\mathbb{E}_3$, pak množinu $p = \{\, X \in \mathbb{E}_3;\ \exists\, t \in \mathbb{R}:\ X = A + t \cdot \mathbf{u}\,\}$ nazýváme *přímkou* v $\mathbb{E}_3$. Rovnici

(II.2.1) $$X \;=\; A \,+\, t\,\mathbf{u}; \qquad t \in \mathbb{R}$$

nazýváme *parametrickou rovnicí* přímky p. Tato rovnice bývá často uváděna též ve tvaru, který vznikne rozepsáním do souřadnic:

(II.2.2) $$x_1 = a_1 + t\,u_1, \quad x_2 = a_2 + t\,u_2, \quad x_3 = a_3 + t\,u_3; \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Vektor $\mathbf{u}$ nazýváme *směrovým vektorem* přímky p.

Není-li parametr t v rovnici (II.2.1) vybírán z celé množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, ale například pouze z intervalu $\langle -1, 5\rangle$, je (II.2.1) parametrizací nikoliv přímky, ale pouze úsečky. Její koncové body jsou $A - \mathbf{u}$ a $A + 5\mathbf{u}$. Podobně, bude–li t probíhat například interval $\langle 1, +\infty)$, bude (II.2.1) parametrizací polopřímky, atd.

II.2.2. Vzdálenost bodu od přímky. Nechť $p:\ \ X = A + t\,\mathbf{u};\ t \in \mathbb{R}$ je přímka v $\mathbb{E}_3$ a M je bod v $\mathbb{E}_3$, neležící na přímce p. Jak vypočítáme vzdálenost $d(M,p)$?

1. způsob: Označme P bod na přímce p, který je ze všech bodů přímky p nejbližší k M. (Lze dokázat, že takový bod existuje a že vektor $(M - P)$ je kolmý k přímce p.) Pro nějakou hodnotu (nám dosud neznámou) parametru t platí: $P = A + t\mathbf{u}$. Vzhledem k tomu, že vektor $(M - P)$ je kolmý k přímce p, platí: $(M - P) \cdot \mathbf{u} = 0$. Dosadíme-li do této rovnice vyjádření bodu P, dostáváme: $(M - A) \cdot \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\,t = 0$. Odtud vypočítáme hodnotu t a dosadíme ji do vyjádření bodu P. Vzdálenost $d(M,p)$ je pak rovna $\|P - M\|$.

2. způsob: V pravoúhlém trojúhelníku APM platí:

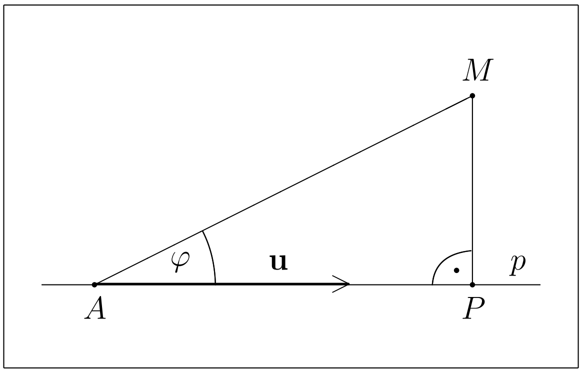
$$d(M,p) = \|M - P\| = \|M - A\|\ \sin\varphi.$$

Podle věty II.1.8 platí:

$$\|(M - A) \times \mathbf{u}\| = \|M - A\|\ \|\mathbf{u}\|\ \sin\varphi.$$

Vyjádříme-li odtud $\sin\varphi$ a dosadíme-li do předcházející rovnosti, obdržíme vzorec:

(II.2.3) $$d(M,p) \;=\; \frac{\|(M - A) \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}\,.$$



Obr. 1

II.2.3. Vzájemná poloha dvou přímek. Nechť p a q jsou přímky v $\mathbb{E}_3$, které mají parametrické rovnice

$$p:\quad X = A + t\,\mathbf{u};\quad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad q:\quad Y = B + s\,\mathbf{v};\quad s \in \mathbb{R}.$$

Přímky p, q nazýváme

a) *totožné*, mají-li nekonečně mnoho společných bodů,

b) *různoběžné*, mají-li právě jeden společný bod,

c) *rovnoběžné*, nemají-li žádný společný bod a jsou-li vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lineárně závislé,

d) *mimoběžné*, nemají-li žádný společný bod a jsou-li vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé.

Zabývejme se nyní otázkou, jak v konkrétním případě zjistit, která z uvedených možností nastane. Hledejme společné body přímek p, q. To odpovídá tomu, že hledáme takové hodnoty parametrů t, s, po jejichž dosazení do pravých stran parametrických rovnic získáme tentýž bod, tj. $X = Y$. Porovnáním pravých stran dostaneme: $A + t \cdot \mathbf{u} = B + s \cdot \mathbf{v}$. Rozepsáním do souřadnic obdržíme soustavu tří lineárních algebraických rovnic pro neznámé t, s:

$$a_1 + t \cdot u_1 = b_1 + s \cdot v_1\,, \qquad a_2 + t \cdot u_2 = b_2 + s \cdot v_2\,, \qquad a_3 + t \cdot u_3 = b_3 + s \cdot v_3\,.$$

Po úpravě dostáváme:

$$\begin{array}{rcrcl} u_1 \cdot t & - & v_1 \cdot s & = & b_1 - a_1\,, \\ u_2 \cdot t & - & v_2 \cdot s & = & b_2 - a_2\,, \\ u_3 \cdot t & - & v_3 \cdot s & = & b_3 - a_3\,. \end{array}$$

Má-li tato soustava rovnic nekonečně mnoho řešení, mají přímky p, q nekonečně mnoho společných bodů a jsou tudíž totožné.

Má-li výše uvedená soustava rovnic jediné řešení, mají přímky p, q jediný společný bod a jsou tudíž různoběžné.

Nemá-li soustava rovnic žádné řešení, nemají přímky p, q žádný společný bod. Jsou-li v tomto případě vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně závislé, jsou přímky p, q rovnoběžné. Jsou-li vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ lineárně nezávislé, jsou přímky p, q mimoběžné.

II.2.4. Přímka zadaná dvěma body. Jsou-li A a B dva různé body v $\mathbb{E}_3$, pak přímku procházející těmito body můžeme parametrickou rovnicí popsat například takto:

$$X = A + t \cdot (B - A); \quad t \in \mathbb{R}. \tag{II.2.4}$$

II.2.5. Poznámka. Předpokládejme, že A, B, C, D, E jsou navzájem různé body, ležící všechny na téže přímce p. Položme například $\mathbf{u} = B - A$, $\mathbf{v} = 2 \cdot (B - D)$. Pak rovnice

$$\begin{array}{rcll} X & = & A + t \cdot (B - A); & t \in \mathbb{R}, \\ Y & = & B + s \cdot (C - A); & s \in \mathbb{R}, \\ Z & = & D + r \cdot \mathbf{u}; & r \in \mathbb{R}, \\ X & = & E + \alpha \cdot \mathbf{v}; & \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

jsou všechny parametrickými rovnicemi přímky p. Rozmyslete si sami, proč.

II.2.6. Příčka dvou přímek. *Příčkou* dvou přímek p, q nazýváme jakoukoliv přímku, která je s oběma přímkami p, q různoběžná (tj. má s každou z nich právě jeden společný bod).

II.2.7. Příklad. Přímky p, q jsou zadány parametrickými rovnicemi

$$p: \quad X = A + t \cdot \mathbf{u}; \quad t \in \mathbb{R}, \qquad\qquad q: \quad X = B + s \cdot \mathbf{v}; \quad t \in \mathbb{R},$$

kde $A = [3, 0, -1]$, $\mathbf{u} = (2, 1, 1)$, $B = [1, 1, 1]$, $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$. Nalezněte příčku přímek p, q, která prochází bodem $M = [-7, -6, 5]$.

Řešení: Označme P (respektive Q) průsečík hledané příčky s přímkou p (respektive q). Pro nějaké hodnoty parametrů t a s pak platí:

$$P = A + t \cdot \mathbf{u}, \qquad\qquad Q = B + s \cdot \mathbf{v}. \tag{II.2.5}$$

Body P, Q, M leží na jedné přímce (na hledané příčce) a $M \neq Q$, neboť bod M neleží na přímce q. (To snadno ověříme: Kdyby totiž platilo $M \in q$, pak by vektory $(M - B) = (-8, -7, 4)$ a $\mathbf{v} = (1, 3, -2)$ byly lineárně závislé, tj. jeden by byl násobkem druhého, což ale není pravda.) Existuje tedy číslo $r \in \mathbb{R}$ takové, že

$$P - M = r \cdot (Q - M).$$

Dosadíme-li do této rovnice výše uvedené vyjádření bodů P a Q, obdržíme rovnici:

$$A + t \cdot \mathbf{u} - M = r \cdot (B + s \cdot \mathbf{v} - M).$$

Rozepíšeme-li tuto rovnici do souřadnic a dosadíme-li zadané souřadnice bodů A, B, M a vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, dostaneme po úpravě soustavu tří lineárních algebraických rovnic pro neznámé t, rs, r:

$$2t - rs - 8r = -10, \qquad t - 3rs - 7r = -6, \qquad t + 2rs + 4r = 6.$$

Tato soustava má jediné řešení $t = 2$, $rs = -2$, $r = 2$. Odtud vypočítáme: $s = -1$. Dosazením do (II.2.5) dostaneme: $P = [7, 2, 1]$, $Q = [0, -2, 3]$. Parametrickou rovnici příčky můžeme nyní napsat například pomocí (II.2.4), tj. jako rovnici přímky, procházející dvěma známými body P, Q:

$$X = P + \alpha \cdot (Q - P); \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$
$$X = [7, 2, 1] + \alpha \cdot (-7, -4, 2); \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Poslední rovnici ještě můžeme rozepsat do souřadnic:

$$x_1 = 7 - 7\alpha, \qquad x_2 = 2 - 4\alpha, \qquad x_3 = 1 + 2\alpha; \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

II.2.8. Vzdálenost dvou přímek. Předpokládejme, že přímky $p: X = A + t \cdot \mathbf{u}$; $t \in \mathbb{R}$ a $q: Y = B + s \cdot \mathbf{v}$; $s \in \mathbb{R}$ jsou mimoběžné nebo rovnoběžné. Jak můžeme vypočítat jejich vzdálenost $d(p, q)$?

Hledejme nejprve příčku přímek p, q, která je k oběma přímkám p, q kolmá. Označme P, Q průsečíky příčky s přímkami p, q. Pro vhodné hodnoty parametrů t, s pak platí: $P = A + t \cdot \mathbf{u}$, $Q = B + s \cdot \mathbf{v}$. Směrovým vektorem příčky je například vektor $Q - P$. Tento vektor musí být kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, tudíž platí: $(Q - P) \cdot \mathbf{u} = 0$, $(Q - P) \cdot \mathbf{v} = 0$. Dosadíme-li do těchto rovnic vyjádření bodů P a Q, dostaneme po snadné úpravě:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\, s - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})\, t = -(B - A) \cdot \mathbf{u}, \qquad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\, s - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\, t = -(B - A) \cdot \mathbf{v}.$$

Tuto soustavu dvou lineárních algebraických rovnic pro neznámé t, s vyřešíme a za t, s dosadíme do vyjádření bodů P, Q. Vzdálenost přímek p, q nakonec vypočítáme jako vzdálenost bodů P, Q. Obdržíme $d(p,q) = \|P - Q\|$.

II.2.9. Odchylka dvou přímek. Předpokládejme, že p, q jsou přímky v $\mathbb{E}_3$, jejichž parametrické rovnice jsou: $p: \ X = A + t \cdot \mathbf{u};\ t \in \mathbf{R}$ a $q: \ X = B + s \cdot \mathbf{v};\ s \in \mathbb{R}$. Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ svírají úhel φ, jehož kosinus lze vypočítat podle věty II.1.4. Samotný úhel φ může nabývat hodnoty 0 až π (nakreslete si obrázek). *Odchylkou přímek p, q* nazýváme úhel ϑ, který je roven φ, je-li $\varphi \in \langle 0, \pi/2\rangle$ a $\pi - \varphi$, je-li $\varphi \in (\pi/2, \pi\rangle$. Užitím věty II.1.4 lze získat formuli:

$$\cos\vartheta = \frac{|\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|}. \qquad \text{(II.2.6)}$$

II.2.10. Cvičení. a) Vypočítejte odchylku přímek AB a CD, je-li $A = [-1, 2, 0]$, $B = [-2, 0, 2]$, $C = [4, -4, 5]$, $D = [2, 4, 3]$.

b) Vypočítejte vzdálenost bodu $M = [1, -6, 8]$ od přímky AB, jestliže $A = [2, 1, 3]$, $B = [3, -1, 6]$.

c) Vypočítejte vzdálenost přímek $p: \ X = [6, 4, 3] + t \cdot (1, 1, 1);\ t \in \mathbb{R}$ a $q: \ X = [7, 0, -18] + s \cdot (2, -1, 4);\ s \in \mathbb{R}$.

Výsledky: a) $\cos\vartheta = \sqrt{2}/2$, $\vartheta = \pi/4$ b) 4.36 c) 11.83

II.3. Roviny v $\mathbb{E}_3$

II.3.1. Rovina v $\mathbb{E}_3$. Je-li $A = [a_1, a_2, a_3]$ bod v $\mathbb{E}_3$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dva lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{E}_3$, pak množinu $\sigma = \{X \in \mathbb{E}_3;\ \exists\alpha \in \mathbf{R},\ \exists\beta \in \mathbb{R} : X = A + \alpha\cdot\mathbf{u} + \beta\cdot\mathbf{v}\}$ nazýváme *rovinou* v $\mathbb{E}_3$. Rovnici

$$X = A + \alpha\cdot\mathbf{u} + \beta\cdot\mathbf{v}; \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \qquad \text{(II.3.1)}$$

nazýváme *parametrickou rovnicí* roviny σ. S touto rovnicí se často setkáváme ve tvaru, který vznikne rozepsáním (II.3.1) do souřadnic:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \alpha\cdot u_1 + \beta\cdot v_1 \\ x_2 &= a_2 + \alpha\cdot u_2 + \beta\cdot v_2 \\ x_3 &= a_3 + \alpha\cdot u_3 + \beta\cdot v_3\,; \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

II.3.2. Rovina, zadaná třemi body. Nechť A, B, C jsou tři navzájem různé body v $\mathbb{E}_3$, neležící na jedné přímce. Rovinu, která těmito body prochází (budeme ji též nazývat rovinou ABC) lze popsat parametrickou rovnicí

$$X = A + \alpha\cdot(B - A) + \beta\cdot(C - A); \qquad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \qquad \text{(II.3.2)}$$

II.3.3. Poznámka. Jedna rovina má nekonečně mnoho různých parametrických rovnic (podobně jako přímka – viz poznámku II.2.5).

II.3.4. Normálový vektor. Nechť σ je rovina, zadaná parametrickou rovnicí (II.3.1). Každý nenulový vektor, který je kolmý k rovině σ (tj. je kolmý k vektorům $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$), nazýváme <u>*normálovým vektorem*</u> roviny σ.

Vzhledem k větě II.1.8 je normálovým vektorem k rovině σ například vektor $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Další normálové vektory k rovině σ mají tvar $c \cdot \mathbf{n}$, kde $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

II.3.5. Jiný analytický popis roviny. Je-li σ rovina zadaná parametrickou rovnicí (II.3.1) a je-li $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ její normálový vektor, pak pro všechny body $X = [\,x_1, x_2, x_3\,]$ z $\mathbb{E}_3$ platí: X je bodem roviny σ právě když $(X - A) \cdot \mathbf{n} = 0$. Po podrobnějším rozepsání skalárního součinu na levé straně této rovnice dostáváme:

$$(x_1 - a_1) \cdot n_1 + (x_2 - a_2) \cdot n_2 + (x_3 - a_3) \cdot n_3 \;=\; 0,$$

$$n_1\, x_1 + n_2\, x_2 + n_3\, x_3 + q \;=\; 0, \tag{II.3.3}$$

kde $q = -a_1\, n_1 - a_2\, n_2 - a_3\, n_3$. Rovnici (II.3.3) nazýváme <u>*rovnicí roviny σ*</u>.

Rovnici (II.3.3) lze z parametrické rovnice roviny σ (rozepsané do souřadnic) získat vyloučením parametrů α a β. Naopak, z rovnice (II.3.3) lze získat parametrické vyjádření roviny σ například tak, že najdeme tři různé body A, B, C roviny σ (tj. body, jejichž souřadnice rovnici (II.3.3) vyhovují) které neleží na jedné přímce a použijeme (II.3.2).

II.3.6. Příklad. Nechť rovina σ má rovnici $5\,x_1 - 3\,x_2 + 7\,x_3 - 12 = 0$. Pak vektor $\mathbf{n} = (5, -3, 7)$ je normálovým vektorem této roviny.

II.3.7. Vzdálenost bodu od roviny. Předpokládejme, že rovina σ je zadaná parametrickou rovnicí (II.3.1) a M je bod v $\mathbb{E}_3$. Odvodíme, jak lze vypočítat vzdálenost $d(M, \sigma)$.

Ze známých vztahů mezi stranami a úhly v pravoúhlém trojúhelníku APM dostáváme:

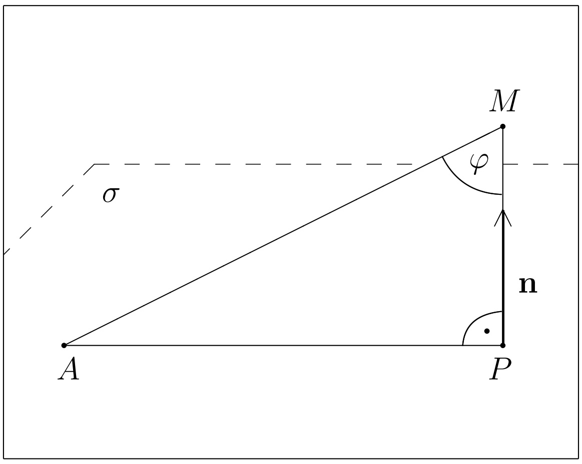
$$d(M, \sigma) \;=\; \|M - P\| = \|M - A\| \cdot \cos\varphi.$$

Pomocí skalárního součinu vektorů $\mathbf{n}$ a $(M - A)$ lze $\cos\varphi$ vyjádřit:

$$\cos\varphi \;=\; \frac{|\mathbf{n} \cdot (M - A)|}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|M - A\|}$$

(Vektor $\mathbf{n}$ je libovolným normálovým vektorem k rovině σ.) Odtud vyplývá vzorec:

$$d(M, \sigma) \;=\; \frac{|\mathbf{n} \cdot (M - A)|}{\|\mathbf{n}\|}. \tag{II.3.4}$$



Obr. 2

Předpokládejme nyní, že $M = [\,m_1, m_2, m_3\,]$. Pak platí: $\mathbf{n} \cdot (M - A) = n_1\, m_1 + n_2\, m_2 + n_3\, m_3 + q$ (kde $q = -n_1\, a_1 - n_2\, a_2 - n_3\, a_3$). Dosazením do (II.3.4) a rozepsáním $\|\mathbf{n}\|$ dostáváme:

$$d(M, \sigma) \;=\; \frac{|n_1\, m_1 + n_2\, m_2 + n_3\, m_3 + q|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}. \tag{II.3.5}$$

Tento vzorec je užitečný zejména, je-li rovina σ zadána rovnicí (II.3.3).

II.3.8. Poznámka. Předpokládejme, že p je přímka, zadaná parametrickými rovnicemi (II.2.2). Vyloučením parametru t z těchto tří rovnic získáme dvě rovnice, které lze po úpravě zapsat ve tvaru

$$n_1'x_1 + n_2'x_2 + n_3'x_3 + q' = 0, \qquad n_1''x_1 + n_2''x_2 + n_3''x_3 + q'' = 0. \tag{II.3.6}$$

Přímky bývají často zadávány pomocí takových dvou rovnic. Každá z nich je rovnicí roviny, přímka p je průnikem obou rovin. (Též se užívá termín ,,průsečnice" obou rovin.)

Je-li naopak přímka zadána dvěma rovnicemi typu (II.3.6), pak její parametrickou rovnici lze získat následujícím způsobem: Na rovnice (II.3.6) hledíme jako na soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé x_1, x_2, x_3. Tuto soustavu řešíme. Nejsou-li roviny odpovídající jednotlivým rovnicím rovnoběžné (nebo dokonce totožné), pak v souladu s výsledky poznámky I.3.8 se v zápisu obecného řešení vyskytuje jediný libovolně volitelný parametr. Zápisem obecného řešení získáme parametrickou rovnici přímky.

II.3.9. Příklad. Určíme parametrické vyjádření přímky, zadané rovnicemi

$$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 1 = 0, \qquad 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2 = 0.$$

Například Gaussovou eliminační metodou lze získat řešení této soustavy: $x_1 = -2t - 3$, $x_2 = 2t + 2$, $x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$. Tyto tři rovnice jsou parametrickými rovnicemi uvažované přímky. Pochopitelně, parametrické vyjádření můžeme zapsat též ,,vektorově", jednou rovnicí: $X = A + t \cdot \mathbf{u}$, kde $A = [\,-3, 2, 0\,]$ a $\mathbf{u} = (-2, 2, 1)$.

II.3.10. Vzájemná poloha přímky a roviny. Mějme přímku p a rovinu σ. Ohledně vzájemné polohy přímky p a roviny σ mohou nastat následující tři případy:

a) Přímka p leží celá v rovině σ.

b) Přímka p protíná rovinu σ v jediném jejich společném bodě.

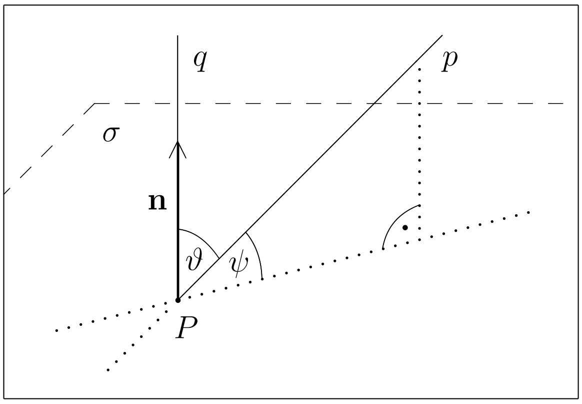
c) Přímka p nemá s rovinou σ žádný společný bod, neboli přímka p je s rovinou σ rovnoběžná.

Jak v konkrétní situaci zjistíme, která z možností a), b), c) nastane? Zabývejme se například situací, kdy přímka p je zadána dvěma rovnicemi (II.3.6) a rovina σ je zadána jednou rovnicí (II.3.3). Rovnice (II.3.6) a (II.3.3) tvoří dohromady soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé x_1, x_2, x_3. Tuto soustavu řešíme. Existují tři možnosti (viz Frobeniovu větu): 1) Soustava má nekonečně mnoho řešení. 2) Soustava má jediné řešení. 3) Soustava nemá řešení. Tyto tři možnosti postupně odpovídají výše uvedeným případům a), b), c). V případě 2) řešení soustavy udává souřadnice průsečíku přímky p s rovinou σ.

V příkladu II.3.12 se budeme vzájemnou polohou přímky a roviny zabývat znovu, přímka tentokrát bude zadána parametricky.

II.3.11. Odchylka přímky od roviny. Mějme přímku p a rovinu σ. Není-li přímka p k rovině σ kolmá, pak *odchylkou přímky p od roviny σ* nazýváme odchylku přímky p od jejího pravoúhlého průmětu do roviny σ. Je-li přímka p kolmá k rovině σ, pak odchylku pokládáme rovnou $\pi/2$.

Jak v konkrétním případě odchylku vypočítáme? Z vyjádření roviny nejprve určíme její normálový vektor $\mathbf{n}$ (viz odstavec II.3.4, eventuálně II.3.5, II.3.6). Nechť q je přímka, jejímž směrovým vektorem je $\mathbf{n}$ (viz obr. 3). Označme ϑ odchylku přímek p a q. (Její kosinus vypočítáme podle vzorce (II.2.6).) Označíme-li například ψ hledanou odchylku přímky p od roviny σ, je zřejmě: $\psi = \pi/2 - \vartheta$.



Obr. 3

II.3.12. Příklad. Přímka p je zadána parametricky: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + t$, $x_3 = 3$. Rovina σ je zadána rovnicí $2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2 = 0$. Jaká je vzájemná poloha a odchylka přímky p a roviny σ?

Do rovnice roviny σ dosadíme za x_1, x_2, x_3 z parametrického vyjádření přímky p. Obdržíme rovnici pro neznámou t: $2+2t+8+4t+12+2=0$. Tato rovnice má jediné řešení $t=-4$. Jelikož řešení existuje a je jediné, mají přímka p a rovina σ jediný společný bod. Souřadnice tohoto bodu získáme dosazením $t=-4$ do parametrických rovnic přímky p: $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=3$.

Normálovým vektorem roviny σ je například vektor $\mathbf{n}=(2,4,4)$. Směrovým vektorem přímky p je vektor $\mathbf{a}=(1,1,0)$. Odchylkou přímky p a přímky se směrovým vektorem $\mathbf{n}$ je úhel ϑ, jehož kosinus vyjde použitím vzorce (II.2.6) roven $\sqrt{2}/2$. Jelikož ϑ je úhel z intervalu $\langle 0, \pi/2\rangle$, je $\vartheta = \pi/4$. Odchylkou přímky p od roviny σ je úhel ψ, pro který platí: $\psi = \pi/2 - \vartheta = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$.

II.3.13. Vzájemná poloha dvou rovin. Dvě roviny v $\mathbb{E}_3$ jsou buď *totožné*, nebo *se protínají v jedné přímce*, nebo jsou *rovnoběžné*. Máme-li zadány dvě konkrétní roviny, pak postup vedoucí ke zjištění, který z výše uvedených případů nastane, závisí na tom, jak jsou roviny zadány. Dva možné postupy ukážeme v příkladech II.3.15 a II.3.16.

II.3.14. Odchylka dvou rovin. *Odchylkou rovin σ a η* rozumíme odchylku libovolných dvou přímek, z nichž jedna je kolmá k rovině σ a druhá je kolmá k rovině η.

II.3.15. Příklad. Vyšetříme vzájemnou polohu a vypočítáme odchylku rovin σ a η, je-li $\sigma : \; x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$ a $\eta : \; 2x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0$.

Souřadnice společných bodů obou rovin musí vyhovovat oběma rovnicím. Tyto rovnice tvoří soustavu dvou lineárních rovnic pro neznámé x_1, x_2, x_3. Snadno zjistíme, že soustava má řešení $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{3} + t$, $x_3 = t$; $t \in \mathbb{R}$. Toto vyjádření x_1, x_2, x_3 představuje parametrické rovnice přímky, která je množinou všech společných bodů rovin σ a η.

Normálovým vektorem roviny σ je vektor $\mathbf{n}' = (1, -1, 1)$. Normálovým vektorem roviny η je vektor $\mathbf{n}'' = (2, 1, -1)$. Použitím vzorce (II.2.6) zjistíme, že odchylka rovin σ a η je rovna $\pi/2$.

II.3.16. Cvičení. 1) Vypočítejte vzdálenost bodu M od roviny σ, je-li

a) $M = [7, 0, -1]$, σ: $3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5 = 0$,

b) $M = [2, 3, -1]$, σ: $X = [1, 0, -1] + \alpha \cdot (2, 0, 1) + \beta \cdot (0, 2, 1)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Jaká je vzájemná poloha, vzdálenost a odchylka rovin σ a η, je-li

a) σ: $3x_1 - 6x_2 + 6x_3 + 9 = 0$ a η: $x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3 = 0$,

b) σ: $2x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$ a η: $x_1 + x_2 + 2x_3 + 1 = 0$?

3) Vypočítejte odchylku přímky AB (kde $A = [2, -1, 2]$ a $B = [1, -1, 1]$) od roviny σ: $x_1 - x_2 - 5 = 0$.

4) Nalezněte kolmý průmět bodu $A = [7, 0, -1]$ do roviny σ: $3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5 = 0$.

5) Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny σ, je-li přímka p zadána rovnicemi $5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 15 = 0$, $12x_1 - 2x_2 + 8x_3 + 3 = 0$ a rovina σ je zadána rovnicí $5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 8 = 0$.

6) Jaká je vzájemná poloha a odchylka rovin ABC a DEF, je-li $A = [1, 1, 2]$, $B = [1, 1, 4]$, $C = [1, 2, 1]$, $D = [2, 0, -1]$, $E = [2, 1, 1]$, $F = [4, -1, 3]$?

Výsledky: 1a) $2\sqrt{14}$ 1b) $4/\sqrt{30}$

2a) Roviny jsou rovnoběžné, jejich vzdálenost je 2. 2b) Roviny se protínají v přímce $X = [0, -1, 0] + t\,(-1, -1, 1)$, jejich odchylka je $\pi/3 = 60°$.

3) $\pi/6 = 30°$ 4) $[1, -2, 3]$

5) Přímka p a rovina σ jsou rovnoběžné, jejich vzdálenost je $23/\sqrt{90}$.

6) Roviny se protínají v přímce $X = [1, 2, 0] + t(0, 1, 2)$, jejich odchylka je $36{,}67°$.

*II.4. Kvadriky v $\mathbb{E}_3$

II.4.1. Kvadriky v $\mathbb{E}_3$. Ze střední školy známe kuželosečky v $\mathbb{E}_2$ a jejich rovnice. Tyto rovnice jsou kvadratické. Podobně, v $\mathbb{E}_3$ lze kvadratickými rovnicemi popsat tzv. *kvadratické plochy*, neboli *kvadriky*. Obecná rovnice kvadriky má tvar

$$a_{11}\,x_1^2 + a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{13}\,x_1\,x_3 + a_{22}\,x_2^2 + a_{23}\,x_2\,x_3 + a_{33}\,x_3^2 + \\ + b_1\,x_1 + b_2\,x_2 + b_3\,x_3 + c = 0. \tag{II.4.1}$$

(Tvrzením ,,kvadrika σ má rovnici (II.4.1)" nebo ,,kvadrika σ je popsána rovnicí (II.4.1)", apod., vyjadřujeme skutečnost, že kvadrika σ je množinou všech bodů v $\mathbb{E}_3$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici (II.4.1).)

Lze dokázat, že existuje takový kartézský souřadný systém x_1', x_2', x_3' v $\mathbb{E}_3$, který je vůči souřadnému systému x_1, x_2, x_3 pouze vhodně otočen, přičemž kvadratickou plochu danou rovnicí (II.4.1) lze v novém systému x_1', x_2', x_3' vyjádřit rovnicí, ve které se již nevyskytují smíšené součiny $x_1' x_2'$, $x_1' x_3'$, $x_2' x_3'$.

V zájmu zjednodušení se budeme dále zabývat kvadrikami, které lze již v souřadném systému x_1, x_2, x_3 vyjádřit rovnicí, ve které se nevyskytují smíšené součiny $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$. Tento přístup odpovídá tomu, na co jste zvyklí z analytické geometrie v rovině ze střední školy. Například elipsu v rovině x, y jste (většinou) popisovali rovnicí, ve které se sice vyskytovaly členy x^2 a y^2, ale nevyskytoval se v ní smíšený součin xy. To znamená, že jste se (většinou) omezovali na elipsy, jejichž osy byly rovnoběžné s osou x nebo s osou y.

Dále uvedeme přehled názvů kvadrik, které odpovídají nejdůležitějším speciálním případům rovnice (II.4.1). Místo x_1, x_2, x_3 budeme až do konce této kapitoly používat označení x, y, z.

II.4.2. Rotační kvadriky. Plochu, která vznikne rotací kuželosečky kolem její osy, nazýváme <u>*rotační kvadrikou*</u>. Tímto způsobem obdržíme rotací

– elipsy kolem své osy	*rotační elipsoid,*
– paraboly kolem své osy	*rotační paraboloid,*
– hyperboly kolem vedlejší osy	*jednodílný rotační hyperboloid,*
– hyperboly kolem hlavní osy	*dvojdílný rotační hyperboloid,*
– různoběžek kolem osy symetrie (ležící v jejich rovině)	*rotační kuželovou plochu,*
– rovnoběžek kolem osy (ležící uprostřed mezi nimi)	*rotační válcovou plochu.*

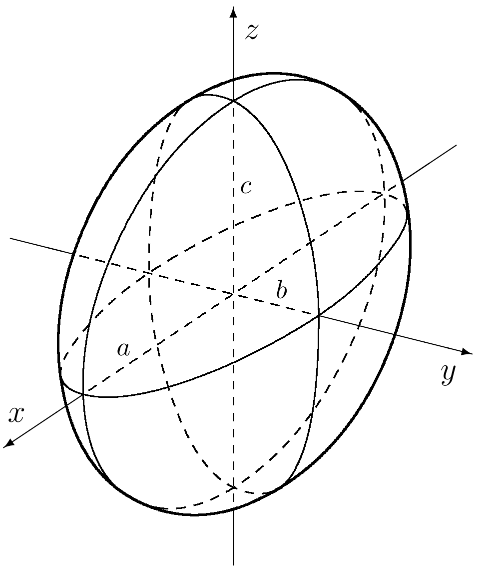
První čtyři plochy jsou tzv. <u>*regulární kvadriky*</u>, další dvě jsou tzv. <u>*singulární kvadriky*</u>.

II.4.3. Jak poznat rotační kvadriku. Vyskytují-li se v rovnici kvadriky x a y pouze jako součásti výrazu $x^2 + y^2$, je kvadrika rotační kvadrikou, jejíž osou rotace je osa z.

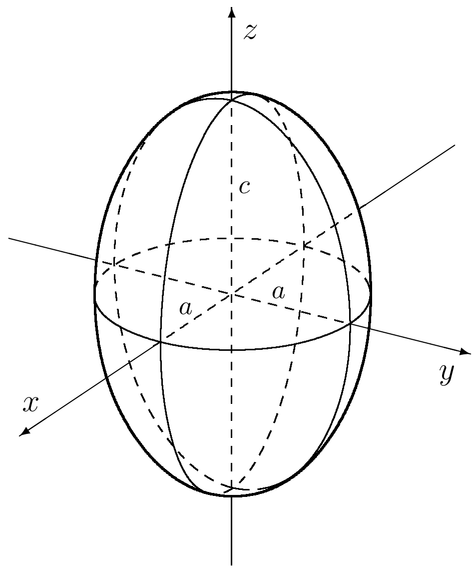
Je tomu tak z následujícího důvodu: $x^2 + y^2$ je druhá mocnina vzdálenosti bodu $[x, y, z]$ od osy z. Proto x a y v rovnici kvadriky vystupují pouze prostřednictvím vzdálenosti bodu $[x, y, z]$ od osy z. Tato vzdálenost je stejná na každé kružnici, která se nachází v rovině kolmé na osu z a osa z navíc prochází jejím středem. To znamená, že buď každý bod takové kružnice vyhovuje rovnici kvadriky (a každý bod kružnice je bodem kvadriky), nebo žádný bod této kružnice nevyhovuje rovnici kvadriky (a tudíž žádný bod kružnice není bodem kvadriky).

Podobně, vyskytují-li se v rovnici nějaké kvadriky například x a z pouze jako součásti výrazu $x^2 + z^2$, jedná se o rotační kvadriku, jejíž osou rotace je osa y, apod.

II.4.4. Kvadriky v základní a v posunuté poloze. O kuželosečkách v rovině víme, že mohou být v tzv. *základní poloze* (například elipsa $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), nebo v tzv. *posunuté poloze* (například elipsa $(x-\alpha)^2/a^2 + (y-\beta)^2/b^2 = 1$). Podobně, i kvadriky v $\mathbb{E}_3$ lze zapsat v základní i v posunuté poloze. V tomto textu se omezíme pouze na kvadriky v základní poloze. Rovnice těch samých kvadrik v posunuté poloze (o vektor (α, β, γ)) by vypadaly stejně, pouze místo x^2 by v rovnici bylo $(x-\alpha)^2$, místo y^2 by v rovnici bylo $(y-\beta)^2$, atd.



Obr. 4



Obr. 5

II.4.5. Elipsoid. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{II.4.2}$$

je určen *elipsoid* s poloosami a, b, c. Střed tohoto elipsoidu je v bodě $[0, 0, 0]$. (Viz obr. 4.)

Je-li $a = b$ nebo $a = c$ nebo $b = c$, je (II.4.2) rovnicí *rotačního elipsoidu*. (Viz obr. 5.)

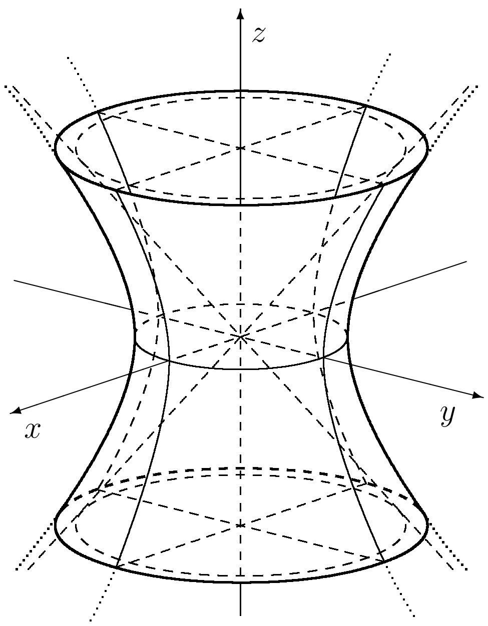
Je-li $a = b = c$, je (II.4.2) rovnicí *kulové plochy* o středu v bodě $[0, 0, 0]$ a poloměru $r = a$ $(= b = c)$.

II.4.6. Jednodílný hyperboloid. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Rovnicí

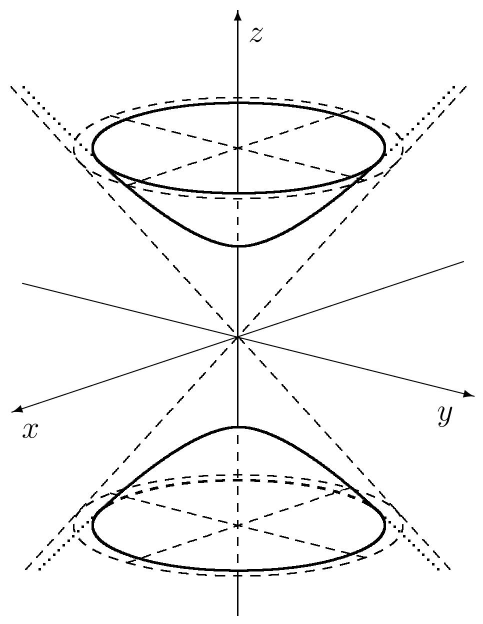
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{II.4.3}$$

je popsán *jednodílný hyperboloid*. (Viz obr. 6.)

Je-li $a = b$, pak se jedná o *rotační jednodílný hyperboloid*, který vznikne například rotací hyperboly $x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$ v rovině x, z okolo osy z.



Obr. 6



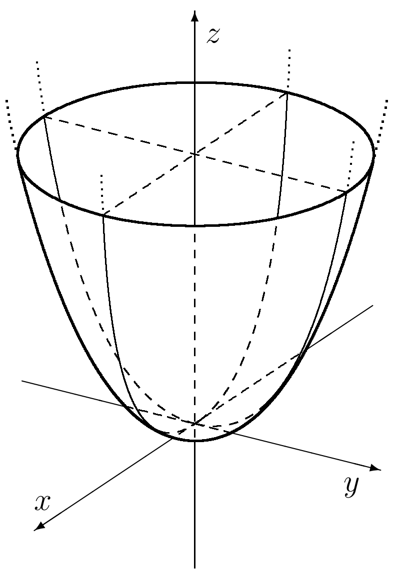
Obr. 7

II.4.7. Dvoudílný hyperboloid. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Rovnicí

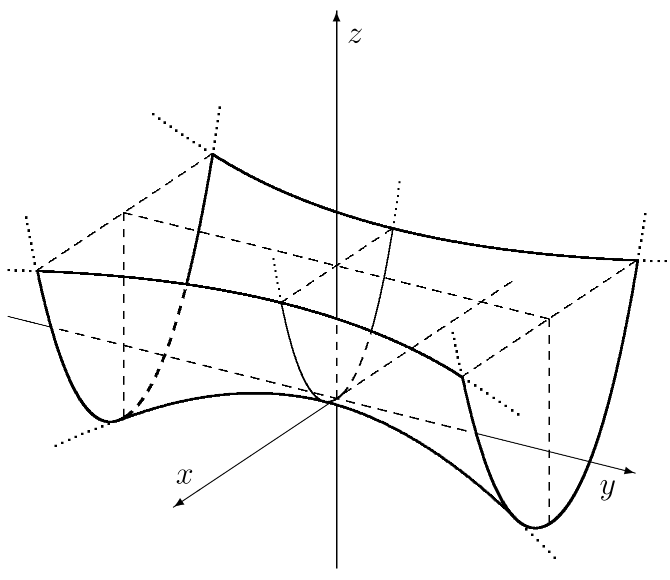
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{II.4.4}$$

je popsán <u>*dvoudílný hyperboloid*</u>. (Viz obr. 7.)

Je-li $a = b$, pak se jedná o <u>*rotační dvoudílný hyperboloid*</u>, který vznikne například rotací hyperboly $-x^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$ v rovině x, z okolo osy z.



Obr. 8



Obr. 9

II.4.8. Paraboloid. Nechť a, b jsou kladná čísla. Rovnicí

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \tag{II.4.5}$$

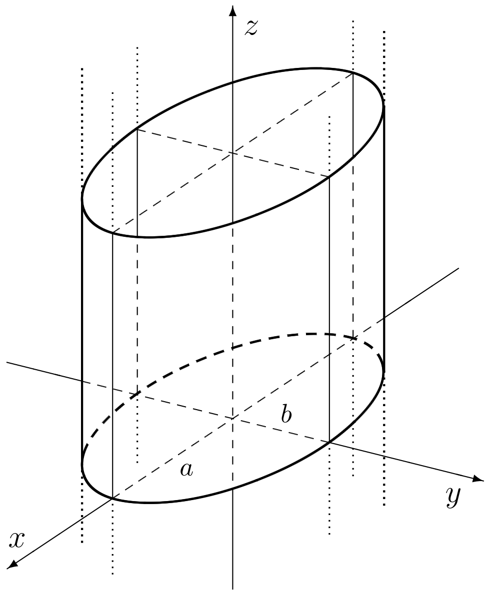
je popsán *eliptický paraboloid*. Jeho osou je osa z. (Viz obr. 8.)

Je-li $a = b$, pak se jedná o *rotační paraboloid*, který vznikne například rotací paraboly $z = x^2/a^2$ v rovině x, z okolo osy z.

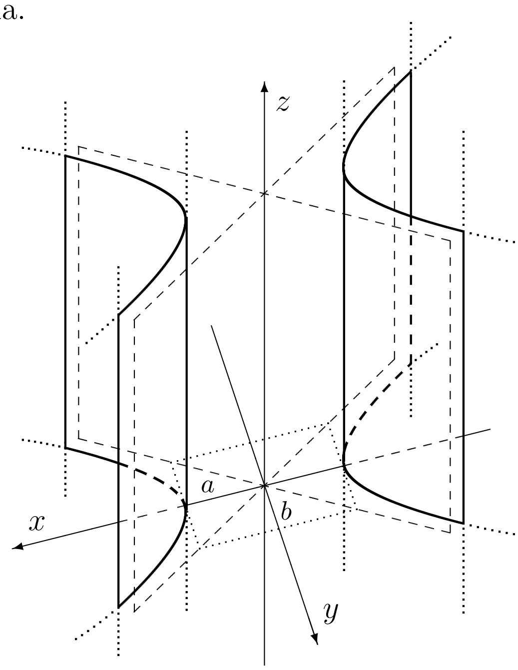
Rovnicí

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{II.4.6}$$

je popsán *hyperbolický paraboloid*. (Viz obr. 9.) Průnikem tohoto paraboloidu s každou rovinou typu $z = k$ (kde $k > 0$) je hyperbola.



Obr. 10



Obr. 11

II.4.9. Válcová plocha. Nechť a, b jsou kladná čísla. Rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{II.4.7}$$

je popsána *eliptická válcová plocha*. (Viz obr. 10.)

Je-li $a = b$, pak se jedná o *rotační válcovou plochu*, která vznikne například rotací rovnoběžných přímek $x = a$, $x = -a$ v rovině x, z okolo osy z.

Rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{II.4.8}$$

je popsána *hyperbolická válcová plocha*. (Viz obr. 11.)

Rovnicí

$$y = k\,x^2 \tag{II.4.9}$$

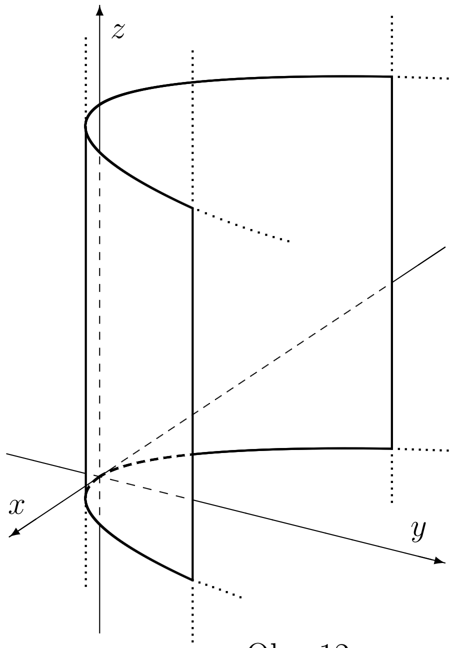
je popsána <u>*parabolická válcová plocha*</u>. (Viz obr. 12.)

II.4.10. Kuželová plocha. Nechť a, b, c jsou kladná čísla. Rovnicí

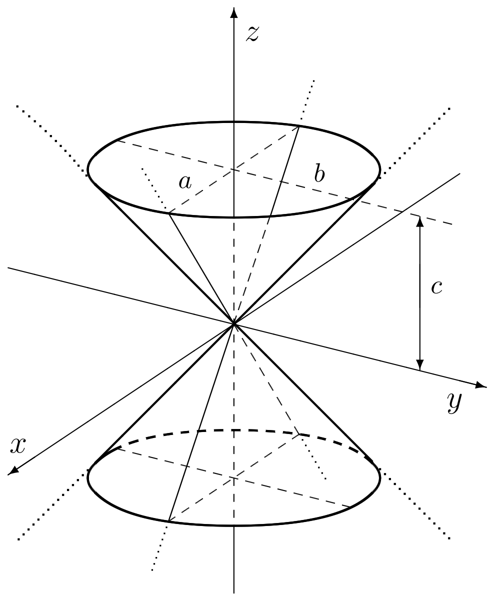
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{II.4.9}$$

je popsána <u>*eliptická kuželová plocha*</u>. (Viz obr. 13.)

Je-li $b = c$, pak se jedná o <u>*rotační kuželovou plochu*</u>, která vznikne například rotací přímek $x/a = z/c$, $x/a = z/c$ v rovině x, z kolem osy z.



Obr. 12



Obr. 13

S kvadrikami se opět setkáte v předmětu Matematika II, zejména v kapitole o plošných integrálech.

II.4.11. Cvičení. Jsou dány rovnice různých kvadrik. Poznejte o jaké kvadriky se jedná, pojmenujte je a určete jejich osy, případně poloosy.

a) $x^2 + y^2/4 + 9z^2 = 1$ b) $25\,(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 25$

c) $x^2/4 + y^2/4 - z^2/9 = 1$ d) $x^2 - (y-2)^2/4 - (z-4)^2/4 = 1$

e) $z = x^2 + 4y^2$ f) $y = 1 - 5x^2 - 5(z-2)^2$

g) $y^2 - x^2 = z$ h) $(x+2)^2 - 5z^2 = y$

i) $x^2 + z^2 = 4$ j) $x^2/4 + (y+4)^2 = 1$

k) $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$ l) $(y-1)^2 + z^2 = x^2$

m) $x^2 - 4z^2 = 1$ n) $(y+2)^2/4 - x^2/16 = 1$

o) $4x^2 - 9z^2 = 9y^2$ p) $y = x^2 + 2$

q) $x^2 + 4y^2 = 1$ r) $(x-4)^2/4 + y^2/16 + z^2 = 1$

Výsledky: a) Elipsoid se středem v počátku a s poloosami 1, 2, $\frac{1}{3}$.

b) Rotační elipsoid se středem v bodě $[1, 0, 0]$, poloosami 1, 5, 5 a osou rotace x.

c) Rotační jednodílný hyperboloid se středem v počátku a osou rotace z.

d) Rotační dvoudílný hyperboloid se středem v bodě $[0, 2, 4]$. Osou rotace je přímka $y = 2$, $z = 4$, rovnoběžná s osou x.

e) Eliptický paraboloid s vrcholem v počátku a osou z, otevřený v kladném směru osy z.

f) Rotační paraboloid s vrcholem v bodě $[0, 1, 2]$, otevřený v záporném směru osy y. Osou rotace je přímka $x = 0$, $z = 2$, rovnoběžná s osou y.

g) Hyperbolický paraboloid s vrcholem v počátku a osou z.

h) Hyperbolický paraboloid s vrcholem v bodě $[-2, 0, 0)$ a osou y.

i) Rotační válcová plocha s osou rotace y a poloměrem 2.

j) Eliptická válcová plocha. Osou je přímka $x = 0$, $y = 4$, rovnoběžná s osou z.

k) Eliptická kuželová plocha s vrcholem v počátku a s osou y.

l) Rotační kuželová plocha s vrcholem v bodě $[0, 1, 0]$. Osou rotace je přímka $y = 1$, $z = 0$, rovnoběžná s osou x.

m) Hyperbolická válcová plocha, rovnoběžná s osou y. Je souměrná podle této osy.

n) Hyperbolická válcová plocha, rovnoběžná s osou z. Je souměrná podle přímky $x = 0$, $y = -2$.

o) Rotační kuželová plocha s vrcholem v počátku a s osou rotace x.

p) Parabolická válcová plocha rovnoběžná s osou z. Jejím průnikem s rovinou x, y je parabola s vrcholem v bodě $[0, 2]$ a osou y. (Její rovnice v rovině x, y je stejná, jako rovnice celé válcové plochy: $y = x^2 + 2$.)

q) Eliptická válcová plocha. Její osou je osa z.

r) Elipsoid se středem v bodě $[4, 0, 0]$ a s poloosami 2, 4, 1.

III. Diferenciální počet

III.0.1. Rozšířená množina reálných čísel. *Rozšířenou množinou reálných čísel* nazýváme sjednocení $\mathbb{R}$ a dvouprvkové množiny, obsahující prvky značené $+\infty$ a $-\infty$ a nazývané *plus nekonečno* a *mínus nekonečno*. Tuto rozšířenou množinu reálných čísel budeme značit $\mathbb{R}^*$. Její prvky $-\infty$ a $+\infty$ budeme nazývat *nevlastními body*, ostatní prvky (tj. čísla z $\mathbb{R}$) *vlastními body*. V oboru reálných čísel umíme provádět operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a umocňování. Tyto operace lze přirozeným způsobem rozšířit na $\mathbb{R}^*$:

a) pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme:
$x + (+\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = -\infty, \quad x - (+\infty) = -\infty,$
$x - (-\infty) = +\infty, \quad x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0;$

b) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad (+\infty) - (-\infty) = +\infty,$
$(-\infty) - (+\infty) = -\infty,$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$

c) pro $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ definujeme:
$x \cdot (+\infty) = +\infty$ (je-li $x > 0$) nebo $= -\infty$ je-li ($x < 0$),
$x \cdot (-\infty) = -\infty$ (je-li $x > 0$) nebo $= +\infty$ (je-li ($x < 0$),
$(+\infty)/x = \operatorname{sgn} x \cdot (+\infty), \quad (-\infty)/x = \operatorname{sgn} x \cdot (-\infty).$

Nedefinovány zůstávají tedy operace dělení nulou, $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$ a $0 \cdot (\pm\infty)$. (Říkáme, že tyto operace nemají smysl.)

Na množinu $\mathbb{R}^*$ lze rovněž z $\mathbb{R}$ rozšířit uspořádání, definované pomocí relace „$<$": Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ definujeme: $-\infty < x < +\infty$.

III.0.2. Extrémy množin v $\mathbb{R}$. Je-li M množina v $\mathbb{R}$, pak *maximem* množiny M nazýváme číslo $y \in M$ takové, že $\forall\ x \in M: \quad x \leq y$. Maximum množiny M označujeme $\max M$.

Analogicky, *minimem* množiny M nazýváme číslo $z \in M$ takové, že $\forall\ x \in M$: $x \geq z$. Minimum množiny M značíme $\min M$. Maximum a minimum množiny M souhrnně nazýváme *extrémy* množiny M.

Upozorňujeme čtenáře, že ne každá množina M v $\mathbb{R}$ musí mít maximum a minimum. (Viz například množinu $M = (0, 1)$, která žádný minimální ani maximální prvek neobsahuje.) Tato skutečnost je motivací k následujícímu zobecnění pojmů „minimum" a „maximum".

***III.0.3. Supremum a infimum množiny v $\mathbb{R}$.** Předpokládejme, že $M \subset \mathbb{R}$. Číslo $K \in \mathbb{R}^*$ nazýváme *supremem* množiny M, jestliže

a) $\forall\ x \in M: \quad x \leq K$,

b) K je nejmenší ze všech čísel, majících vlastnost a).

Pro supremum množiny M používáme označení $\sup M$.

Analogickým způsobem lze definovat *infimum* množiny M. Značíme je $\inf M$ a je to největší ze všech čísel $L \in \mathbb{R}^*$ takových, že $\forall\ x \in M: \quad x \geq L$.

Na rozdíl od maxima a minima množiny M, které mohou i nemusí existovat, o supremu a infimu množiny M lze dokázat (nikoli příliš snadno), že vždy existují. Rozmyslete si sami, že pokud množina M má maximum, pak $\sup M = \max M$. Podobně, pokud existuje $\min M$, pak $\inf M = \min M$.

III.0.4. Okolí bodu v $\mathbb{R}^*$. Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak *okolím* bodu x nazýváme každý interval $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$. Toto okolí budeme značit $U_\varepsilon(x)$ nebo pouze $U(x)$. (Značení vychází z německého slova ,,die Umgebung", což česky znamená ,,okolí".)

Prstencovým okolím bodu $x \in \mathbb{R}$ nazýváme každou množinu typu $U(x) - \{x\}$. Pro toto okolí se též používá název *neúplné okolí*. Užíváme značení: $P(x)$.

Za *okolí $+\infty$* a zároveň za *prstencové (= neúplné) okolí $+\infty$* budeme považovat každý interval typu $(a, +\infty)$ (kde $a \in \mathbb{R}$). Podobně, *okolím $-\infty$* a zároveň *prstencovým (= neúplným) okolím $-\infty$* budeme nazývat jakýkoliv interval typu $(-\infty, a)$ (kde $a \in \mathbb{R}$). Protože okolí a prstencové okolí bodu $+\infty$ nerozlišujeme, můžeme pro ně používat označení $U(+\infty)$ i $P(+\infty)$. Podobně, okolí i prstencové okolí bodu $-\infty$ můžeme označovat $U(-\infty)$ i $P(-\infty)$.

Levým okolím bodu $x \in \mathbb{R}$ nazýváme každý interval typu $(x-\varepsilon, x)$, kde $\varepsilon > 0$. Podobně, *pravé okolí* bodu $x \in \mathbb{R}$ je libovolný interval typu $(x, x+\varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$. Pro levé a pravé okolí bodu x používáme označení: $P_-(x)$, $P_+(x)$.

III.1. Posloupnosti reálných čísel

III.1.1. Posloupnosti reálných čísel. *Posloupností reálných čísel* (zkráceně *posloupností*) budeme nazývat zobrazení množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$. Posloupnost, která každému $n \in \mathbb{N}$ přiřazuje číslo a_n, se značí $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ nebo stručněji pouze $\{a_n\}$. Číslo a_n se nazývá *n–tým členem* posloupnosti $\{a_n\}$. Je-li $M \subset \mathbb{R}$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in M$, pak $\{a_n\}$ nazýváme *posloupností v M*.

III.1.2. Omezená, monotónní a ryze monotónní posloupnost. Posloupnost $\{a_n\}$ nazýváme

a) *omezenou shora*, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n \le K$;
b) *omezenou zdola*, existuje-li $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n \ge K$;
c) *omezenou*, je-li tato posloupnost omezená shora i zdola;
d) *rostoucí*, jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}$;
e) *klesající*, jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}$;
f) *neklesající*, jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n \le a_{n+1}$;
g) *nerostoucí*, jestliže $\forall\, n \in \mathbb{N}: \ a_n \ge a_{n+1}$;
h) *monotónní*, je-li nerostoucí nebo neklesající;
i) *ryze monotónní*, je-li rostoucí nebo klesající.

Všimněte si, že platí: Rostoucí posloupnost je speciální případ neklesající posloupnosti. Klesající posloupnost je speciální případ nerostoucí posloupnosti. Ryze monotónní posloupnost je speciální případ monotónní posloupnosti. Posloupnost, která je zároveň rostoucí a klesající, neexistuje. Posloupnost, která je zároveň nerostoucí a neklesající, je konstantní.

III.1.3. Limita posloupnosti. Číslo $a \in \mathbb{R}^*$ nazýváme *limitou* posloupnosti $\{a_n\}$, jestliže

$$\text{(III.1.1)} \qquad [\forall\, U(a)\,] \quad [\,\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,] \quad [\,\forall\, n \in \mathbb{N}\,] \;:\quad (n \geq n_0) \Longrightarrow (a_n \in U(a)\,).$$

(Čteme: Ke každému okolí $U(a)$ bodu a existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro každé přirozené číslo n platí: Je-li $n \geq n_0$, pak $a_n \in U(a)$.) Píšeme: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ nebo stručněji $\lim a_n = a$, případně pouze $a_n \to a$.

III.1.4. Poznámka. Limita posloupnosti $\{a_n\}$ je číslo, ke kterému se a_n „blíží", jestliže se indexy n „blíží" k nekonečnu (též říkáme: „n jde do nekonečna"). Možná se vám zdá, že výrokem (III.1.1) je tato skutečnost popsána příliš složitě. Je to však tím, že pro pojem „blížit se" matematika jiné vyjádření nemá. Pokud výroku (III.1.1) po prvním přečtení nerozumíte, nic si z toho nedělejte. Jeho správné pochopení vyžaduje důkladné promyšlení. Rovněž vám pomůže, prostudujete-li si pečlivě důkaz věty III.1.6. Pojem limity posloupnosti (i limity funkce – s tím se seznámíme později) patří k základním pojmům matematické analýzy. Jeho důležitost spočívá zejména v tom, že je vyjádřením jakéhosi nekonečného procesu (přibližování se). Vznikl v 16.–17. století. Do matematických úvah, tehdy stále ještě ovlivněných starověkou matematikou, vnesl dynamiku a přispěl též k poznání možností jak zacházet s „obávaným" nekonečnem.

Ne každá posloupnost musí mít limitu. V odstavci III.1.10 ukážeme příklad posloupnosti, která žádnou limitu nemá.

Má-li posloupnost limitu, pak tato limita není závislá (co do existence i hodnoty) na tom, jak vypadá nějaká „počáteční část" posloupnosti, například prvních milión členů. Uvědomme si, že má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou a a změníme-li posloupnost $\{\,a_n\}$ například tak, že změníme libovolným způsobem hodnoty prvního až milióntého členu, pak pozměněná posloupnost bude mít limitu opět rovnou a.

III.1.5. Konvergentní a divergentní posloupnost. Je-li limitou posloupnosti $\{a_n\}$ číslo z $\mathbb{R}$ (tedy nikoliv $-\infty$ nebo $+\infty$), říkáme, že tato posloupnost je *konvergentní*, nebo také, že má *vlastní limitu*. Je-li $\lim a_n = +\infty$ (nebo $-\infty$), říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *nevlastní limitu*. Posloupnost, která nemá žádnou limitu nebo má nevlastní limitu, se nazývá *divergentní*.

Je-li $\lim a_n = a$ a $a \in \mathbb{R}$, říkáme též, že *posloupnost* $\{a_n\}$ *konverguje* k číslu a.

III.1.6. Věta. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz: Ukážeme tzv. „důkaz sporem". Budeme předpokládat, že tvrzení věty neplatí a dalšími úvahami dospějeme ke sporu s tímto předpokladem. Předpoklad se ukáže chybným a věta tak bude dokázána.

Neplatí-li tvrzení věty, musí existovat alespoň jedna posloupnost, která má více limit. Označme takovou posloupnost $\{a_n\}$ a vyberme z jejích limit dvě různé – zvolme pro ně označení a' a a''. Existují okolí $U(a')$ a $U(a'')$, která jsou disjunktní (tj. jejich průnik je prázdná množina). Podle (III.1.1) k okolí $U(a')$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí implikace: $n \geq n_1 \implies a_n \in U(a')$. Podle (III.1.1) však také k okolí $U(a'')$ existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí implikace: $n \geq n_2 \implies a_n \in U(a'')$. Pro ta $n \in \mathbb{N}$, která jsou zároveň $\geq n_1$ i $\geq n_2$, tedy musí a_n patřit zároveň do $U(a')$ i do $U(a'')$. To ale není možné, neboť okolí $U(a')$ a $U(a'')$ žádné společné body nemají. Dospěli jsme tudíž k žádanému sporu. $\square$

III.1.7. Vybraná posloupnost. Nechť $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost

$$\{a_{k_1},\, a_{k_2},\, a_{k_3},\, \ldots\,,\, a_{k_n},\, \ldots\}$$

nazýváme _vybranou posloupností_ z posloupnosti $\{a_n\}$. Tuto vybranou posloupnost značíme zkráceně $\{a_{k_n}\}$.

III.1.8. Příklad. Posloupnost $\{1/(2n)\}$ (tj. posloupnost $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\}$) je vybranou posloupností z posloupnosti $\{1/n\}$ (tj. z posloupnosti $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\}$).

III.1.9. Věta. *Má-li posloupnost $\{a_n\}$ limitu rovnou a, pak jakákoliv vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má tutéž limitu a.*

Důkaz: Předpokládejme, že $\lim a_n = a$, tj. že platí (III.1.1). Chceme ukázat, že $\lim a_{k_n} = a$, tj. že platí:

$$[\forall\, U(a)] \quad [\exists\, n_1 \in \mathbb{N}] \quad [\forall\, m \in \mathbb{N}] \; : \quad (n \geq n_1) \implies (a_{k_m} \in U(a)).$$

K libovolně vybranému $U(a)$ existuje dle (III.1.1) $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n \in U(a)$ pro $n \geq n_0$. Vybereme-li nyní za n_1 takové přirozené číslo, že $k_m \geq n_0$ pro $m \geq n_1$, je zřejmě pro $\forall\, m \in \mathbb{N}$ požadovaná implikace $(m \geq n_1) \implies (a_{k_m} \in U(a))$ splněna. $\square$

III.1.10. Příklad. Posloupnost $\{(-1)^n \cdot n\}$ nemá limitu. Vybraná posloupnost, odpovídající pouze sudým indexům n (tj. posloupnost $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$) má limitu $+\infty$, zatímco vybraná posloupnost, odpovídající pouze lichým indexům n (tj. posloupnost $\{-1, -3, -5, -7, \ldots\}$) má limitu $-\infty$. Kdyby posloupnost $\{(-1)^n \cdot n\}$ měla nějakou limitu a, pak by podle věty III.1.9 musely mít obě vybrané posloupnosti stejnou limitu rovnou a. Jak ale vidíme, to není pravda.

Při výpočtu hodnot konkrétních limit jsou důležitá pravidla, která jsou obsahem následující věty. Tuto větu uvádíme bez důkazu.

III.1.11. Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností). *Předpokládejme, že $\lim a_n = a$ a $\lim b_n = b$. Pak platí:*

a) $\lim\,(a_n + b_n) \;=\; a + b,$

b) $\lim\,(a_n - b_n) \;=\; a - b,$

c) $\lim\,(a_n \cdot b_n) \;=\; a \cdot b,$

d) $\lim\,(a_n / b_n) \;=\; a/b,$

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl a pokud v případě d) podíl a_n/b_n má smysl pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

III.1.12. Poznámka. Větu III.1.11 můžeme použít, pokud na pravé straně například nevyjde výraz $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty) - (+\infty)$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$ nebo $a/0$. V případě výpočtu limity podílu a_n/b_n kromě toho potřebujeme, aby tento podíl byl vůbec definován. Protože limita není závislá na tom, jak vypadá prvních m členů posloupnosti (pro libovolně, ale pevně zvolené číslo $m \in \mathbb{N}$ – viz poznámku III.1.4), je z hlediska výpočtu limity postačující, je-li podíl a_n/b_n definován nikoliv pro všechna $n \in \mathbb{N}$, ale pouze pro $n \geq m$.

III.1.13. Příklad. $\lim \dfrac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 1000} = \lim \dfrac{3 + (2/n) - (1/n^2)}{2 + (1000/n^2)} =$

$$= \lim \frac{3 + 2/(+\infty) - 1/(+\infty)^2}{2 + 1000/(+\infty)^2} = \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}.$$

III.1.14. Příklad. $\lim (\sqrt{n} - \sqrt{2n}) = \lim \dfrac{(\sqrt{n} - \sqrt{2n})(\sqrt{n} + \sqrt{2n})}{\sqrt{n} + \sqrt{2n}} =$

$$= \lim \frac{n - 2n}{\sqrt{n} + \sqrt{2n}} = \lim \frac{-\sqrt{n}}{1 + \sqrt{2}} = -\infty.$$

III.1.15. Věta (o limitě sevřené posloupnosti). *Nechť* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ *jsou posloupnosti, pro které platí:* $\lim a_n = \lim c_n = c$ *a* $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad a_n \leq b_n \leq c_n$. *Pak* $\lim b_n = c$.

III.1.16. Příklad. Ukážeme, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$. Umocníme-li tuto rovnost na n–tou, dostaneme podle binomické věty:

$$n = 1 + \binom{n}{1} \delta_n + \binom{n}{2} \delta_n^2 + \binom{n}{3} \delta_n^3 + \ldots + \delta_n^n.$$

Protože $\delta_n \geq 0$, vyplývá odtud, že pro $n > 1$ platí:

$$n \geq \binom{n}{2} \delta_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}\, \delta_n^2 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq \delta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Protože $\lim \sqrt{2/(n-1)} = 0$, užitím věty III.1.15 dostáváme, že rovněž $\lim \delta_n = 0$. Z rovnosti $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ nyní plyne, že $\lim \sqrt[n]{n} = 1$.

III.1.17. Cvičení. Vypočítejte následující limity (nebo dokažte, že neexistují):

a) $\lim\, (n^3 - 3\,n^2 - 521\,n)$ b) $\lim \sqrt[n]{3n}$ c) $\lim \dfrac{3n^3 - n + 1}{2n^2 + 7n}$

d) $\lim\, (-1)^n \dfrac{2n}{n-3}$ e) $\lim\, (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})$ f) $\lim\, (\sqrt{n} - \sqrt[3]{3n})$

g) $\lim \dfrac{\sin n}{n}$ h) $\lim \dfrac{2\sqrt{n}}{4\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}$ i) $\lim \dfrac{2^n + (-1)^n}{3^n}$

Výsledky: a) $+\infty$, b) 1, c) $+\infty$, d) neexistuje, e) 0, f) $+\infty$, g) 0, h) $\frac{1}{2}$, i) 0.

III.1.18. Cvičení. Zkuste sami dokázat (nejlépe ,,sporem" – viz důkaz věty III.1.6), že platí:

a) Posloupnost nezáporných čísel (tj. posloupnost v $\langle 0, +\infty)$) nemůže mít zápornou limitu.

b) Posloupnost nekladných čísel (tj. posloupnost v $(-\infty, 0\rangle$) nemůže mít kladnou limitu.

III.2. Funkce – základní pojmy

III.2.1. Pojem funkce. Je-li $M \subset \mathbb{R}$, pak každé zobrazení M do $\mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* (krátce pouze *funkcí*).

Funkce budeme označovat písmeny, jako na příklad f, g, h, φ, ψ, F, G, apod.

III.2.2. Definiční obor, obor hodnot, graf. Funkce je speciální případ zobrazení a pojmy ,,definiční obor zobrazení" a ,,obor hodnot zobrazení" jsou známé ze střední školy. Proto považujeme za známé též pojmy ,,definiční obor funkce" a ,,obor hodnot funkce". V souladu s označením, zavedeným pro obecná zobrazení (viz Úvod), značí $D(f)$ definiční obor a $H(f)$ obor hodnot funkce f.

Grafem funkce f nazýváme množinu $G(f) = \{ [x, f(x)] \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f) \}$.

III.2.3. Poznámka. Například skutečnost, že f je funkce definovaná v intervalu $(0, 2\rangle$, která každému x z tohoto intervalu přiřazuje hodnotu $x^2 - 1$, zapisujeme jedním z následujících způsobů:

a) $f: \quad y = x^2 - 1 \quad$ pro $x \in (0, 2\rangle$;

b) $f(x) = x^2 - 1 \quad$ pro $x \in (0, 2\rangle$.

V obou zápisech x představuje tzv. *nezávisle proměnnou* nebo také *argument* funkce f. V zápisu a) představuje y tzv. *závisle proměnnou*. (Pochopitelně, pro označení závisle proměnné i nezávisle proměnné můžeme používat i jiná písmena; užívání x a y je pouze zvyk.)

Často nebudeme při zadání funkce uvádět její definiční obor. V takovém případě bude definičním oborem množina všech $x \in \mathbb{R}$, pro která má vzorec, jímž je funkce definovaná, smysl. Například: definičním oborem funkce $f(x) = \sqrt{x - 2}$ je interval $\langle 2, +\infty)$.

Na zcela exaktní úrovni je mezi mezi f a $f(x)$ tento rozdíl: f je označení funkce, zatímco $f(x)$ je hodnota funkce f v bodě x (tj. $f(x)$ je číslo, které je funkcí f přiřazeno číslu x). Podobně, $f(a)$ je hodnota funkce f v bodě a, $f(2)$ je hodnota funkce f v bodě 2, apod.

Považujeme za nutné čtenáře upozornit, že výše uvedené značení funkcí a jejich funkčních hodnot nebývá vždy v odborné literatuře dodržováno zcela důsledně. Například chceme-li zdůraznit, že f je funkcí proměnné x, můžeme hovořit o ,,funkci $f(x)$" nebo o ,,funkci $y = f(x)$" místo pouze o ,,funkci f ".

Místo o ,,funkci f, definované rovnicí $f(x) = x^2$" se často mluví pouze o ,,funkci x^2". Nebude-li hrozit nebezpečí že vznikne zmatek, budeme toto úsporné vyjadřování používat také.

Jak vidíte, funkce lze zapisovat a označovat různě a některá označení mohou mít dokonce dvojí smysl. (Například jak jsme se již zmínili, $f(x)$ je přesně vzato hodnota funkce f v bodě x, ale někdy může $f(x)$ označovat i samotnou funkci f.) Věříme, že tato skutečnost vám problémy působit nebude. Ze souvislostí v jakých označení používáme, bývá vždy zřejmé, co máme na mysli.

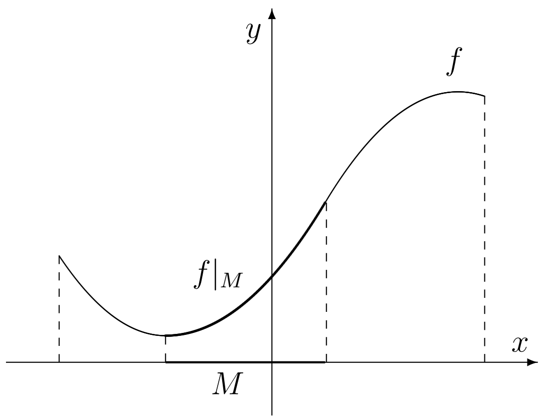
III.2.4. Operace s funkcemi. *Součtem funkcí* f a g nazýváme funkci h takovou, že $h(x) = f(x) + g(x)$ pro $x \in D(f) \cap D(g)$. Používáme zápis: $h = f + g$.

Analogickým způsobem definujeme i *rozdíl* a *součin funkcí* f a g. Rovněž *podíl funkcí* f a g lze definovat podobně – definičním oborem tohoto podílu je však množina $[\,D(f) \cap D(g)\,] - \{x \in D(g);\ g(x) = 0\}$.

Absolutní hodnotou funkce f nazýváme funkci h takovou, že $h(x) = |f(x)|$ pro $x \in D(f)$. Používáme zápis: $h = |f|$.

III.2.5. Restrikce (zúžení) funkce. Předpokládejme, že f je funkce a $M \subset D(f)$. Funkci, definovanou pouze na M, která každému $x \in M$ přiřazuje tutéž hodnotu jako funkce f (tj. $f(x)$), nazýváme *restrikcí* funkce f na množinu M a značíme ji $f|_M$. Pro označení množiny všech hodnot, kterých funkce f nabývá na množině M, můžeme používat dva symboly: $H(f|_M)$ nebo $f(M)$.

Na obr. 14 vidíme graf funkce f a vybranou množinu $M \subset D(f)$. Silněji je vytažen graf restrikce funkce f na množinu M.

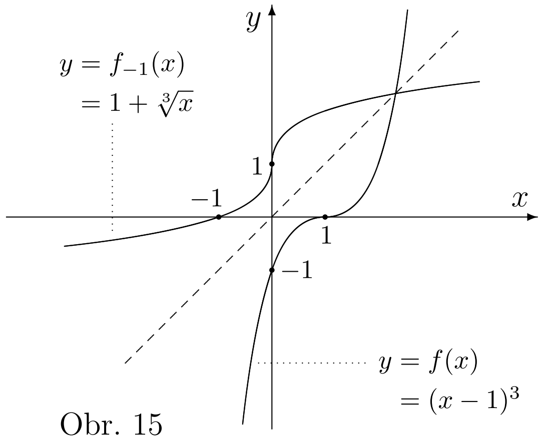


Obr. 14

III.2.6. Inverzní funkce. Funkce je speciální typ zobrazení. Je známo, že k prostým zobrazením existují inverzní zobrazení. Proto také k prostým funkcím existují tzv. *inverzní funkce*. Připomeňme, že funkci f nazýváme *prostou*, jestliže pro $\forall\ x_1, x_2 \in D(f)$ platí implikace: $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$. Inverzní funkci k funkci f značíme f_{-1}. Jejím definičním oborem je $H(f)$, oborem hodnot je $D(f)$ a pro $\forall\ x \in D(f)$ platí: $y = f(x) \iff x = f_{-1}(y)$.

Tvar inverzní funkce můžeme tedy z rovnice $y = f(x)$ získat tak, že z této rovnice vypočítáme x (pokud je ovšem výpočet možný) a vyjádříme závislost x na y. Například: z rovnice $y = (x-1)^3$ vypočítáme $x = 1 + \sqrt[3]{y}$. Zaměníme-li zde nyní x a y (pouze proto, že nezávisle proměnnou obvykle označujeme x a závisle proměnnou y), dospíváme k poznání, že inverzní funkcí k funkci $y = f(x) = (x-1)^3$ (definované pro $x \in \mathbb{R}$) je funkce $y = f_{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$ (rovněž definovaná pro $x \in \mathbb{R}$). Grafy obou funkcí f a f_{-1} jsou nakresleny na obr. 15.

Grafy funkcí f a f_{-1} jsou souměrné podle osy 1. a 3. kvadrantu. (Toto je důsledkem skutečnosti, že souřadnice bodů $[x, y] \in G(f)$ vyhovují rovnici $y = f(x)$, která je ekvivalentní s rovnicí $x = f_{-1}(y)$. Naproti tomu, souřadnice bodů $[x, y] \in G(f_{-1})$ vyhovují rovnici $y = f_{-1}(x)$, která se od rovnice $x = f_{-1}(y)$ liší pouze záměnou x a y. Vzájemná výměna x a y odpovídá v rovině x, y otočení okolo přímky $y = x$.)



Obr. 15

III.2.7. Složená funkce. Jsou-li f a g funkce pro které platí $H(g) \subset D(f)$, lze definovat funkci h předpisem $h(x) = f(g(x))$ pro $x \in D(g)$. Funkci h nazýváme *složenou funkcí* (z funkcí f a g). Používáme označení $h = f \circ g$ nebo $h = f * g$ nebo píšeme: $h(x) = f(g(x))$. Funkci f nazýváme *vnější funkcí* a funkci g *vnitřní funkcí*.

Například: $\sin(2x)$ je složená funkce. Vnější funkce je sinus, vnitřní funkce je $2x$.

III.2.8. Omezená funkce. O funkci f říkáme, že je *shora omezená*, existuje-li číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq K$. (K se nazývá ,,horní mez", ,,horní hranice" nebo také ,,horní závora" funkce f.)

Analogicky, o funkci f říkáme, že je *zdola omezená*, existuje-li číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq L$. (L se nazývá ,,dolní mez", ,,dolní hranice" nebo také ,,dolní závora" funkce f.)

Funkci f nazýváme *omezenou*, je-li f zároveň shora i zdola omezená.

Předpokládejme dále, že $M \subset D(f)$. Funkci f nazýváme *shora omezenou na množině M*, existuje-li číslo $K \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \leq K$ (tj. je-li restrikce $f|_M$ shora omezenou funkcí). Podobně můžeme definovat pojem funkce *zdola omezené na množině M* a pojem funkce *omezené na množině M*.

Například: restrikce funkce $1/x$ na interval $(-\infty, 0)$ je shora omezená, nikoli však zdola omezená. Naopak, restrikce téže funkce na interval $(0, +\infty)$ je zdola omezená, není však shora omezená. (Podívejte se na obr. 21 b.)

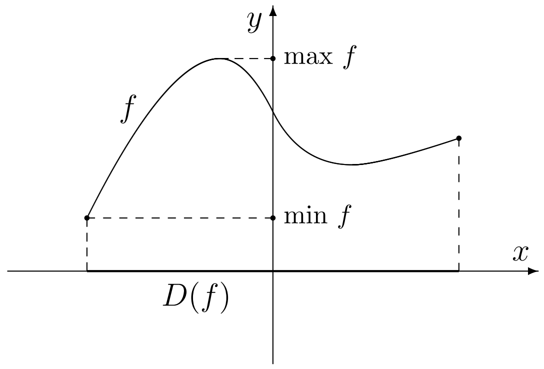
III.2.9. Extrémy funkce. Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého *maxima*, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$. Píšeme: $f(x_0) = \max f$.

Analogicky, funkce f nabývá v bodě $x_0 \in D(f)$ svého *minima*, jestliže pro všechna $x \in D(f)$ platí: $f(x) \geq f(x_0)$. Píšeme: $f(x_0) = \min f$.

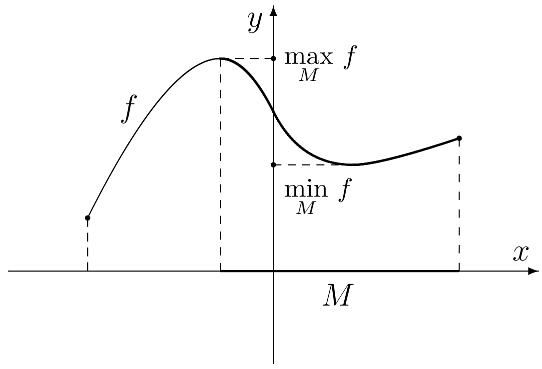
Předpokládejme, že $M \subset D(f)$. Říkáme, že funkce f nabývá v bodě $x_0 \in M$ svého *maxima na množině M*, jestliže pro všechna $x \in M$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$. Píšeme: $f(x_0) = \max_M f$. Další používaná označení maxima funkce f na množině M jsou: $\max\limits_M f$, $\max\limits_{x \in M} f(x)$. Podobně lze definovat i *minimum funkce f na množině M*. Používáme pro ně označení: $\min_M f$, $\min\limits_M f$ nebo $\min\limits_{x \in M} f(x)$.

Maximum a minimum funkce f nazýváme souhrnně *extrémy* funkce f.

Na základě výše uvedených definic si sami promyslete, proč platí rovnosti $\max_M f = \max f|_M$ a $\min_M f = \min f|_M$.



Obr. 16a



Obr. 16b

Na obr. 16a je znázorněn graf funkce f s maximem i minimem této funkce. Na obr. 16b vidíte graf funkce f se silně vytaženou restrikcí na množinu M a s vyznačeným maximem a minimem funkce f na M.

*__III.2.10. Supremum a infimum funkce.__ Supremum množiny hodnot funkce f (tj. množiny $H(f)$) nazýváme *supremem funkce f*. Používáme označení $\sup f$.

V souladu s definicí suprema množiny v odstavci III.0.3 a definicí pojmu ,,horní mez" omezené funkce f v odstavci III.2.8 poznamenejme, že supremum omezené funkce f je nejmenší ze všech horních mezí f. (Odtud vychází i jiné označení suprema funkce f, užívané zejména v anglické literatuře: $\operatorname{lub} f$, protože anglicky se ,,nejmenší horní mez" řekne ,,least upper bound".)

Analogicky, infimum množiny funkčních hodnot funkce f nazýváme *infimem funkce f*. Používáme označení $\inf f$. (V anglicky psané literatuře se často užívá označení $\operatorname{glb} f$, což je zkratka pro ,,greatest lower bound"=,,největší dolní mez".)

Supremum množiny hodnot funkce f na množině M (tj. množiny $H(f|_M)$) nazýváme *supremem funkce f na množině M*. Značíme je $\sup_M f$, $\sup\limits_M f$ nebo $\sup\limits_{x\in M} f(x)$.

Analogicky můžeme definovat i *infimum funkce f na množině M*. Značíme je $\inf_M f$, $\inf\limits_M f$ nebo $\inf\limits_{x\in M} f(x)$

III.2.11. Poznámka. Upozorňujeme čtenáře na to, že zatímco supremum a infimum funkce f (na celém definičním oboru nebo pouze na množině M) vždy existují, maximum a minimum funkce f (na celém $D(f)$ nebo pouze na M) existovat nemusí.

Například: Funkce $f(x) = 2x$ nemá maximum ani minimum v otevřeném intervalu $(0, 4)$. (Pokud někdo napíše, že $\min_{(0,4)} f = 0$ a $\max_{(0,4)} f = 8$, tak je to chyba, protože 0 ani 8 nepatří mezi funkční hodnoty funkce v intervalu $(0, 4)$. Přitom $\min_{(0,4)} f$ má být nejmenší ze všech funkčních hodnot a $\max_{(0,4)} f$ má být největší ze všech funkčních hodnot funkce f v intervalu $(0, 4)$ – obě tedy musí patřit mezi funkční hodnoty.) Supremum a infimum funkce f v intervalu $(0, 4)$ ovšem existují a platí: $\inf_{(0,4)} f = 0$ a $\sup_{(0,4)} f = 8$.

Existuje-li $\max f$, je $\sup f = \max f$. Podobně, existuje-li $\min f$, je $\inf f = \min f$. (Stejná tvrzení lze vyslovit i o $\max_M f$, $\sup_M f$, $\min_M f$ a $\inf_M f$.) Odtud a z výše uvedeného příkladu (funkce $f(x) = 2x$ v intervalu $(0, 4)$) je patrné, že pojmy ,,supremum funkce" a ,,infimum funkce" jsou zobecněním pojmů ,,maximum funkce" a ,,minimum funkce".

III.2.12. Monotónní a ryze monotónní funkce. Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Funkci f nazýváme

a) *rostoucí na M*, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$;

b) *klesající na M*, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$;

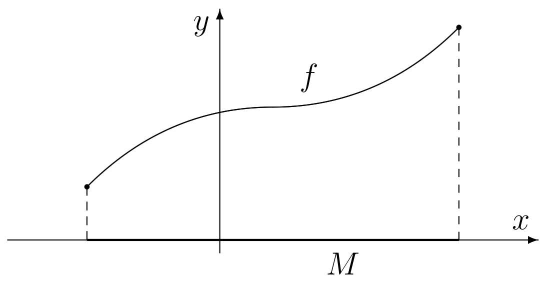
c) *nerostoucí na M*, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$;

d) *neklesající na M*, jestliže $\forall\, x_1, x_2 \in M: \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$;

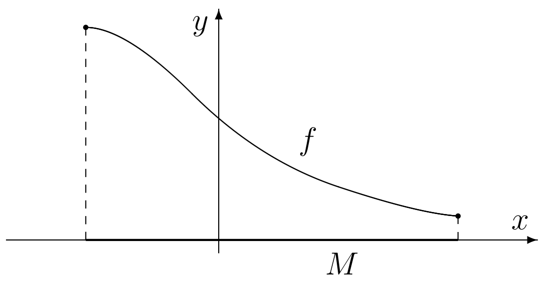
e) *monotónní na M*, je-li f na M nerostoucí nebo neklesající;

f) *ryze monotónní na M*, je-li f na M rostoucí nebo klesající.

Funkci, která je rostoucí na celém svém definičním oboru, nazýváme krátce pouze *rostoucí* (bez bližší specifikace, kde). Podobně lze zavést pojem funkce *klesající*, *nerostoucí*, *neklesající*, *monotónní* a *ryze monotónní*.

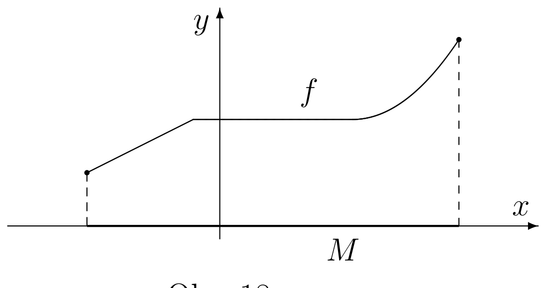


Obr. 17a

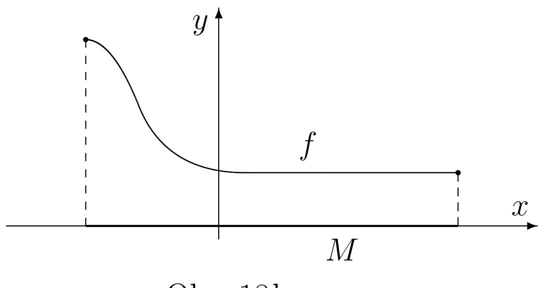


Obr. 17b

Na obr. 17a vidíte funkci rostoucí na množině M a na obr. 17b funkci klesající na množině M. Na obr. 18a je nakreslen graf funkce neklesající na množině M a na obr. 18b graf funkce nerostoucí na množině M.



Obr. 18a



Obr. 18b

Všimněte si, že rostoucí funkce je zároveň funkcí neklesající, klesající funkce je zároveň funkcí nerostoucí a ryze monotónní funkce je tudíž speciálním případem funkce monotónní. Funkce, která je nerostoucí i neklesající, je konstantní. Funkce, která je současně rostoucí a klesající, neexistuje.

Ryze monotónní funkce je prostá (a tudíž k ní existuje inverzní funkce).

III.2.13. Věta. *Je-li f rostoucí funkce, je inverzní funkce f_{-1} také rostoucí.*

Analogická věta platí i pro funkce klesající. Zkuste si sami obě věty (tj. pro funkci rostoucí i klesající) dokázat.

III.2.14. Sudá, lichá a periodická funkce. Funkci f nazýváme *sudou* (respektive *lichou*), jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí: $(-x)$ patří rovněž do $D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (respektive $f(-x) = -f(x)$).

Funkci f nazýváme *periodickou s periodou ω*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ a každé $k \in \mathbb{Z}$ platí: $x + k\omega$ patří rovněž do $D(f)$ a $f(x + k\omega) = f(x)$.

Graf funkce sudé je souměrný podle osy y a graf funkce liché je souměrný podle počátku. Například: Funkce x^2, $x^2 + 5$, x^4 a $\cos x$ jsou sudé, zatímco funkce x^3, $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ jsou liché. Načrtněte si jejich grafy!

III.3. Vybrané konkrétní funkce

III.3.1. Elementární funkce, známé ze střední školy. Ze střední školy známe tyto konkrétní funkce:

a) *konstantní funkce:* $f(x) = c$ (kde $c \in \mathbb{R}$)

b) *lineární funkce:* $f(x) = kx + q$ (kde $k, q \in \mathbb{R}$ a $k \neq 0$)

c) *mocninná funkce:* $f(x) = x^\alpha$ (kde $\alpha \in \mathbb{R}$)

d) *funkce sinus:* $f(x) = \sin x$

e) *funkce kosinus:* $f(x) = \cos x$

f) *funkce tangens:* $f(x) = \operatorname{tg} x$

g) *funkce kotangens:* $f(x) = \operatorname{cotg} x$

h) *exponenciální funkce při základu a* (kde $a > 0$): $f(x) = a^x$

i) *logaritmická funkce při základu a* (kde $a > 0$, $a \neq 1$): $f(x) = \log_a x$

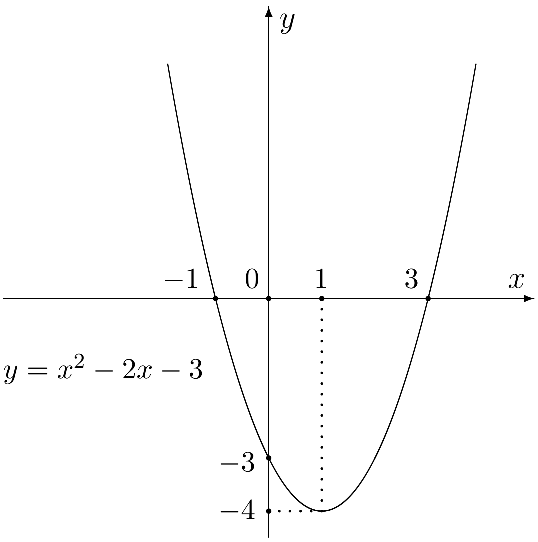
Zopakujte si sami vlastnosti těchto funkcí (tj. jak vypadají jejich definiční obory, obory hodnot, grafy, jaké důležité vzorce pro ně platí, kde jsou tyto funkce rostoucí, klesající, apod., jaká mají maxima a minima, eventuálně též suprema a infima, atd.).

V následujících odstavcích se seznámíme s některými dalšími důležitými funkcemi: s polynomem (odstavec III.3.2), s exponenciální a logaritmicku funkcí o základu e (kde e je Eulerovo číslo – odstavec III.3.3) a s tzv. cyklometrickými funkcemi (odstavce III.3.5 – III.3.6). V odstavci III.3.4 se vrátíme k mocninné funkci.

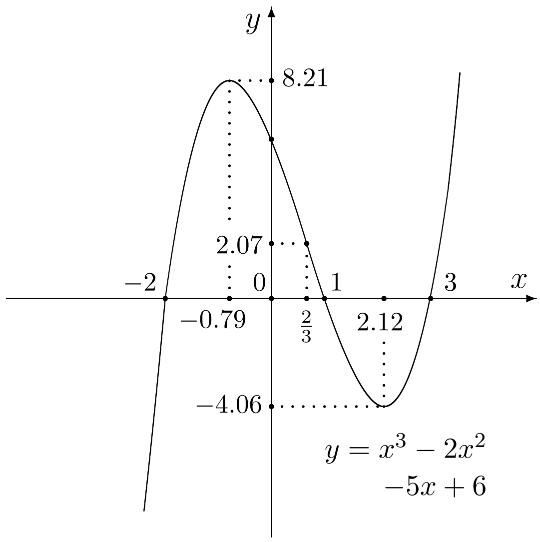
III.3.2. Polynom. Konstantní funkce a lineární funkce jsou speciální případy tzv. *polynomiální funkce*. Tato funkce se krátce nazývá *polynom*. (Lze také použít původní český název *mnohočlen*). *Polynom stupně n* nazýváme funkci tvaru

$$P(x) \;=\; a_n\, x^n \,+\, a_{n-1}\, x^{n-1} \,+\, a_{n-2}\, x^{n-2} \,+\, \ldots \,+\, a_1\, x \,+\, a_0$$

(kde a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_0 jsou reálná čísla a $a_n \neq 0$.) Speciálně pro $n = 1$ je P tzv. *lineární polynom* (= lineární funkce), pro $n = 2$ tzv. *kvadratický polynom* (= kvadratická funkce) a pro $n = 3$ je P tzv. *kubický polynom* (= kubická funkce). Grafem lineární funkce je přímka, grafem kvadratické funkce je parabola a grafem kubické funkce je tzv. kubická parabola. Na obr. 19a vidíte graf kvadratického polynomu $x^2 - 2x - 3$ a na obr. 19b je nakreslen graf kubického polynomu $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Grafy protínají osu x v bodech, jejichž x–ové souřadnice se nazývají *kořeny* uvažovaných polynomů. (Kořeny lze vypočítat řešením kvardatické rovnice $x^2 - 2x - 3 = 0$, respektive kubické rovnice $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.)



Obr. 19a



Obr. 19b

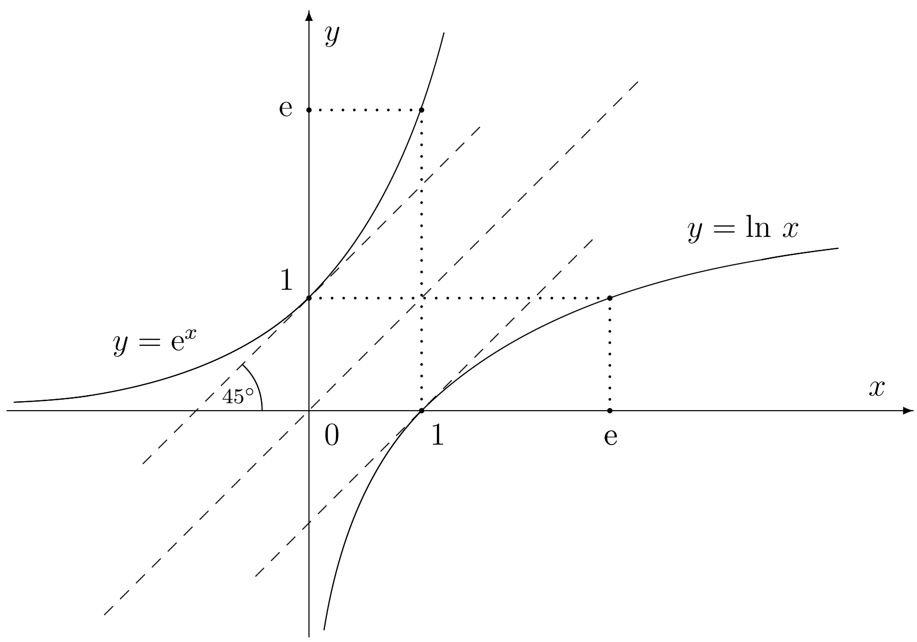
III.3.3. Eulerovo číslo e**. Exponenciální a logaritmická funkce o základu** e**.** Z důvodů, které poznáme v odstavci III.4.13, je ze všech exponenciálních funkcí „nejdůležitější" funkce e^x, kde e je tzv. *Eulerovo číslo*. Toto číslo má tu vlastnost, že pro $a = \mathrm{e}$ svírá tečna ke grafu funkce a^x v bodě $x = 0$ s osou x úhel 45°. Číslo e je iracionální a jeho přibližná hodnota je 2,718. Je to, podobně jako Ludolfovo číslo π, jedno z nejčastěji užívaných čísel v dnešní matematice. V minulosti bylo nalezeno mnoho vzorců, kterými lze e vyjádřit. Například:

$$\mathrm{e} \;=\; \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{nebo} \qquad \mathrm{e} \;=\; \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots .$$

Místo e^x se často píše $\exp x$.

Pro obecné $a > 0$, $a \neq 1$, je logaritmická funkce o základu a (tj. funkce $\log_a x$) definována jako inverzní funkce k exponenciální funkci a^x. Speciálně, logaritmická funkce o základu e je inverzní funkcí k e^x. Tato logaritmická funkce se nazývá *přirozený logaritmus* a místo $\log_e x$ se pro ni používá označení $\ln x$.

Grafy obou funkcí e^x a $\ln x$ vidíte na obr. 20.



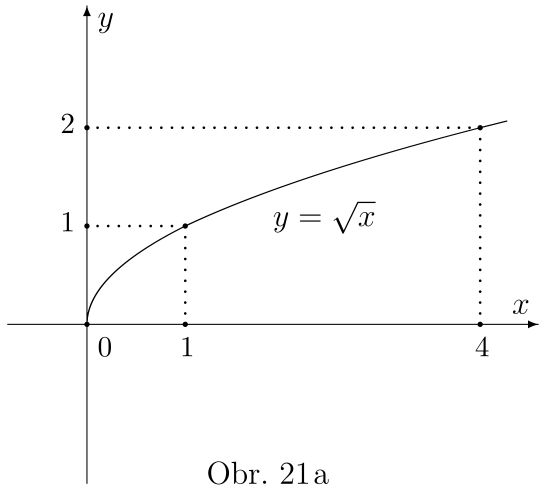
Obr. 20

Z definice přirozeného logaritmu (tj. ze skutečnosti, že to je inverzní funkce k exponenciální funkci $y = e^x$) plyne, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí: $\ln e^x = x$ a pro všechna $x > 0$ platí: $e^{\ln x} = x$. (To souhlasí s tím, jak bývá logaritmus často definován na středních školách: $\ln x$ je číslo, na které musíme umocnit e, abychom obdrželi x.)

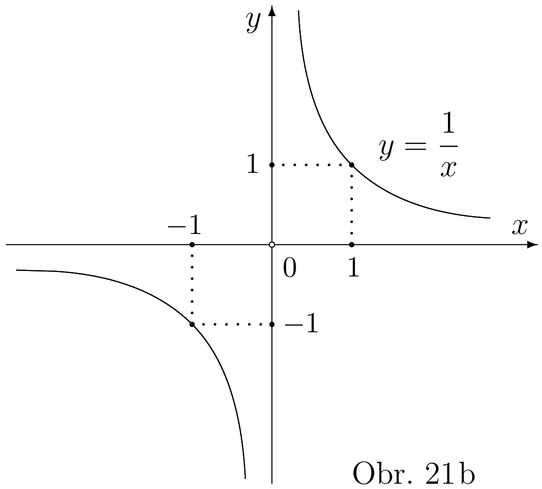
III.3.4. Mocninná funkce. Všimněme si ještě trochu podrobněji funkce $f(x) = x^\alpha$. Definiční obor i průběh funkce závisí podstatně na číslu α.

- Je-li α nezáporné celé číslo, je $D(x^\alpha) = \mathbb{R}$. (Příkladem je funkce x^3.)
- Je-li α záporné celé číslo, je $D(x^\alpha) = (-\infty, +\infty) - \{0\}$. (Příkladem je funkce x^{-2}.)
- Není-li α celé číslo, je v odborné literatuře obvyklé pokládat $D(x^\alpha) = (0, +\infty)$. Důvodem je to, že pro necelá čísla α lze x^α definovat vztahem $x^\alpha = \exp(\ln x^\alpha) = \exp(\alpha \cdot \ln x)$ a $\ln x$ má smysl pouze pro $x > 0$.
- Pro některá α lze však definici funkce x^α rozumným způsobem rozšířit: Pro $\alpha > 0$ lze položit $0^\alpha = 0$ a definičním oborem x^α se tak stává interval $\langle 0, +\infty)$.
- Pro ta α, která jsou racionální a která je možné vyjádřit ve tvaru $\alpha = p/q$, kde p, q jsou celá nesoudělná čísla a q je liché, lze x^α definovat i pro $x < 0$. Ukážeme to konkrétně pro $\alpha = \frac{2}{3}$ a $x = -8$: $(-8)^{2/3} = \left[\sqrt[3]{-8}\right]^2 = \left[-\sqrt[3]{8}\right]^2 = [-2]^2 = 4$.

Na obrázcích 20a a 20b vidíte grafy dvou konkrétních mocninných funkcí: $x^{1/2}$ (druhá odmocnina) a x^{-1} (nepřímá úměrnost).



Obr. 21 a

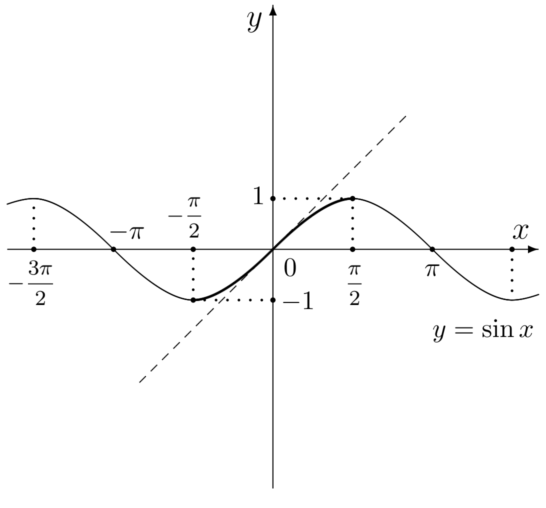


Obr. 21 b

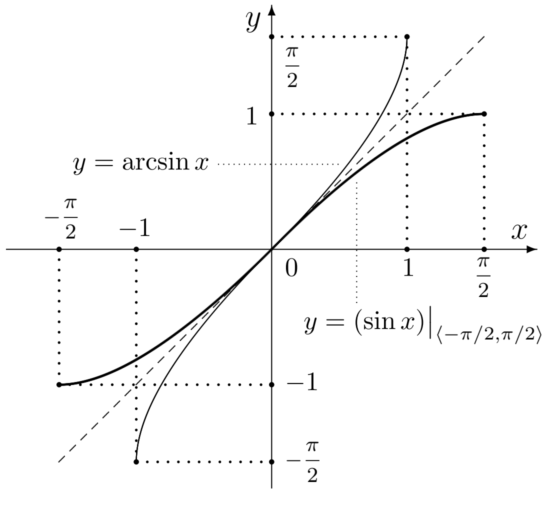
V souvislosti s funkcí ,,druhá odmocnina" (obr. 21 a) upozorňujeme na rozdíl mezi výpočtem druhé odmocniny čísla a^2 a řešením kvadratické rovnice $x^2 = a^2$ (pro dané $a \neq 0$): zatímco $\sqrt{a^2} = |a|$, rovnice $x^2 = a^2$ má dvě řešení $x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2} = \pm|a| = \pm a$. Rozmyslete si sami dobře tuto jednoduchou skutečnost a dosaďte si do odmocniny i do kvadratické rovnice některé konkrétní hodnoty a, například $a = 2$ a $a = -2$.

III.3.5. Cyklometrické funkce $\arcsin x$ **(arkussinus) a** $\arccos x$ **(arkuskosinus).** Funkce sinus není prostá. Inverzní funkce k sinu tudíž neexistuje. Restrikce funkce sinus na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ však prostá již je. Inverzní funkci k této restrikci nazýváme *arkussinus* a označujeme ji arcsin. Definičním oborem funkce arkussinus je interval $\langle -1, 1\rangle$ a oborem hodnot je interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Pro $x \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ a $y \in \langle -1, 1\rangle$ tedy platí: $y = \sin x \iff x = \arcsin y$.

Na obr. 22 a vidíte část grafu funkce sinus (tzv. sinusoidy) se silněji vyznačenou restrikcí na interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$. Na obr. 22 b je podrobněji nakreslen graf této restrikce i graf funkce arkussinus. (Graf uvažované restrikce sinu je nakreslen silně.)



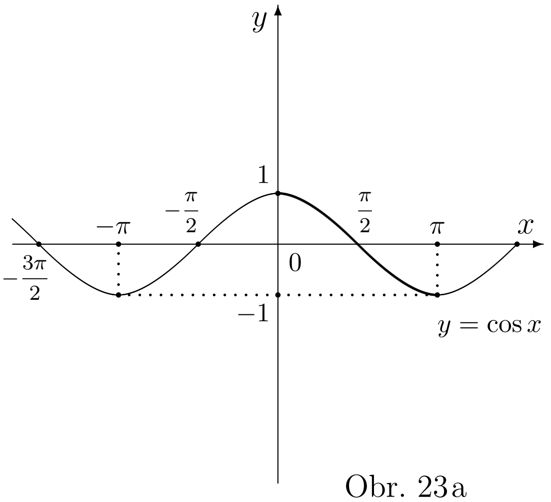
Obr. 22 a



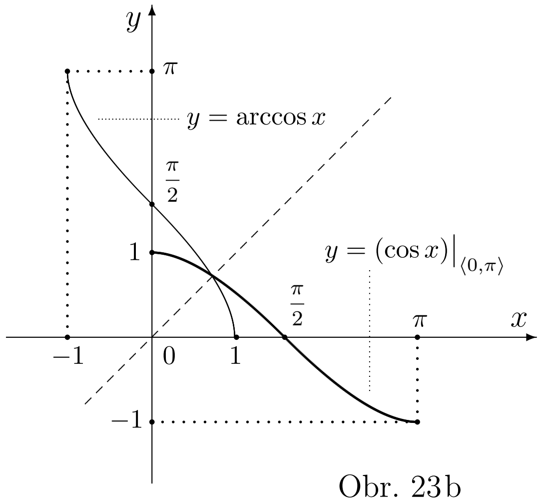
Obr. 22 b

Podobně, inverzní funkci k restrikci funkce kosinus na interval $\langle 0, \pi\rangle$ nazýváme *arkuskosinus* a označujeme ji $\arccos$. Jejím definičním oborem je interval $\langle -1, 1\rangle$ a oborem hodnot je interval $\langle 0, \pi\rangle$. Pro $x \in \langle 0, \pi\rangle$ a $y \in \langle -1, 1\rangle$ tudíž platí:
$y = \cos x \iff x = \arccos y$.

Na obr. 23a je nakreslena část grafu funkce kosinus s vyznačenou restrikcí na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Na obr. 23b je podrobněji nakreslen graf této restrikce (opět je vyznačen silně) a graf funkce arkuskosinus.

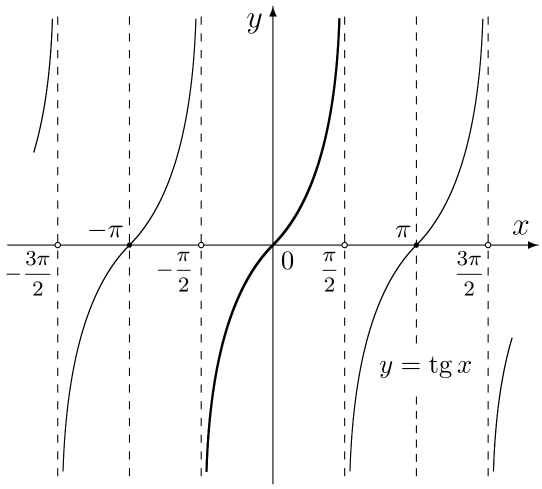


Obr. 23a

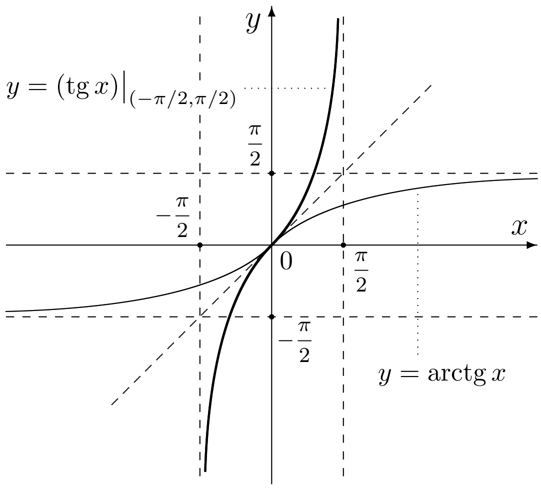


Obr. 23b

III.3.6. Cyklometrické funkce $\operatorname{arctg} x$ **(arkustangens) a** $\operatorname{arccotg} x$ **(arkuskotangens).** Inverzní funkci k restrikci funkce tangens na interval $(-\pi/2, \pi/2)$ nazýváme *arkustangens* a označujeme ji arctg. Jejím definičním oborem je interval $(-\infty, +\infty)$ a oborem hodnot je interval $(-\pi/2, \pi/2)$. Pro $y \in (-\infty, +\infty)$ a $x \in (-\pi/2, +\pi/2)$ tudíž platí: $y = \operatorname{tg} x \iff x = \operatorname{arctg} y$.



Obr. 24a



Obr. 24b

Na obr. 24a je nakreslena část grafu funkce tangens s vyznačenou restrikcí na interval

$(-\pi/2, +\pi/2)$. Na obr. 24b je opět nakreslen graf této restrikce (je vyznačen silně) a rovněž graf funkce arkustangens.

Inverzní funkci k restrikci funkce kotangens na interval $(0, \pi)$ nazýváme *arkuskotangens* a označujeme ji arccotg. Jejím definičním oborem je interval $(-\infty, +\infty)$ a oborem hodnot je interval $(0, \pi)$. Načrtněte si sami graf uvažované restrikce funkce kotangens i inverzní funkce arkuskotangens!

Funkce arkussinus, arkuskosinus, arkustangens a arkuskotangens se nazývají *cyklometrické funkce*.

III.4. Limita a spojitost funkce

III.4.1. Příklad. Definičním oborem funkce $f(x) = (\mathrm{e}^x - 1)/x$ je množina $\mathbb{R} - \{0\}$. Lze sestavit tabulku hodnot funkce f v některých bodech x:

x	-1	$-0,2$	$-0,05$	$-0,001$	$0,001$	$0,05$	$0,2$	1
$f(x)$	$0,6320$	$0,9060$	$0,9754$	$0,9995$	$1,0005$	$1,0254$	$1,1070$	$1,7182$

Z tabulky lze usuzovat, že pro x „blížící se" k nule se $f(x)$ „blíží" k jedné. Tuto, zatím pouze intuitivně chápanou skutečnost, lze přesným způsobem vyjádřit užitím pojmu „limita funkce". Definice tohoto pojmu je obsahem následujícího odstavce.

III.4.2. Limita funkce. Předpokládejme, že $x_0 \in \mathbb{R}^*$ a že definiční obor funkce f obsahuje některé prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0. Jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P(x_0)$ platí implikace

$$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to a,$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnou a. Píšeme:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

$\Big($Později uvidíme, že pro funkci z příkladu III.4.1 opravdu platí: $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.\Big)$

III.4.3. Poznámka. Existence ani hodnota limity funkce f v bodě x_0 nezávisí na tom, zda samotný bod x_0 patří do $D(f)$. Patří-li x_0 do $D(f)$, pak hodnota $f(x_0)$ nemá na existenci ani hodnotu limity funkce f v bodě x_0 žádný vliv. Existence a eventuálně též hodnota této limity jsou určeny výhradně chováním funkce f v okolí bodu x_0, nikoliv v bodě x_0 samém.

Je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ a je-li $a \in \mathbb{R}$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *vlastní limitu*. Je-li $a = +\infty$ nebo $a = -\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní limitu*.

Snadným důsledkem věty III.1.6 je následující věta:

III.4.4. Věta. *Funkce f může mít v jakémkoliv bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.*

III.4.5. Příklad. Funkce $f(x) = \sin x$ nemá v bodě $+\infty$ limitu. Kdyby totiž nějakou limitu (rovnou například a) měla, musela by pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $\mathbb{R}$ platit implikace $x_n \to \infty \implies \sin x_n \to a$. Například pro posloupnost $\{x_n\}$, pro kterou je $x_n = \pi/2 + n\pi$, uvedená implikace neplatí. Tato posloupnost má sice limitu rovnou $+\infty$, avšak posloupnost $\{\sin x_n\}$ (tj. posloupnost $\{(-1)^n\}$) limitu nemá.

Počítat limity funkcí podle definice (tj. pomocí limit posloupností) by bylo velmi těžkopádné. Proto se seznámíme s efektivnějšími postupy. Při konkrétních výpočtech limit je velmi důležitá následující věta. Týká se limity součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí a lze ji snadno dokázat pomocí věty III.2.13.

III.4.6. Věta (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí).
Nechť $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$ *a* $\lim_{x \to x_0} g(x) = b$. *Pak platí:*

a) $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] \;=\; a + b$,

b) $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] \;=\; a - b$,

c) $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] \;=\; a \cdot b$,

d) $\lim_{x \to x_0} [f(x)/g(x)] \;=\; a/b$,

pokud výrazy na pravých stranách mají smysl.

III.4.7. Poznámka. Je-li například $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, nelze limitu podílu $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x)$ počítat podle věty III.3.6, protože výraz $(+\infty)/(+\infty)$ nemá smysl.

III.4.8. Příklad. $\lim_{x \to 2} (3x^2 + 2x - 1) \;=\; \lim_{x \to 2} (3x^2) + \lim_{x \to 2} (2x) - 1 \;=\; 12 + 4 - 1 \;=\; 15$

III.4.9. Poznámka. Lze ukázat, že je-li $\lim_{x \to x_0} f(x) = a$, $a > 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ a $g(x) > 0$ pro všechna x z nějakého prstencového okolí $P(x_0)$, pak $\lim_{x \to x_0} f(x)/g(x) = +\infty$. Limitu podílu $f(x)/g(x)$ sice nemůžeme počítat podle věty III.4.6 (protože výraz $a/0$ nemá smysl), nicméně vzhledem k tomu, že $f(x)$ se pro $x \to x_0$ blíží ke kladnému číslu a a $g(x)$ se blíží k 0 zprava, tj. z oboru kladných čísel, blíží se podíl $f(x)/g(x)$ k $+\infty$. Podobnou úvahu lze použít i v případě, že $a < 0$ nebo $g(x) < 0$ pro $x \in P(x_0)$.

III.4.10. Příklad. Pomocí úvahy z předcházející poznámky III.4.9 dostáváme:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \;=\; +\infty.$$

K některým dalším metodám a příkladům výpočtu limit se vrátíme ještě v této kapitole po probrání pojmu ,,spojitost funkce". V odstavci III.6.16 se kromě toho ještě seznámíme s tzv. l'Hospitalovým pravidlem, které je užitečnou pomůckou při výpočtu limit podílu dvou funkcí.

III.4.11. Jednostranné limity. Předpokládejme, že $x_0 \in \mathbb{R}$ a že definiční obor funkce f obsahuje některé pravé okolí $P_+(x_0)$ bodu x_0. Jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ v $P_+(x_0)$ platí implikace

$$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to a,$$

pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 <u>*limitu zprava*</u> rovnou a. Píšeme: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = a.$

Analogicky můžeme definovat <u>*limitu zleva*</u> funkce f v bodě x_0. Píšeme: $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = a.$

Porovnáním těchto definic s definicí ,,oboustranné" limity funkce (odstavec III.4.2) okamžitě získáváme důležitou větu:

III.4.12. Věta. *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnou a právě když má v bodě x_0 limitu zprava i limitu zleva a obě jsou rovné a.*

Pro limity zprava a zleva dále platí obdobné věty, jako jsou věty III.4.4 a III.4.6.

III.4.13. Poznámka. Pro limitu funkce lze formulovat podobnou větu (mohli bychom ji nazvat ,,Věta o limitě sevřené funkce"), jako je věta III.1.15. Věta by říkala zhruba toto: *Je-li na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 graf funkce f ,,sevřen" mezi grafy funkcí g a h a mají-li obě funkce g, h pro $x \to x_0$ stejnou limitu rovnou α, pak i funkce f má pro $x \to x_0$ limitu rovnou α.* Zkuste si sami tuto větu přesně zformulovat a zkuste si zformulovat i její varianty týkající se jednostranných limit.

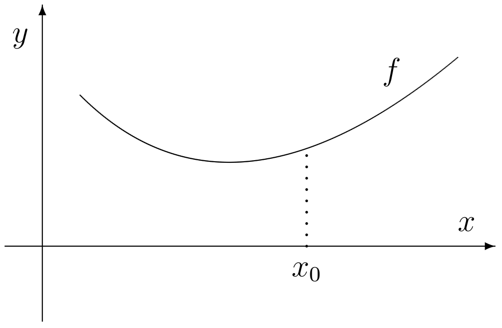
***III.4.14. Poznámka.** Na závěr partie o limitách funkcí se ještě vraťme k definici limity. Možných, vzájemně ekvivalentních definic, vzniklo v průběhu vývoje diferenciálního počtu více. Zkuste si sami rozmyslet, že skutečnost, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, můžeme také definovat takto:

$$\forall\, U(a) \quad \exists\, P(x_0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \;:\quad x \in P(x_0) \implies f(x) \in U(a),$$

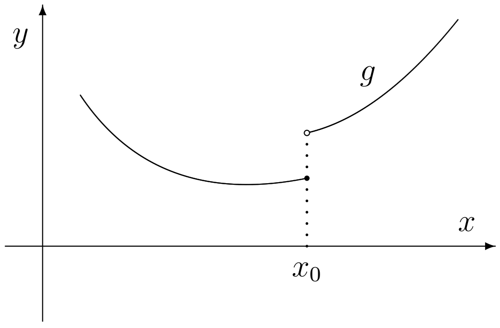
nebo v případě, kdy x_0 i a jsou čísla z $\mathbb{R}$, ještě jinak:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \;:\quad 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \epsilon.$$

III.4.15. Spojitost funkce – motivace. Na obr. 25a a obr. 25b jsou nakresleny grafy dvou funkcí. Na první pohled je patrné, čím se liší: zatímco graf funkce f lze nakreslit ,,jedním tahem", v případě funkce g to není možné, protože tento graf je v bodě $x = x_0$,,přerušen". Místo toho, zda graf funkce není nebo je v bodě x_0 ,,přerušen", hovoří se v matematice o spojitosti nebo nespojitosti funkce v bodě x_0.



Obr. 25a



Obr. 25b

III.4.16. Spojitost funkce v bodě. O funkci f říkáme, že je *spojitá* v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{III.3.1}$$

III.4.17. Poznámka. Přečteme-li si pečlivě tuto definici a definici III.4.2, vidíme, že aby funkce f mohla být spojitá v bodě x_0, musí být definovaná v nějakém okolí bodu x_0 (tj. $D(f)$ musí obsahovat nějaké okolí $U(x_0)$).

Funkce g na obr. 25b má v bodě x_0 limitu zprava různou od limity zleva, proto její „oboustranná" limita v bodě x_0 neexistuje (viz větu III.4.12). Rovnice (III.4.1) tedy nemůže platit, funkce g proto není v bodě x_0 spojitá.

III.4.18. Spojitost zprava a zleva. O funkci f říkáme, že je *spojitá zprava* (respektive *spojitá zleva*) v bodě $x_0 \in D(f)$, jestliže

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0) \qquad \text{(respektive} \quad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)\,).$$

Z věty III.4.12 snadno plyne toto tvrzení: *Funkce f je spojitá v bodě x_0 právě tehdy, je-li v tomto bodě spojitá zprava i zleva.*

III.4.19. Příklad. Funkce $y = \sqrt{x}$ není spojitá v bodě $x_0 = 0$, neboť není definovaná v žádném levém okolí bodu x_0. Tato funkce je však v bodě $x_0 = 0$ spojitá zprava.

III.4.20. Spojitost funkce v intervalu. Nechť I je interval v $\mathbb{R}$, který je částí definičního oboru funkce f. Říkáme, že funkce f je *spojitá v intervalu I*, jestliže

a) f je spojitá v každém vnitřním bodě intervalu I,

b) f je spojitá zprava v levém krajním bodě intervalu I (patří-li tento bod do I),

c) f je spojitá zleva v pravém krajním bodě intervalu I (patří-li tento bod do I).

III.4.21. Příklad. Funkce $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ je spojitá v $\mathbb{R}$. K ověření této skutečnosti je třeba ukázat, že funkce f je spojitá v každém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ (neboť $D(f) = \mathbb{R}$). Nechť tedy x_0 je libovolně vybraný bod z $\mathbb{R}$ a nechť $\{x_n\}$ je libovolná posloupnost čísel z $\mathbb{R}$, pro kterou platí $\lim x_n = x_0$. Potřebujeme ukázat, že $\lim f(x_n) = f(x_0)$, tj. $\lim (3x_n^2+2x_n-1) = 3x_0^2+2x_0-1$. Užitím věty III.3.7 dostáváme: $\lim (3x_n^2+2x_n-1) = \lim 3x^2 + \lim 2x_n - \lim 1 = 3\cdot[\lim x_n]^2 + 2\cdot \lim x_n - 1 = 3x_0^2+2x_0-1$.

Vyšetřovat vždy spojitost funkce tak, jak jsme to právě učinili, by bylo příliš pracné. Užitečné jsou proto věty III.4.22, III.4.24 a III.4.25.

III.4.22. Věta. *Polynomy, goniometrické funkce (tj. funkce sinus, kosinus, tangens, kotangens), cyklometrické funkce (tj. funkce arkussinus, arkuskosinus, arkustangens, arkuskotangens), mocninná funkce, exponenciální funkce i logaritmická funkce jsou funkce spojité v každém intervalu, který je částí jejich definičního oboru.*

III.4.23. Poznámka. Načrtněte si graf funkce tangens. Vidíte, že tangens je spojitou funkcí v každém intervalu typu $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$ (kde k je celé číslo). Funkce tangens není spojitá v bodech $\pi/2 + k\pi$, (kde k je celé číslo). To však není ve sporu s tvrzeném věty III.4.22, protože body $\pi/2 + k\pi$ nepatří do definičního oboru funkce tangens.

III.4.24. Věta (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí). *Jsou-li funkce f a g spojité v bodě x_0, pak také funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, a $|f|$ jsou spojité v bodě x_0. Za dodatečného předpokladu, že $g(x_0) \neq 0$ je i funkce f/g spojitá v bodě x_0.*

(Tato část věty je pravdivá i v případě, že ,,spojitost v bodě x_0" nahradíme ,,spojitostí zprava v bodě x_0" nebo ,,spojitostí zleva v bodě x_0".)

Jsou-li funkce f a g spojité v intervalu I, pak také funkce $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ a $|f|$ jsou spojité v intervalu I. Je-li navíc $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in I$, pak rovněž funkce f/g je spojitá v intervalu I.

III.4.25. Věta (o spojitosti složené funkce). *Je-li funkce g spojitá v bodě x_0 a funkce f je spojitá v bodě $g(x_0)$, je složená funkce $f * g$ (tj. funkce $y = f(g(x))$) spojitá v bodě x_0.*

Je-li funkce g spojitá v intervalu I, funkce f je spojitá v intervalu J a je-li $g(I) \subset J$, pak rovněž složená funkce $f * g$ je spojitá v intervalu I.

Spojité funkce mají řadu zajímavých a důležitých vlastností. V následujících větách ukážeme alespoň některé z nich. Věty mají názorný geometrický význam, zkuste si proto sami jejich smysl znázornit na obrázcích.

III.4.26. Věta (Darbouxova vlastnost). *Je-li funkce f spojitá v intervalu I a jsou-li x_1 a x_2 dva libovolné body z I, pak ke každému číslu η ležícímu mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$ existuje bod ξ ležící mezi x_1 a x_2 takový, že $f(\xi) = \eta$.*

III.4.27. Poznámka. Výše uvedená věta se také nazývá ,,Věta o nabývání mezihodnot". Je to logické. Věta totiž říká, že je-li f funkce spojitá v intervalu I a jsou-li h_1 a h_2 dvě její libovolné hodnoty na intervalu I (tj. $h_1, h_2 \in f(I)$), pak funkce f nabývá na I všech hodnot mezi h_1 a h_2.

Snadným důsledkem věty III.4.26 je toto tvrzení: *Je-li f spojitá funkce v intervalu I, pak $f(I)$ je rovněž interval nebo je to jednobodová množina.* (Množina hodnot funkce f na intervalu I tedy musí být ,,souvislá".)

III.4.28. Věta (o spojitosti inverzní funkce). *Je-li funkce f spojitá a prostá v intervalu I, $f(I) = J$, pak inverzní funkce f_{-1} je spojitá v intervalu J.*

III.4.29. Věta (o existenci maxima a minima). *Spojitá funkce v uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá v tomto intervalu svého maxima i minima. (Tj. $\max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ a $\min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$ existují.)*

III.4.30. Věta. *Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0. Je-li $f(x_0) > 0$, pak existuje okolí $U(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí: $f(x) > 0$.*

Důkaz: Ukážeme důkaz sporem, který je jednoduchý a poučný. Předpokládejme, že tvrzení věty neplatí. Pak v každém okolí $U(x_0)$ bodu x_0 lze nalézt x takové, že $f(x) \le 0$. Odtud plyne, že existuje posloupnost $\{x_n\}$, pro kterou platí: $x_n \to x_0$ a $f(x_n) \le 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Ze spojitosti funkce f v bodě x_0 vyplývá, že $f(x_n) \to f(x_0)$. Posloupnost $\{f(x_n)\}$ je posloupnost nekladných čísel; taková posloupnost nemůže mít kladnou limitu. To je však spor s tím, že $f(x_0) > 0$. Tvrzení věty tedy platí. □

Podobným způsobem lze dokázat, že platí: *Je-li funkce f spojitá v bodě x_0 a $f(x_0) < 0$, pak existuje okolí $U(x_0)$ takové, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí: $f(x) < 0$.*

III.4.31. Poznámka. Nyní se vrátíme k výpočtům limit funkcí. Ze způsobu zavedení pojmu „spojitost funkce v bodě" (viz odstavec III.4.16) a z věty III.3.22 plyne, že je-li f jakákoliv z funkcí zmíněných ve větě III.3.22 a je-li x_0 vnitřní bod definičního oboru funkce f, je $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Velmi užitečné jsou také následující věty o limitách složených funkcí:

III.4.32. Věta (1. věta o limitě složené funkce). *Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a nechť funkce f je spojitá v bodě λ. Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lambda)$.*

III.4.33. Příklad. Vypočítejme $\lim_{x \to 0} \exp(1 - x^2)$. Vnitřní funkce, tj. funkce $g(x) = 1 - x^2$, má v bodě $x = 0$ limitu rovnou 1. Vnější funkce, tj. funkce $f(y) = \exp y$, je v bodě $y = 1$ spojitá a má zde hodnotu $\exp 1 = \mathrm{e}$. Proto je: $\lim_{x \to 0} \exp(1 - x^2) = \mathrm{e}$.

III.4.34. Věta (2. věta o limitě složené funkce). *Nechť $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ (respektive $-\infty$). Nechť $\lim_{y \to +\infty} f(y) = L$ (respektive $\lim_{y \to -\infty} f(y) = L$). Pak platí: $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = L$.*

III.4.35. Poznámka. Věty III.4.32 a III.4.34 lze pozměnit v tom smyslu, že v předpokladech místo o limitě $g(x)$ pro $x \to x_0$ hovoříme o limitě $g(x)$ pro $x \to x_0$ zleva a v tvrzení věty pak místo o limitě $f(g(x))$ pro $x \to x_0$ také hovoříme o limitě $f(g(x))$ pro $x \to x_0$ zleva. Obě věty lze podobným způsobem modifikovat i pro případ, kdy $x \to x_0$ zprava.

III.4.36. Příklad. Vypočítejme limitu $\lim_{x \to 1+} \operatorname{arctg}[x/(x-1)]$. Vnitřní funkce $g(x) = x/(x-1)$ má v bodě 1 limitu zprava rovnou $+\infty$. (Čitatel x má limitu 1, jmenovatel $x - 1$ má limitu 0, přičemž jmenovatel se k nule blíží zprava, tj. z oboru kladných čísel. Podíl $x/(x-1)$ má proto limitu $+\infty$.) Vnější funkce arkustangens má v $+\infty$ limitu rovnou $\pi/2$. Proto je: $\lim_{x \to 1+} \operatorname{arctg} x/(x-1) = \pi/2$.

III.4.37. Příklad. Vypočítejme limitu $\lim_{x \to 0} (\sin x)/x$. Zabývejme se nejprve limitou zprava. Pro x z pravého okolí 0, například z okolí $(0, \pi/2)$, platí: $\sin x \le x$ a $x \le \operatorname{tg} x$. Proto také pro $x \in (0, \pi/2)$ platí:

$$\frac{\sin x}{x} \leq \frac{x}{x} \leq 1, \qquad \frac{\sin x}{x} = \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cos x \geq \cos x.$$

Funkce $(\sin x)/x$ je tedy pro $x \in (0, \pi/2)$ „sevřená" funkcí $\cos x$ (zdola) a konstantní funkcí 1 (shora). Protože je $\lim\limits_{x\to 0+} \cos x = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1$, platí také: $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)/x = 1$. (Viz poznámku III.4.13.) Podobně lze dokázat, že i limita zleva je rovna jedné. Podle věty III.4.12 pak platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

V odstavci III.6.34 (l'Hospitalovo pravidlo) se seznámíme s jednodušší metodou, jak vypočítat stejnou limitu. Nicméně i výše ukázaný postup považujeme za poučný.

III.4.38. Cvičení. Vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 100}{3x^2 + 15x - 5}$ b) $\lim\limits_{x\to 3} (x^3 + 2x - 7)$ c) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 1-} \arccos x$ e) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^5 + x^3 - x + 1}{x^4 - 2x + 1}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{8}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x - 2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{4 + x} - 1}{x + 4}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^5 - 10x^4 + 155)$ i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^5 - 2x^2)$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \ln\left(\dfrac{x + 1}{x}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x}} - 1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$ l) $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \sin x$

m) $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg} x$ n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x \cdot (\sqrt{x - 3} - \sqrt{x})}$

Výsledky: a) $\frac{1}{3}$, b) 26, c) $+\infty$, d) 0, e) 0, f) $-\frac{1}{2}$, g) 0, h) $+\infty$, i) $-\infty$, j) neexistuje, k) -1, l) neexistuje, m) π, n) 0, o) neexistuje.

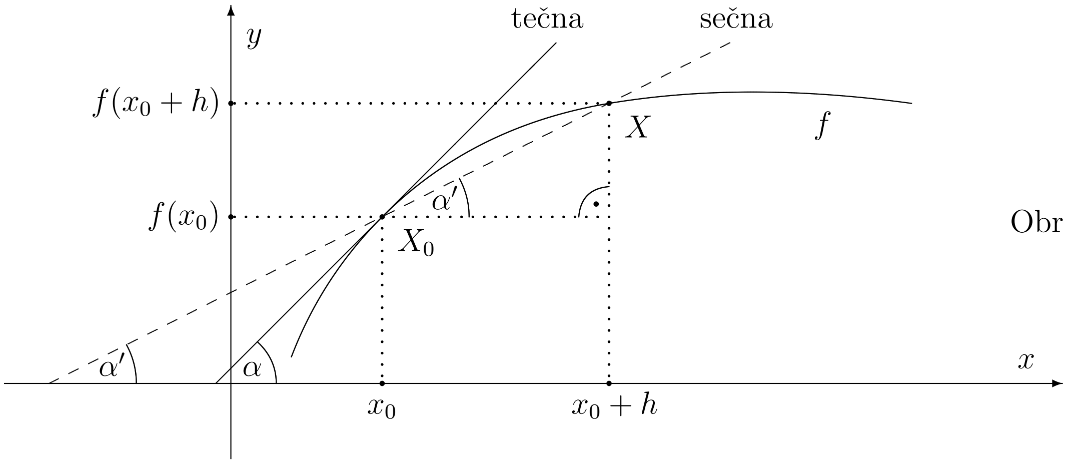
(K výpočtům některých typů limit se ještě vrátíme v odstavcích III.6.32 – III.6.34.)

III.5. Derivace funkce

Pro astronomy není důležitá pouze okamžitá poloha objektů které pozorují, ale i informace o tom jak se tato poloha mění. Sedíte-li v jedoucím automobilu, pak na vás silovými účinky nepůsobí rychlost sama, ale její změny. Vlastníte-li akcie nějaké firmy, jistě vás zajímá nejen jejich dnešní hodnota, ale také jak se tato hodnota momentálně mění – zda a jakým tempem roste nebo klesá. Tyto jednoduché příklady lze zobecnit: Důležitou informací o každé funkci není pouze její hodnota v jednom nebo více bodech, ale také míra změny (růstu nebo poklesu) funkce v tomto bodě (nebo bodech). Snaha vyjádřit míru růstu nebo poklesu funkce vedla v 15.–16. století k zavedení pojmu derivace.

V dalších dvou odstavcích popíšeme dvě konkrétní situace, které k derivaci funkce přirozeným způsobem vedou. Aplikací a možných významů tohoto pojmu v nejrůznějších vědních oborech je však mnohem více.

III.5.1. Geometrická motivace – směrnice tečny ke grafu funkce. Za míru změny funkce f v bodě x_0 považujeme směrnici tečny ke grafu f v bodě $X_0 = [\,x_0, f(x_0)\,]$. Směrnice je rovna $\operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel mezi tečnou a kladnou poloosou x. (Viz obr. 26.)



Obr. 26

Chceme-li směrnici vyjádřit, zvolíme na grafu funkce f další, ,,proměnný” bod $X = [\,x_0+h, f(x_0+h)\,]$. Označme α' úhel, který přímka X_0X (sečna grafu funkce f) svírá s osou x. Směrnice sečny X_0X je rovna

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Přibližuje-li se bod x_0+h k bodu x_0, pak sečna X_0X se přibližuje k tečně ke grafu funkce f v bodě X_0. Hledanou směrnici tečny, neboli $\operatorname{tg}\alpha$, tudíž obdržíme jakožto limitu $\operatorname{tg}\alpha'$ pro $h \to 0$ (pokud limita existuje a je konečná).

III.5.2. Fyzikální motivace – okamžitá rychlost. Předpokládejme, že po přímce se pohybuje bod. Dráha, kterou bod urazil v čase t, je $s(t)$. Dráha, kterou bod proběhne v časovém intervalu $\langle t_0, t_0+h\rangle$, je $s(t_0+h)-s(t_0)$ a tudíž průměrná rychlost bodu v tomto časovém intervalu je rovna

$$\frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h}.$$

Pokud existuje limita tohoto výrazu pro $h \to 0$, pak její hodnotu nazýváme *okamžitou rychlostí* pohybujícího se bodu v čase t_0.

Vidíme, že výše uvedený zlomek je (až na jiná písmenka) stejný, jako zlomek, ke kterému jsme dospěli v předcházejícím odstavci III.5.1. V obou případech je důležitá limita zlomku pro $h \to 0$.

III.5.3. Derivace funkce. *Derivací funkce f v bodě x_0* nazýváme číslo, které označujeme $f'(x_0)$ a které definujeme rovnicí

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \tag{III.5.1}$$

jestliže limita vpravo existuje a je konečná.

Funkci, která každému bodu $x \in D(f)$ přiřazuje derivaci $f'(x)$ (pokud v bodě x derivace existuje), nazýváme <u>*derivací funkce f*</u> a označujeme ji f'. Pro definiční obor funkce f' platí: $D(f') \subset D(f)$.

III.5.4. Poznámka – jiný zápis limity (III.5.1) a jiné značení derivace. Označíme-li $x = x_0 + h$, můžeme formuli (III.5.1) též psát ve tvaru

$$f'(x_0) \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Je-li funkce f dána rovnicí $y = f(x)$, pak derivaci funkce f často označujeme kromě f' také symboly

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,f, \qquad y', \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Výraz $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$ čteme „$\mathrm{d}f$ podle $\mathrm{d}x$".

III.5.5. Tečna ke grafu funkce – analytické vyjádření. Předpokládejme, že $x_0 \in D(f)$. Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $k = f'(x_0)$, pak <u>*tečnou*</u> ke grafu funkce f v bodě $[\,x_0, f(x_0)\,]$ je přímka daná rovnicí

$$y - f(x_0) \;=\; k \cdot (x - x_0).$$

III.5.6. Okamžitá rychlost. Vraťme se k situaci, popsané v odstavci III.5.2. Vidíme, že okamžitou rychlost pohybujícího se bodu v časovém okamžiku t_0 lze definovat jako derivaci polohové funkce s podle času v bodě $t = t_0$. Jelikož ve fyzice je zvykem derivaci podle času označovat (kromě čárky nebo symbolu $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$) též tečkou, můžeme psát: $v(t_0) = \dot{s}(t_0)$.

III.5.7. Derivace zleva a zprava. Existuje-li vlastní jednostranná limita

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \left(\text{respektive} \quad \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\right),$$

pak hodnotu této limity nazýváme <u>*derivací funkce f zleva*</u>(respektive <u>*zprava*</u>) <u>*v bodě x_0*</u>a označujeme ji $f'_-(x_0)$ (respektive $f'_+(x_0)$.

Z věty III.3.12 okamžitě plyne toto tvrzení: $f'(x_0) = k \iff f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = k$.

III.5.8. Věta. *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v bodě x_0 spojitá.*

Má-li funkce f derivaci zleva (respektive zprava) v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá zleva (respektive zprava).

<u>Důkaz:</u> Ukážeme pouze důkaz první části věty. Důkaz druhé části se dá provést analogicky.

Z existence derivace $f'(x_0)$ plyne, že funkce f je definovaná na nějakém okolí $U(x_0)$. Pro $x \in P(x_0)$ platí: $f(x) = f(x_0) + \{\,[\,f(x) - f(x_0)\,]/(x - x_0)\,\} \cdot (x - x_0)$. Výraz v závorkách $\{\dots\}$ má pro $x \to x_0$ limitu rovnou $f'(x_0)$ a $(x - x_0)$ má pro $x \to x_0$ limitu rovnou 0. Podle věty III.3.7 je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; \lim_{x \to x_0} \left[f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \;=\; f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \;=\; f(x_0).$$

To znamená, že funkce f je v bodě x_0 spojitá. (Viz definici spojitosti III.4.16.) $\square$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme dále místo x_0 psát pouze x.

III.5.9. Poznámka. Věta III.5.8 má tento důsledek: *Nechť I je interval s krajními body a, b a nechť $a < b$. Má-li funkce f derivaci ve všech bodech $x \in (a, b)$, existuje-li $f'_+(a)$ (pokud bod a do intervalu I patří) a existuje-li $f'_-(b)$ (pokud bod b do intervalu I patří), pak funkce f je spojitá v intervalu I.*

Při užití diferenciálního počtu k řešení různých problémů je velmi důležité umět vypočítat derivace konkrétních funkcí. Počítání derivací se nazývá *derivování*. Přímý výpočet derivace pomocí formule (III.5.1) je sice možný, pro svoji obtížnost a těžkopádnost však není vhodný. V zájmu usnadnění výpočtu byla v minulosti odvozena řada vzorců, pomocí kterých lze snadno a takřka automaticky vypočítat derivaci většiny zadaných funkcí. V následujících odstavcích se s těmito vzorci seznámíme.

III.5.10. Věta. *Nechť funkce f a g mají derivace v bodě x a nechť $k \in \mathbb{R}$. Pak také funkce $k \cdot f$, $f + g$, $f - g$ a $f \cdot g$ mají derivace v bodě x a platí:*

a) $[k \cdot f]'(x) = k \cdot f'(x)$,

b) $[f + g]'(x) = f'(x) + g'(x)$,

c) $[f - g]'(x) = f'(x) - g'(x)$,

d) $[f \cdot g]'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, má i podíl f/g derivaci v bodě x a platí:

e) $$\left[\frac{f}{g}\right]'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Důkaz: Všechny tyto vzorce lze odvodit pomocí formule (III.5.1). Ukážeme pouze odvození jednoho z nich, například vzorce d). Pro derivaci součinu $f \cdot g$ v bodě x platí:

$$\begin{aligned}
&[f \cdot g]'(x) = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[f \cdot g](x+h) - [f \cdot g](x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \, g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).
\end{aligned}$$

$\square$

III.5.11. Poznámka – jiný zápis vzorců a) – e). Vzorce a) – e) z věty III.5.10 se často zapisují tak, že místo označení funkcí f a g se používají u a v a pro zjednodušení a snadnější zapamatování se vynechává (x):

a) $(k \cdot u)' = k \cdot u'$, b) $(u + v)' = u' + v'$, c) $(u - v)' = u' - v'$,

d) $(u \cdot v)' = u' v + u v'$, e) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' v - u v'}{v^2}$.

III.5.12. Derivace některých elementárních funkcí. Výpočtem limity (III.5.1) a pomocí vzorců a) – e) z věty III.5.10 lze odvodit, jak vypadají derivace některých konkrétních elementárních funkcí:

a) $[\,k\,]' = 0$ (k je konstantní funkce) b) $[\,x^\alpha\,]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$)

c) $[\sin x\,]' = \cos x$ d) $[\cos x\,]' = -\sin x$

e) $[\operatorname{tg} x\,]' = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$ f) $[\operatorname{cotg} x\,]' = -\dfrac{1}{(\sin x)^2}$

Každý z výše uvedených vzorců (s výjimkou vzorce b)) platí pro všechna x z definičního oboru funkce, jejíž derivace se vzorec týká. Vzorec b) také platí pro všechna x z definičního oboru funkce x^α, ale pouze v případě, že $\alpha \notin (0, 1)$. Je-li totiž $\alpha \in (0, 1)$, pak vzorec b) neplatí pro $x = 0$. Bod $x = 0$ je tedy třeba z oboru platnosti vyjmout.

Abyste viděli, že vzorce a) – f) skutečně obdržíme výpočtem limity (III.5.1) pro konkrétně zadanou funkci f, ukážeme to na příkladu, kdy $f(x) = \sin x$.

$$[\sin x\,]' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Použili jsme výsledek příkladu III.3.37 (o limitě podílu $(\sin h)/h$) a kromě toho jsme použili informaci o limitě podílu $(\cos h - 1)/h$ pro $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} =$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right)\left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1}\right) = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0.$$

III.5.13. Derivace exponenciální funkce. V odstavci III.2.16 je uvedeno, že ze všech exponenciálních funkcí a^x (kde $a > 0$) je nejužívanější funkce e^x. Je tomu tak z následujícího důvodu: Číslo e je vybráno tak, že pro $a = \mathrm{e}$ svírá tečna ke grafu funkce a^x v bodě $x = 0$ s osou úhel 45°, tj. má směrnici rovnou jedné. Derivace funkce e^x v bodě $x = 0$ je tedy také rovna jedné, tj. $\lim_{h\to 0} (\mathrm{e}^h - \mathrm{e}^0)/h = \lim_{h\to 0} (\mathrm{e}^h - 1)/h = 1$. To má významný důsledek pro derivaci funkce e^x v libovolném bodě x:

$$(\mathrm{e}^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x}{h} = \mathrm{e}^x \lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = \mathrm{e}^x \cdot 1 = \mathrm{e}^x.$$

Funkce e^x má tedy derivaci rovnou sobě samé. Stejnou vlastnost mají i násobky funkce e^x konstantami, tj. funkce typu $k\,\mathrm{e}^x$. Lze ukázat, že žádné další funkce tuto vlastnost již nemají.

III.5.14. Věta (o derivaci složené funkce). *Ve všech bodech x takových, že $g'(x)$ existuje a $f'(g(x))$ existuje, má složená funkce $y = f(g(x))$ derivaci, pro kterou platí:*

$$y'(x) \;=\; [\,f(g(x))\,]' \;=\; f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

III.5.15. Příklad. Vypočítejme derivaci funkce $h(x) = (\sin x)^2$. Funkce h je složena ze dvou funkcí: vnitřní $g(x) = \sin x$ a vnější $f(y) = y^2$. Odtud plyne, že $f'(y) = 2y$, tj. $f'(g(x)) = 2\,g(x) = 2\,\sin x$. Dále je $g'(x) = \cos x$. Podle věty III.5.14 tedy je $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2\,\sin x\,\cos x$.

III.5.16. Věta (o derivaci inverzní funkce). *Předpokládejme, že k funkci f existuje inverzní funkce f_{-1}. Je-li $y = f_{-1}(x)$ a má-li funkce f v bodě y nenulovou derivaci $f'(y)$, má inverzní funkce v bodě x derivaci, pro kterou platí:*

$$f'_{-1}(x) \;=\; \frac{1}{f'(y)} \;=\; \frac{1}{f'(f_{-1}(x))}.$$

III.5.17. Derivace dalších elementárních funkcí. Pomocí vět III.5.14 a III.5.16 a již známých vzorců pro derivace funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ a e^x lze odvodit vzorce pro derivace dalších elementárních funkcí:

a) $[\arcsin\, x\,]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$

b) $[\arccos\, x\,]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$

c) $[\operatorname{arctg} x\,]' = \dfrac{1}{1+x^2}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$

d) $[\operatorname{arccotg} x\,]' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$

e) $[\ln\, x\,]' = \dfrac{1}{x}$ pro $x \in (0, +\infty)$

f) $[\,a^x\,]' = a^x \cdot \ln\, a$ pro $a > 0$ a $x \in (-\infty, +\infty)$

g) $[\log_a\, x\,]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln\, a}$ pro $a > 0$, $a \neq 1$ a $x \in (0, +\infty)$

III.5.18. Poznámka – derivace složené funkce $\ln f$. Má-li funkce f derivaci v bodě x a je-li $f(x) > 0$, pak derivaci funkce $\ln f$ lze v bodě x vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$[\,\ln f(x)\,]' \;=\; \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \;=\; \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Výraz f'/f je tzv. *logaritmická derivace funkce f*.

III.5.19. Příklad. Vypočítejme derivaci složené funkce $h(x) = (x^2 + 7x - 1)^{\sin x}$. Funkci h lze vyjádřit pomocí exponenciální a logaritmické funkce (porovnejte s odstavcem III.2.17):

$$h(x) \;=\; \exp\left[\,\ln\,(x^2+7x-1)^{\sin x}\,\right] \;=\; \exp\left[\,\sin x \,\cdot\, \ln\,(x^2+7x-1)\,\right].$$

Tato funkce je definovaná pouze pro taková x, pro která je $x^2+7x-1>0$. (Jinak nemá výraz $\ln\,(x^2+7x-1)$ smysl.) Řešením nerovnosti $x^2+7x-1>0$ dostaneme: $x\in(-\infty,x_1)$ nebo $x\in(x_2,+\infty)$, kde $x_1=(-7-\sqrt{53})/2$ a $x_2=(-7+\sqrt{53})/2$. Pro $x\in(-\infty,x_1)$ nebo $x\in(x_2,+\infty)$ platí:

$$\begin{aligned} h'(x) \;&=\; \{\exp\left[\,\sin x \,\cdot\, \ln\,(x^2+7x-1)\,\right]\}' \;= \\ &=\; \exp'\left[\,\sin x \,\cdot\, \ln\,(x^2+7x-1)\,\right] \,\cdot\, \left[\,\sin x \,\cdot\, \ln\,(x^2+7x-1)\,\right]' \;= \\ &=\; \exp\left[\,\sin x\cdot\ln\,(x^2+7x-1)\,\right]\cdot\left[\cos x\cdot\ln\,(x^2+7x-1)\;+\;\sin x\cdot\frac{2x+7}{x^2+7x-1}\right] \;= \\ &=\; (x^2+7x-1)^{\sin x}\,\cdot\,\left[\cos x\,\cdot\,\ln\,(x^2+7x-1)\;+\;\sin x\,\cdot\,\frac{2x+7}{x^2+7x-1}\right]. \end{aligned}$$

III.5.20. Nevlastní derivace. Je-li limita (III.5.1) nevlastní (tj. rovna $+\infty$ nebo $-\infty$), říkáme, že funkce f má v bodě x_0 *nevlastní derivaci*.

Upozorňujeme čtenáře, že je nutné rozlišovat pojmy derivace (konečná hodnota limity (III.5.1)) a nevlastní derivace (nekonečná hodnota limity (III.5.1)).

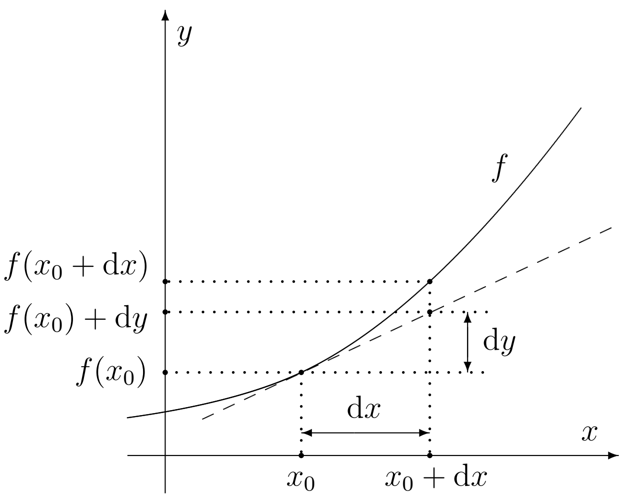
Například funkce $f(x)=\operatorname{sgn} x$ (mající funkční hodnoty $+1$ pro $x>0$, 0 pro $x=0$ a -1 pro $x<0$) má v bodě $x_0=0$ nevlastní derivaci $+\infty$. Načrtněte si graf funkce $\operatorname{sgn} x$ a ověřte si sami uvedenou hodnotu její derivace v bodě $x_0=0$ výpočtem limity (III.5.1). Z tohoto příkladu je patrné, že funkce může mít v nějakém bodě nevlastní derivaci a přesto nemusí být v tomto bodě spojitá.

Lze ukázat, že je-li funkce f v bodě x_0 spojitá a má-li zde nevlastní derivaci, je tečnou ke grafu funkce f v tomto bodě přímka, kolmá na osu x. Tato přímka má rovnici $x=x_0$.

III.5.21. Diferenciál. Předpokládejme, že funkce $y=f(x_0)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Tečna ke grafu f v bodě $[x_0,f(x_0)]$ má tudíž rovnici

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

(Viz odstavec III.5.5.) Lineární funkce, definovaná touto rovnicí, má tu vlastnost, že ze všech lineárních funkcí je tato nejlepší aproximací funkce f v okolí bodu x_0. Hodnoty funkce f v bodech x, nacházejících se v malém okolí bodu x_0, lze pomocí této lineární funkce přibližně vypočítat:



Obr. 27

$$f(x) \doteq f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Píšeme-li $x = x_0 + \mathrm{d}x$, pak $f(x_0 + \mathrm{d}x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$. (Viz obr. 27.) Výraz $f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$ se nazývá *diferenciálem* funkce f v bodě x_0. Vidíte, že pro pevné x_0 je tento diferenciál funkcí $\mathrm{d}x$. Diferenciál označujeme $\mathrm{d}y$ nebo $\mathrm{d}f$. Místo x_0 se často píše x. Při tomto značení platí:

$$f(x + \mathrm{d}x) \doteq f(x) + \mathrm{d}y, \quad \text{kde} \quad \mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x.$$

Diferenciál je zajímavější a má větší význam v teorii funkcí více proměnných.

III.5.22. Derivace vyšších řádů. *Derivací druhého řádu* funkce f (značíme ji f'') rozumíme derivaci funkce f'. Podobně, *derivací třetího řádu* funkce f (značíme ji f''') rozumíme derivaci funkce f'', atd.

Pro derivaci n–tého řádu funkce f používáme označení $f^{(n)}$, přičemž $f^{(0)}$ je pouze jiné označení pro funkci f.

Pro definiční obory funkce f a jejích derivací platí: $D(f) \supset D(f') \supset D(f'') \supset D(f''') \supset \ldots$

Derivace druhého řádu funkce $y = f(x)$ často značíme i způsobem, který navazuje na označení z odstavce III.5.4:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f, \qquad y'', \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Derivace vyšších řádů můžeme označovat analogicky.

III.5.23. Leibnizův vzorec. *Na průniku $D(f^{(n)})$ a $D(g^{(n)})$ lze derivaci n–tého řádu součinu $f \cdot g$ vypočítat podle vzorce:*

$$[f \cdot g]^{(n)} = f^{(n)}\, g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}\, g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)}\, g'' + \cdots + \binom{n}{n} f\, g^{(n)}.$$

III.5.24. Cvičení. Vypočítejte derivace následujících funkcí. (Nezapomeňte na definiční obor derivace.)

a) $\sqrt{x} \cdot \cos x$	b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	c) $\dfrac{1 + \ln x}{x}$	
d) $(x^2 - 1)(x^3 + 2x - 1)$	e) $\arcsin \sqrt{x}$	f) $\sin(1 - \cos x)$	
g) x^x	h) $\ln(\ln x)$	i) $\ln(\operatorname{arctg} x)$	
j) 2^{2x+1}	k) $(3x - 1)^{2001}$	l) $-x \cdot \operatorname{cotg} x + \ln(\sin x)$	
m) $[\arcsin x]^2$	n) $(\ln x)^x$	o) $x \cdot \sin x^2$	p) $\sqrt{2x + 1}$

Výsledky:
a) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} \cdot \sin x$ (pro $x > 0$), b) $\dfrac{2x\,(x^2 + 1) - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2 + 1)^2}$ (pro $x \in \mathbb{R}$),
c) $-\dfrac{\ln x}{x^2}$ (pro $x > 0$), d) $2x\,(x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 1)(3x^2 + 2)$ (pro $x \in \mathbb{R}$),
e) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$ (pro $x \in (0, 1)$), f) $\cos(1 - \cos x) \cdot \sin x$ (pro $x \in \mathbb{R}$),

g) $x^x \cdot (\ln x + 1)$ (pro $x > 0$), h) $\dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x}$ (pro $x > 1$),

i) $\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{1}{x^2+1}$ (pro $x > 0$), j) $2^{2x+1} \cdot 2 \cdot \ln 2$ (pro $x \in \mathbb{R}$),

k) $2001 \cdot (3x-1)^{2000} \cdot 3$ (pro $x \in \mathbb{R}$), l) $\dfrac{x}{(\sin x)^2}$ (pro $\sin x > 0$),

m) $\dfrac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ (pro $x \in (-1,1)$), n) $(\ln x)^x \cdot \left[\ln(\ln x) + \dfrac{1}{\ln x}\right]$ (pro $x > 1$),

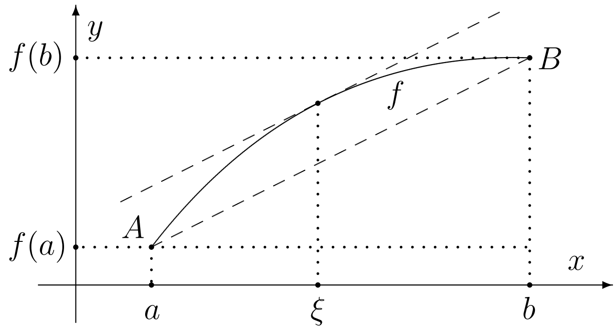
o) $\sin x^2 + 2x^2 \cdot \cos x^2$ (pro $x \in \mathbb{R}$), p) $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ (pro $x > -\frac{1}{2}$).

Pochopení podstaty a významu derivace a derivování zadaných funkcí patří mezi nejdůležitější poznatky, které si musíte během prvního semestru studia osvojit. Proto je nutné, abyste si samostatně vyřešili větší množství příkladů na toto téma. Vhodné příklady můžete nalézt například ve sbírce [NK].

III.6. Užití derivace: intervaly monotónnosti a konvexnosti, l'Hospitalovo pravidlo, oskulační kružnice, křivost

III.6.1. Věta o střední hodnotě (Lagrangeova věta). *Nechť funkce f je spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$ a nechť má derivaci v otevřeném intervalu (a,b). Pak existuje bod $\xi \in (a,b)$ takový, že*

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Obr. 28

III.6.2. Poznámka. Geometrická interpretace Lagrangeovy věty je patrná z obr. 28. Věta v podstatě říká, že mezi body a a b existuje bod ξ, ve kterém je tečna ke grafu funkce f rovnoběžná se sečnou AB.

Lagrangeova věta se většinou bezprostředně nepoužívá k řešení praktických příkladů. Její velký význam však spočívá v tom, že její pomocí lze odvodit řadu dalších vět, které již bezprostřední praktické užití mají. Příkladem je hned následující věta III.6.4.

III.6.3. Vnitřek intervalu. Je-li I interval v $\mathbb{R}$, pak množinu všech vnitřních bodů tohoto intervalu budeme nazývat *vnitřek I* a budeme ji značit I°. Je-li tedy například $I = (a,b\rangle$, je $I^\circ = (a,b)$. Je-li $I = \langle 0,1\rangle$, je $I^\circ = (0,1)$, apod.

III.6.4. Věta. *Nechť f je spojitá funkce v intervalu I. Pak platí implikace*

a) $f'(x) > 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu I rostoucí,*

b) $f'(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu I neklesající,*

c) $f'(x) < 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu I klesající,* *d)* $f'(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *nerostoucí,*

e) $f'(x) = 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *konstantní.*

Důkaz: Dokážeme pouze implikaci a), v ostatních případech by byl postup zcela analogický. Nechť x_1 a x_2 jsou libovolné dva body z I takové, že $x_1 < x_2$. Z Lagrangeovy věty vyplývá, že existuje bod $\xi \in (x_1, x_2)$ takový, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$. Protože je $(x_2 - x_1) > 0$ a z předpokladů bodu a) plyne, že rovněž $f'(\xi) > 0$, dostáváme: $f(x_2) - f(x_1) > 0$, neboli $f(x_1) < f(x_2)$. To ale znamená, že funkce f je v intervalu I rostoucí. (Srovnejte s bodem a) v odstavci III.2.12.) □

III.6.5. Příklad. Vyšetřeme intervaly monotónnosti funkce $f(x) = x^3 - 3x$.

Řešení: Intervaly monotónnosti rozumíme intervaly, na kterých je funkce f rostoucí nebo klesající, případně neklesající nebo nerostoucí.

Funkce f je definována a spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Její derivace je $f'(x) = 3x^2 - 3$ (též pro $x \in (-\infty, +\infty)$). Řešením nerovnic $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$ zjistíme:

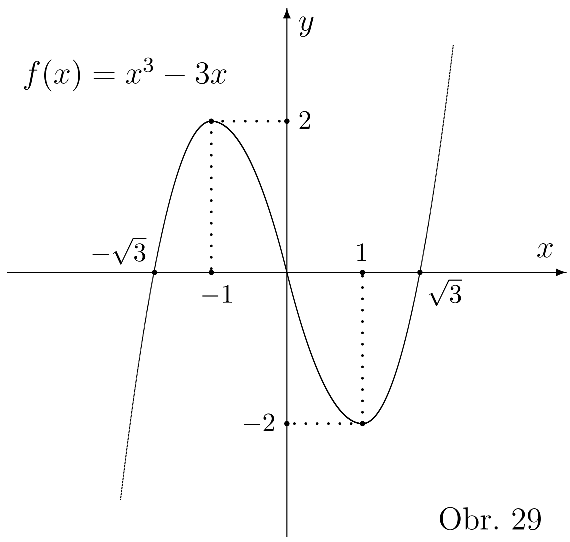
$$3x^2 - 3 > 0 \iff x^2 - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (1, +\infty),$$
$$3x^2 - 3 < 0 \iff x^2 - 1 < 0 \iff x \in (-1, 1).$$

To znamená, dle věty III.6.4, že funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(1, +\infty)$ a klesající na intervalu $(-1, 1)$. To však není všechno: jelikož funkce f je na každém z uvedených intervalů spojitá ,,až do krajních bodů" -1 a 1, tj. je spojitá na intervalech $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 1, +\infty)$ a $\langle -1, 1\rangle$, lze výroky o monotónnosti funkce f rozšířit na intervaly, obsahující krajní body. Můžeme tedy učinit závěr:

a) Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$.

b) Funkce f je klesající na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. (Viz obr. 29.)

III.6.6. Poznámka. Studenti se často dopouštějí této chyby: Ze skutečnosti, že funkce $f(x) = x^3 - 3x$ je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$ usoudí, že f je rostoucí na sjednocení $(-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty)$. To ale není pravda. Funkce f je rostoucí na každém ze dvou intervalů $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$ zvlášť, nikoliv však na jejich sjednocení. (To je patrné z obr. 29.)



Obr. 29

III.6.7. Příklad. Vyšetřeme intervaly monotónnosti funkce $f(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}\,x^4$.

Řešení: Funkce f je definována a spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Její derivace je $f'(x) = -2x + 2x^3$ (též pro $x \in (-\infty, +\infty)$). Řešíme nerovnice $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$:

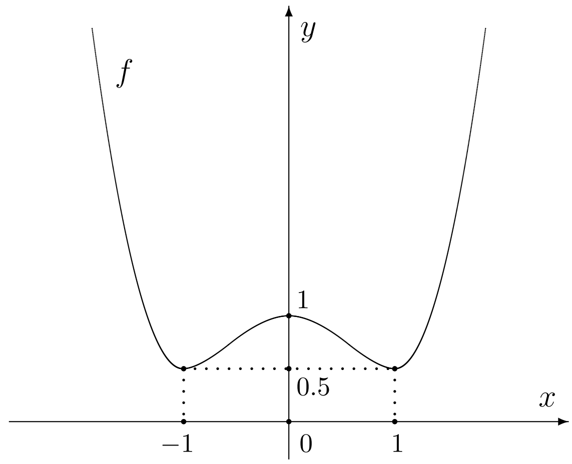
$$-2x + 2x^3 > 0 \iff x\,(-1 + x^2) > 0 \iff x \in (-1, 0) \text{ nebo } x \in (1, +\infty),$$

$$-2x + 2x^3 < 0 \iff x\,(-1 + x^2) < 0 \iff x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (0, 1).$$

Navíc, na každém z uvedených intervalů je f spojitá „až do krajních bodů", tj. je spojitá na intervalech $\langle -1, 0\rangle$, $\langle 1, +\infty)$ a $(-\infty, -1\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$. Můžeme tedy učinit závěr:

a) Funkce f je rostoucí na intervalech $\langle -1, 0\rangle$ a $\langle 1, +\infty)$.

b) Funkce f je klesající na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $\langle 0, 1\rangle$. (Viz obr. 30.)



Obr. 30

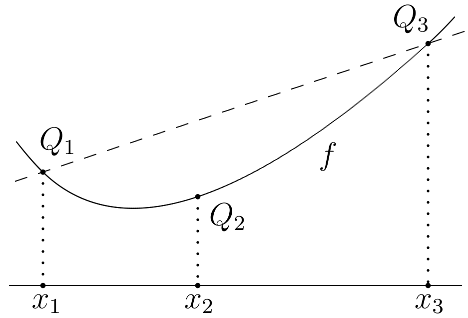
III.6.8. Konvexní a konkávní funkce. Funkci f nazýváme *ryze konvexní na množině M*, je-li $M \subset D(f)$ a jestliže pro každé tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in M$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí: Bod $Q_2 = [\,x_2, f(x_2)\,]$ leží pod přímkou $Q_1 Q_3$, kde $Q_1 = [\,x_1, f(x_1)\,]$ a $Q_3 = [\,x_3, f(x_3)\,]$.

Nahradíme-li v této definici slova „pod přímkou" slovy nad přímkou, získáme definici funkce *ryze konkávní na množině M*.

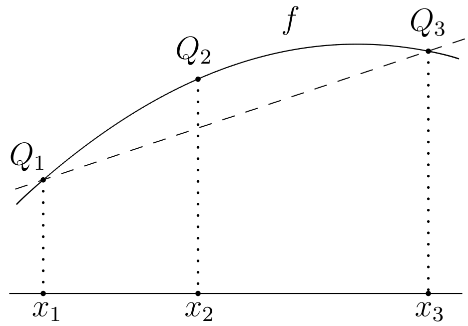
Nahradíme-li v této definici slova „pod přímkou" slovy pod nebo na přímce, získáme definici funkce *konvexní na množině M*.

Nahradíme-li v této definici slova „pod přímkou" slovy nad nebo na přímce, získáme definici funkce *konkávní na množině M*.

Na obr. 31 a (respektive 31 b) můžete vidět příklad ryze konvexní (respektive ryze konkávní) funkce.



Obr. 31 a



Obr. 31 b

III.6.9. Poznámka. Ryze konvexní funkce je speciálním případem konvexní funkce a ryze konkávní funkce je speciálním případem konkávní funkce.

III.6.10. Poznámka. Podmínku, že bod $Q_2 = [\,x_2, f(x_2)\,]$ leží pod přímkou $Q_1 Q_3$, kde $Q_1 = [\,x_1, f(x_1)\,]$ a $Q_3 = [\,x_3, f(x_3)\,]$ lze početně vyjádřit nerovností

$$f(x_2) \;<\; f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \cdot (x_2 - x_1).$$

III.6.11. Věta. *Nechť funkce f je spojitá v intervalu I. Pak platí implikace*

a) $f''(x) > 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *ryze konvexní,*

b) $f''(x) \geq 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *konvexní,*

c) $f''(x) < 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *ryze konkávní,*

d) $f''(x) \leq 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *konkávní,*

e) $f''(x) = 0$ *pro všechna* $x \in I^\circ \implies f$ *je v intervalu* I *lineární.*

III.6.12. Poznámka. Důkaz věty III.6.11 vynecháme, nicméně v zájmu lepšího porozumění podstaty věty nastíníme alespoň jeho myšlenku. Věnujme se například bodu a): f'' je první derivací funkce f'. Z nerovnosti $f'' > 0$ v I° tedy plyne, že f' rostoucí funkcí v I°. To znamená, že pohybujeme-li se v intervalu I zleva doprava, tečna ke grafu f mění směr – sklání se tak, že její směrnice narůstá. To je ale možné pouze v tom případě, je-li funkce f v intervalu I konvexní. (Promyslete si toto s pomocí obr. 31 a.)

III.6.13. Příklad. Vyšetřeme intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^3 - 3x$ konvexní nebo konkávní.

<u>Řešení:</u> Jedná se o stejnou funkci, jako v příkladu III.6.5. Funkce f je definovaná a spojitá na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Její druhá derivace je $f''(x) = 6x$ (též pro $x \in (-\infty, +\infty)$). Řešením nerovnic $f''(x) > 0$ a $f''(x) < 0$ zjistíme:

$$6x > 0 \iff x \in (0, +\infty), \qquad 6x < 0 \iff x \in (-\infty, 0).$$

To znamená, dle věty III.6.11, že funkce f je ryze konvexní na intervalu $(0, +\infty)$ a ryze konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$. Jelikož funkce f je na každém z uvedených intervalů spojitá „až do krajního bodu" 0, tj. je spojitá na intervalech $\langle 0, +\infty)$ a $(-\infty, 0\rangle$, lze uvedené výroky rozšířit na tyto intervaly. Můžeme tedy učinit závěr:

a) Funkce f je ryze konvexní na intervalu $\langle 0, +\infty)$.

b) Funkce f je ryze konkávní intervalu $(-\infty, 0\rangle$.

III.6.14. Příklad. Vyšetřeme intervaly, na kterých je funkce $f(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$ konvexní nebo konkávní.

<u>Řešení:</u> Jedná se o stejnou funkci, jako v příkladu III.6.7. Její graf vidíte na obr. 30. Druhá derivace funkce f je $f''(x) = -2 + 6x^2$ (pro $x \in (-\infty, +\infty)$). Řešením nerovnic $f''(x) > 0$ a $f''(x) < 0$ zjistíme:

$$-2 + 6x^2 > 0 \iff x^2 > \tfrac{1}{3} \iff x \in \big(-\infty, -\sqrt{3}/3\big) \text{ nebo } x \in \big(\sqrt{3}/3, +\infty\big),$$
$$-2 + 6x^2 < 0 \iff x^2 < \tfrac{1}{3} \iff x \in \big(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\big).$$

Navíc, na každém z uvedených intervalů spojitá ,,až do krajních bodů", tj. je spojitá na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}/3\rangle$, $\langle\sqrt{3}/3, +\infty)$ a $\langle-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\rangle$. Můžeme tedy učinit závěr:

a) Funkce f je ryze konvexní na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}/3\rangle$ a $\langle\sqrt{3}/3, +\infty\big)$.

b) Funkce f je ryze konkávní na intervalu $\langle-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\rangle$.

III.6.15. Poznámka. Dejte opět pozor, abyste výrok, že ,,f je ryze konvexní na intervalech $\big(-\infty, -\sqrt{3}/3\big\rangle$ a $\big\langle\sqrt{3}/3, +\infty\big)$" nezaměnili za výrok, že ,,f je ryze konvexní na sjednocení $\big(-\infty, -\sqrt{3}/3\big\rangle \cup \big\langle\sqrt{3}/3, +\infty\big)$". To totiž není pravda. Funkce f je sice ryze konvexní každém z intervalů $\big(-\infty, -\sqrt{3}/3\big\rangle$ a $\big\langle\sqrt{3}/3, +\infty\big)$, ale není konvexní na jejich sjednocení.

Další věta ukazuje, že derivace může být velmi užitečná při výpočtu limit, které vedou na tzv. neurčité výrazy typu ,,0/0" nebo ,,∞/∞". (Na znaménku nekonečna přitom nezáleží.)

III.6.16. Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Předpokládejme, že $c \in \mathbb{R}^*$ a že limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ jsou buď obě nulové, nebo obě nekonečné. Pak platí*

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

existuje-li limita vpravo. (Stejné tvrzení platí i pro limity zleva a limity zprava.)

III.6.17. Poznámka. l'Hospitalovo pravidlo tedy říká, že vede-li výpočet limity podílu $f(x)/g(x)$ (pro $x \to c$) na neurčitý výraz typu ,,0/0" nebo ,,∞/∞" a existuje-li limita $\lim\limits_{x\to c} f'(x)/g'(x)$, pak existuje také limita $\lim\limits_{x\to c} f(x)/g(x)$ a obě limity jsou si rovny.

Předpoklad existence limity $\lim\limits_{x\to c} f'(x)/g'(x)$ je důležitý. Jsou totiž známy případy, kdy tato limita neexistuje a limita $\lim\limits_{x\to c} f(x)/g(x)$ přesto existuje. (Její hodnotu však v takovém případě nemžeme vypočítat pomocí l'Hospitalova pravidla.)

III.6.18. Příklad. Vypočítejme limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Tuto limitu nelze vyjádřit jako podíl limit čitatele a jmenovatele, neboť bychom takto obdrželi neurčitý výraz $0/0$. Pro limitu podílu derivací ale platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(\cos x)^2)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\cos x)^2} = \frac{1}{1^2} = 1.$$

Proto i $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)/x$ existuje a je rovna 1.

III.6.19. Příklad. Opět ukážeme použití l'Hospitalova pravidla, tentokrát stručněji:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

(Zde jsme použili l'Hospitalovo pravidlo celkem třikrát.)

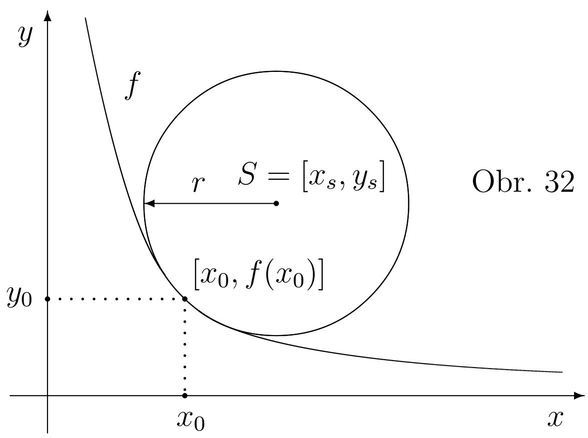
III.6.20. Oskulační kružnice, křivost. Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 druhou derivaci $f''(x_0)$, která je <u>různá od nuly</u>. (Pak f má samozřejmě v bodě x_0 i první derivaci.) Označme pro jednoduchost $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$ a $y_0'' = f''(x_0)$.

Řešme tento problém: Hledejme kružnici $(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = r^2$, která se v bodě $[x_0, y_0]$ dotýká grafu funkce f a má zde s ním tzv. ,,styk řádu 2". To znamená, že hledíme-li v okolí bodu $[x_0, y_0]$ na kružnici jakožto na graf funkce $y(x)$, pak tato funkce má v bodě x_0 stejnou hodnotu, stejnou 1. derivaci a stejnou 2. derivaci, jako funkce f:

$$\text{(a)}\ \ y(x_0) = y_0, \qquad \text{(b)}\ \ y'(x_0) = y_0', \qquad \text{(c)}\ \ y''(x_0) = y_0''\,.$$

Kružnici s těmito vlastnostmi nazýváme <u>*oskulační kružnice*</u> grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Její střed $S = [x_s, y_s]$ se nazývá <u>*střed křivosti*</u> a její poloměr r se nazývá <u>*poloměr křivosti*</u>. Převrácenou hodnotu poloměru křivosti (tj. číslo $1/r$) nazýváme <u>*křivost*</u> funkce f v bodě x_0.

Oskulační kružnice ze všech možných kružnic nejlépe aproximuje graf funkce f v okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$.



Obr. 32

Jak vypočítáme souřadnice středu křivosti a poloměr křivosti? Jelikož graf funkce $y(x)$ v okolí bodu splývá s oskulační kružnicí, $y(x)$ musí vyhovovat rovnici oskulační kružnice:

$$\text{(III.6.1)} \qquad \big(x - x_s\big)^2 + \big(y(x) - y_s\big)^2 = r^2.$$

Užitím podmínky (a), tj. dosazením $x = x_0$ a $y(x) = y_0$, obdržíme rovnici

$$\text{(III.6.2)} \qquad (x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 = r^2.$$

Zderivujeme-li rovnici (III.6.1) podle x a užijeme-li navíc podmínku (b), tj. dosadíme-li $x = x_0$, $y(x) = y_0$ a $y'(x) = y_0'$, dostaneme:

$$\text{(III.6.3)} \qquad 2\,(x_0 - x_s) + 2\,(y_0 - y_s) \cdot y_0' = 0.$$

Zderivujeme-li rovnici (III.6.1) dvakrát podle x a užijeme-li navíc podmínku (c), tj. dosadíme-li $x = x_0$, $y(x) = y_0$, $y'(x) = y_0'$ a $y''(x) = y_0''$, obdržíme:

$$\text{(III.6.4)} \qquad 2 + 2\,{y_0'}^2 + 2\,(y_0 - y_s)\,y_0'' = 0.$$

Rovnice (III.6.2), (III.6.3) a (III.6.4) tvoří soustavu tří rovnic pro tři neznámé: x_s, y_s a r. Jejich řešením získáme

$$x_s = x_0 - y_0'\,\frac{1 + {y_0'}^2}{y_0''}, \qquad y_s = y_0 + \frac{1 + {y_0'}^2}{y_0''}, \qquad r = \frac{(1 + {y_0'}^2)^{3/2}}{|y_0''|}.$$

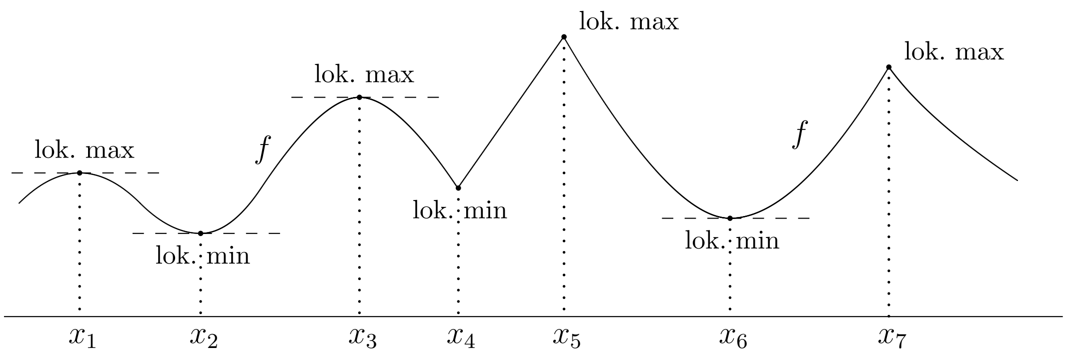
III.7. Lokální a absolutní extrémy funkce, inflexní body

III.7.1. Lokální extrémy funkce. Předpokládejme, že funkce f je definovaná v nějakém intervalu (a, b) obsahujícím bod x_0. Říkáme, že f má v bodě x_0 *lokální maximum* (respektive *lokální minimum*), existuje-li prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$ platí: $f(x) \leq f(x_0)$ (respektive $f(x) \geq f(x_0)$).

Nahradíme-li neostré nerovnosti ostrými, získáme definice tzv. *ostrého lokálního maxima*, respektive *ostrého lokálního minima*.

Lokální maximum a lokální minimum nazýváme *lokálními extrémy*, ostré lokální maximum a ostré lokální minimum nazýváme *ostrými lokálními extrémy*.

Všimněte si, že ostré lokální extrémy jsou speciálními případy lokálních extrémů. Na obr. 33 vidíte funkci f, která má ostrá lokální maxima v bodech x_1, x_3, x_5 a x_7 a ostrá lokální minima v bodech x_2, x_4 a x_6.



Obr. 33

III.7.2. Poznámka. Abychom odlišili maximum funkce f na celém definičním oboru (viz odstavec III.2.9) od lokálního maxima, nazýváme je často *absolutním maximem* nebo také *globálním maximem*. Podobně, maximum funkce na množině M též nazýváme *absolutním maximem na množině M* nebo *globálním maximem na množině M*.

Analogicky, minimum funkce f na celém definičním oboru často nazýváme *absolutním minimem* nebo také *globálním minimem*. Minimum funkce na množině M nazýváme též *absolutním minimem na množině M* nebo *globálním minimem na množině M*.

Následující věta má zásadní význam při hledání lokálních extrémů.

III.7.3. Věta (nutná podmínka pro lokální extrém). *Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, je $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz: Ukážeme důkaz sporem. Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a nechť derivace $f'(x_0)$ existuje, ale není rovna nule. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je například $f'(x_0) > 0$. Ukážeme, že toto není možné, neboli odvodíme spor.

Z nerovnosti $f'(x_0) > 0$ plyne, že existuje $a > 0$ takové, že $\lim_{h \to 0} [\, f(x_0 + h) - f(x_0)\,]/h = a > 0$. Pro každou posloupnost $\{h_n\}$ v $D(f)$ takovou, že $h_n \to 0$ tedy platí: $\lim [\, f(x_0 + h_n) - f(x_0)\,]/h_n = a > 0$. Dle definice III.1.4 to ale znamená, že ke každému $U(a)$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ takové, že pro $n \in \mathbb{N}$, pro která je $n \geq n_0$, platí: $[\, f(x_0 + h_n) - f(x_0)\,]/h_n \in U(a)$. Zvolíme-li za $U(a)$ interval $(0, 2a)$ a položíme-li $h_n = 1/n$, dostáváme: $0 < [\, f(x_0 + 1/n) - f(x_0)\,]/(1/n) < 2a$. Odtud ale plyne, že pro $n \geq n_0$ je $f(x_0 + 1/n) > f(x_0)$. To znamená, že funkce f nemůže v bodě x_0 mít lokální maximum. Podobně, pomocí volby $h_n = -1/n$ lze ukázat, že funkce f nemůže mít v bodě x_0 ani lokální minimum. To je ale spor s předpokladem, že f má v bodě x_0 lokální extrém. $\square$

III.7.4. Poznámka. Větu III.7.3 jsme nazvali „nutnou podmínkou pro lokální extrém", protože podmínka $f'(x_0) = 0$ (pokud derivace $f'(x_0)$ existuje) je skutečně pouze nutnou podmínkou pro to, aby funkce f mohla mít v bodě x_0 lokální extrém, ale nikoliv podmínkou postačující. Lze to ilustrovat třeba na tomto příkladu: Funkce $f(x) = x^3$ má v bodě $x_0 = 0$ derivaci rovnou nule, ale přesto nemá v tomto bodě lokální extrém.

III.7.5. Vyšetření lokálních extrémů. Svých lokálních extrémů v intervalu I může funkce f nabývat pouze

1) v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých je derivace funkce f rovna nule (viz obr. 33, body x_1, x_2, x_3 a x_6), nebo
2) v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých derivace funkce f neexistuje (viz obr. 33, body x_4, x_5, x_7).

Všimněte si důrazu na slovo „může". Funkce f totiž v uvedených bodech svých lokálních extrémů nabývat „může" (a nikde jinde), nikoliv však „musí". Je to důsledek věty III.7.3 a poznámky III.7.4.

Při vyšetřování lokálních extrémů funkce f postupujeme takto:

a) Najdeme všechny body, ve kterých je derivace funkce f nulová nebo ve kterých tato derivace neexistuje. Toto jsou jediné body, ve kterých f může mít lokální extrém.
b) Rozhodneme, zda v nalezených bodech funkce f opravdu má lokální extrémy a určíme, zda se jedná o lokální maximum nebo lokální minimum. K tomu můžeme použít jeden z těchto postupů:
   - b1) Označme x_0 jeden z nalezených bodů. Předpokládejme, že funkce f je spojitá v tomto bodě. (To plyne například z existence derivace – viz větu III.5.8.) Zjistíme-li například, že f je rostoucí a v nějakém levém okolí bodu x_0 a klesající v nějakém pravém okolí bodu x_0, pak f má zřejmě v bodě x_0 ostré lokální maximum. (Načrtněte si obrázek.) Naopak, je-li f klesající v nějakém levém okolí bodu x_0 a rostoucí v nějakém pravém okolí bodu x_0, pak f má v bodě x_0 ostré lokální minimum.
   - b2) K poznání, zda funkce f má v bodě x_0 lokální extrém a jakého typu, můžeme též použít větu III.6.19. S touto větou se seznámíme později. Věta využívá znaménka druhé derivace funkce f v bodě x_0.

III.7.6. Příklad. Najdeme lokální extrémy funkce $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$.

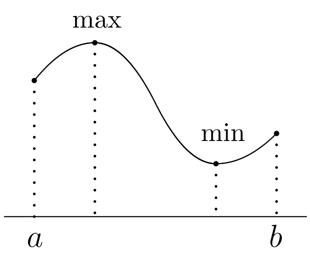
Definičním oborem funkce f je interval $(-\infty, +\infty)$ a funkce f má ve všech bodech tohoto intervalu derivaci. Má-li tedy funkce f v nějakém bodě x_0 intervalu $(-\infty, +\infty)$ lokální extrém, pak může jít pouze o extrém typu 1) z odstavce III.7.5. V takovém bodě x_0 tedy musí platit: $f'(x_0) = 0$. Derivaci funkce f snadno vypočítáme: $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^x + x^2\,\mathrm{e}^x = (2+x)\,x\,\mathrm{e}^x$. Položíme ji rovnou nule a získáme rovnici $(2+x)\,x\,\mathrm{e}^x = 0$. Tato rovnice má dvě řešení: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$. Body -2 a 0 jsou tedy jedinými body, ve kterých může mít funkce f lokální extrém.

Zjistit, zda skutečně má funkce f v některém z bodů -2 a 0 lokální extrém a o jaký extrém konkrétně jde, můžeme například způsobem, popsaným v bodě b1) v předcházejícím odstavci: Řešením nerovnice $f'(x) = (2+x)\,x\,\mathrm{e}^x > 0$ dostáváme: $x \in (-\infty, -2)$ nebo $x \in (0, +\infty)$ a podobně, nerovnice $f'(x) = (2+x)\,x\,\mathrm{e}^x < 0$ vede k řešení $x \in (-2, 0)$. Funkce f má tedy kladnou derivaci v intervalech $(\infty, -2)$ a $(0, +\infty)$, proto je podle věty III.6.4 v každém z nich rostoucí. V intervalu $(-2, 0)$ má f zápornou derivaci, proto je v něm klesající. Jelikož v bodě -2 je funkce f spojitá, je rostoucí v jeho levém okolí a klesající v jeho pravém okolí, má f v bodě -2 ostré lokální maximum. Podobně, f je spojitá funkce v bodě 0, je klesající v jeho levém okolí a rostoucí v jeho pravém okolí, proto má f v bodě 0 ostré lokální minimum.

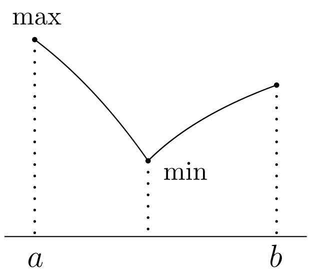
III.7.7. Vyšetření absolutních (= globálních) extrémů. Svých absolutních extrémů v intervalu I <u>může</u> funkce f nabývat pouze

1) v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých má f derivaci rovnou nule, nebo
2) v těch vnitřních bodech intervalu I, ve kterých derivace funkce f neexistuje, nebo
3) v krajních bodech intervalu I (není-li interval I otevřený).

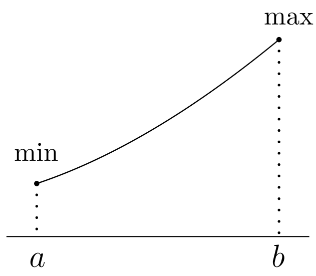
Tyto případy jsou znázorněny na obr. 34 a, 34 b a 34 c.



Obr. 34 a



Obr. 34 b



Obr. 34 c

Při vyšetřování absolutních extrémů funkce f v intervalu I postupujeme takto:

a) Najdeme všechny vnitřní body intervalu I, ve kterých je derivace funkce f nulová nebo ve kterých tato derivace neexistuje. Přidáme též krajní body intervalu I (je-li tento interval uzavřený). Toto jsou jediné body, ve kterých f může mít absolutní extrém v I.

b) Máme-li jistotu, že absolutní extrémy $\max_I f$ a $\min_I f$ existují, pak vypočítáme hodnoty funkce f ve všech nalezených bodech. Největší z nich je $\max_I f$ a nejmenší z nich je $\min_I f$.

Jistotu, že absolutní extrémy funkce f v intervalu I existují, můžeme získat například pomocí věty III.4.29. (Ta říká, že je-li interval I omezený a uzavřený a funkce f je v něm spojitá, pak absolutní extrémy f v I existují.)

Nejsou-li splněny předpoklady věty III.4.29, je třeba při vyšetřování existence absolutních extrémů funkce f v intervalu I volit jemnější postup, závislý případ od případu na funkci f. Může se stát, že oba absolutní extrémy f v I (nebo jenom jeden z nich) neexistují. (Viz též poznámku III.2.11.)

III.7.8. Příklad. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16, \; I = \langle 1, 4 \rangle$

Vyšetřete absolutní extrémy funkce f v intervalu I. (Tj. jejich existenci, hodnotu a polohu.)

Řešení: $\langle 1, 4 \rangle$ je omezený a uzavřený interval. Funkce f je v tomto intervalu spojitá. (Je patrné, že funkce f je spojitá v $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.) Podle věty III.4.29 absolutní extrémy $\max_{\langle 1,4 \rangle} f$ a $\min_{\langle 1,4 \rangle} f$ existují.

Funkce f má derivaci ve všech bodech $x \in \langle 1, 4 \rangle$:

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2}.$$

Řešením rovnice $f'(x) = 0$ získáme jediný kořen: $x = 2$. Přidáním krajních bodů intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ získáme množinu: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Toto jsou jediné body, ve kterých funkce f může v intervalu $\langle 1, 4 \rangle$ nabývat absolutních extrémů. Vypočítáme funkční hodnoty v nalezených bodech: $f(x_1) = f(1) = 1$, $f(x_2) = f(2) = -4$, $f(x_3) = f(4) = 4$. Nejmenší z nich je -4 a největší z nich je 4. Proto je $\max_{\langle 1,4 \rangle} f = f(2) = -4$ a $\min_{\langle 1,4 \rangle} f = f(4) = 4$.

Nyní se vrátíme k otázce určení typu lokálního extrému - viz též příklad III.7.6.

III.7.9. Věta (postačující podmínky pro ostrý lokální extrém).

a) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

III.7.10. Poznámka. Důkaz věty III.7.9 také vynecháme. K pochopení věty však přispěje tato úvaha: Předpokládejme, že $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ a abychom vyloučili komplikované případy, předpokládejme ještě, že druhá derivace f'' je v bodě x_0 spojitá. Z nerovnosti $f''(x_0) > 0$ plyne, že existuje okolí $U(x_0)$ takové, že $f''(x) > 0$ pro všechna $x \in U(x_0)$. (Použili jsme větu III.4.30.) Podle věty III.6.11 to ale znamená, že funkce f je v intervalu $U(x_0)$ ryze konvexní. Tato informace spolu s tím, že $f'(x_0) = 0$, vede k závěru, že f má v bodě x_0 ostré lokální minimum. (Načrtněte si obrázek.)

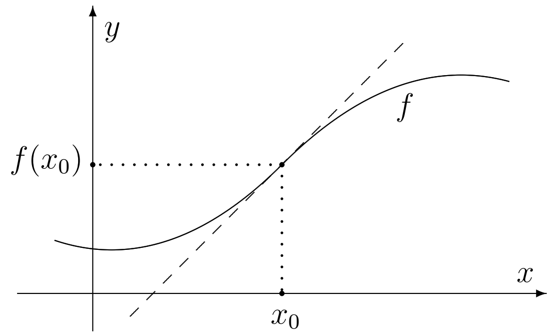
III.7.11. Příklad. Nalezneme lokální extrémy funkce $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 4$. Definičním oborem f je interval $(-\infty, +\infty)$ a funkce f má ve všech bodech tohoto intervalu derivaci, takže lokální extrémy může mít pouze v těch bodech, kde je derivace rovna nule. (Viz větu III.7.3.) Derivace f je: $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$. Řešením kvadratické rovnice $6x^2 + 6x - 36 = 0$ získáme body $x_1 = -3$ a $x_2 = 2$. Pro druhou derivaci funkce f platí: $f''(x) = 12x + 6$. Dosazením hodnot x_1 a x_2 do $f''(x)$ zjistíme, že

a) $f''(x_1) = f''(-3) = 12 \cdot (-3) + 6 = -30 < 0$. Funkce f má proto v bodě -3 ostré lokální maximum.

b) $f''(x_2) = f''(2) = 12 \cdot 2 + 6 = 30 > 0$. Funkce f má proto v bodě 2 ostré lokální minimum.

III.7.12. Poznámka. Zaměníme-li v předpokladech věty III.7.9 ostrou nerovnost $f''(x_0) > 0$ za neostrou $f''(x_0) \geq 0$, pak <u>není pravda</u>, že rovněž v tvrzení můžeme zaměnit ,,ostré lokální minimum" pouhým ,,lokálním minimem" a věta bude také platit. Naopak, nerovnost $f''(x_0) \geq 0$ připouští možnost $f''(x_0) = 0$ a ze dvou rovností $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) = 0$ nelze o extrémech funkce f v bodě x_0 učinit závěr žádný! Promyslete si toto v souvislosti se třemi jednoduchými příklady: 1) $f(x) = x^4$, 2) $f(x) = -x^4$, 3) $f(x) = x^3$. Ve všech třech příkladech uvažujte $x_0 = 0$.

III.7.13. Inflexní bod. Předpokládejme, že v bodě $[x_0, f(x_0)]$ existuje tečna ke grafu funkce f. Tečna dělí rovinu x, y na dvě poloroviny. Přechází-li v bodě $[x_0, f(x_0)]$ graf funkce f z jedné poloroviny do druhé, nazýváme x_0 <u>*inflexním bodem*</u> funkce f.



Obr. 35

III.7.14. Příklad. Bod 0 je inflexním bodem funkce $f(x) = x^3 + 1$. Nakreslete si sami graf funkce f a tečnu k jejímu grafu v bodě $[0, f(0)] = [0, 1]$.

III.7.15. Věta (nutná podmínka pro inflexní bod). *Je-li x_0 inflexním bodem funkce f a existuje-li $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.*

III.7.16. Poznámka. Existuje-li $f''(x_0)$, pak podmínka $f''(x_0) = 0$ je skutečně pouze <u>nutnou podmínkou</u> pro to, aby bod x_0 mohl být inflexním bodem f. <u>Není však podmínkou postačující!</u> To znamená, že větu III.7.15 nelze otočit a tvrdit, že z rovnosti $f''(x_0) = 0$ plyne, že x_0 je inflexní bod. Je to patrné z příkladu $f(x) = x^4$. Tato funkce má v bodě 0 druhou derivaci rovnou nule, přesto 0 není inflexním bodem f.

Najdeme-li tedy pro zadanou funkci f body, ve kterých má f druhou derivaci rovnou nule, máme pouze ,,vhodné kandidáty" na inflexní body. Jsou-li ale tyto body skutečně inflexními body, musíme zjistit jinými prostředky. V mnoha případech je k tomu užitečná následující věta.

III.7.17. Věta (postačující podmínky pro inflexní bod). *Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, je x_0 inflexním bodem funkce f.*

III.7.18. Příklad. Určíme inflexní body funkce $f(x) = \exp(-x^2)$. Pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$ je $f'(x) = -2x \exp(-x^2)$ a $f''(x) = 2(2x^2 - 1)\exp(-x^2)$. Pokud má funkce f inflexní body, musí v nich být podle věty III.7.15 druhá derivace f nulová. Proto řešíme rovnici $f''(x) = 0$, tj. $2\,(2x^2 - 1)\exp(-x^2) = 0$. Tato rovnice má dvě řešení: $x_1 = -1/\sqrt{2}$ a $x_2 = 1/\sqrt{2}$. Derivováním funkce f'' obdržíme: $f'''(x) = 4\,(3x - 2x^3)\exp(-x^2)$. Dosazením hodnot x_1 a x_2 do $f'''(x)$ zjistíme, že

a) $f'''(x_1) = f'''(-1/\sqrt{2}) = -8/\sqrt{2} \cdot \exp(-0.5) \neq 0$, bod x_1 je tedy podle věty III.7.17 inflexním bodem funkce f.

b) $f'''(x_2) = f'''(1/\sqrt{2}) = 8/\sqrt{2} \cdot \exp(-0.5) \neq 0$, bod x_2 je podle věty III.7.17 také inflexním bodem funkce f.

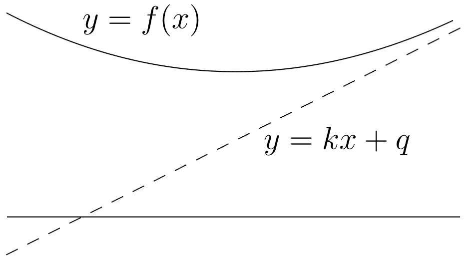
III.8. Asymptoty, průběh funkce

III.8.1. Asymptoty grafu funkce. Přímku $y = kx+q$ nazýváme <u>*šikmou asymptotou*</u> grafu funkce f pro $x \to -\infty$, jestliže $\lim\limits_{x\to-\infty} [\,f(x) - kx - q\,] = 0$.

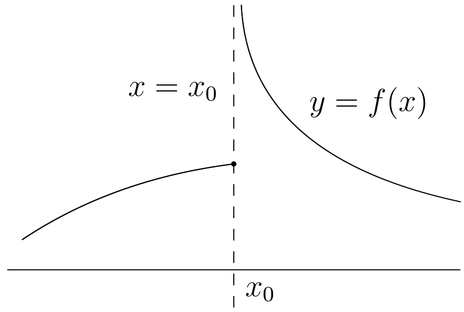
Podobně, přímku $y = kx + q$ nazýváme šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \to +\infty$, jestliže $\lim\limits_{x\to+\infty} [\,f(x) - kx - q\,] = 0$.

Přímku $x = x_0$ nazýváme <u>*svislou asymptotou*</u> grafu funkce f v bodě x_0, jestliže funkce f má v bodě x_0 alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní (tj. nekonečnou).

Příklad šikmé asymptoty grafu funkce f pro $x \to +\infty$ je vidět na obr. 36 a, příklad svislé asymptoty je vidět na obr. 36 b. (Asymptoty jsou nakresleny čárkovaně. Šikmá asymptota může být ve speciálním případě i horiozontální, tj. rovnoběžná s osou x.)



Obr. 36 a



Obr. 36 b

III.8.2. Věta (nutné a postačující podmínky pro šikmou asymptotu). *Přímka $y = kx + q$ je šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \to +\infty$ právě když současně platí*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} [\,f(x) - kx\,] = q.$$

Tato věta umožňuje zjistit, má-li daná funkce f šikmou asymptotu pro $x \to +\infty$: Počítáme výše uvedené limity. Pokud obě existují a mají konečné hodnoty k a q, pak přímka $y = kx+q$ je šikmou asymptotou funkce f pro $x \to +\infty$. Jestliže některá z obou limit neexistuje nebo je nekonečná, šikmá asymptota funkce f pro $x \to +\infty$ neexistuje.

Větu lze použít i k vyšetření šikmé asymptoty pro $x \to -\infty$. Stačí všude zaměnit $+\infty$ za $-\infty$.

III.8.3. Postup při vyšetřování průběhu funkce f:

a) • Určíme definiční obor f (není-li již zadán).
• Zjistíme, zda funkce f je sudá, lichá, periodická
• Určíme, kde je funkce f spojitá a vypočítáme jednostranné limity v krajních bodech intervalů, které tvoří definiční obor f, případně též v bodech nespojitosti funkce f.
• Stanovíme průsečíky grafu f s osami souřadného systému a najdeme maximální intervaly, v nichž funkce nabývá kladných (respektive záporných) hodnot.

b) • Vypočítáme derivaci funkce f. (Nezapomeneme na stanovení definičního oboru derivace.)
• Najdeme maximální intervaly, ve kterých je funkce monotónní. (Určíme také o jaký typ monotónnosti se jedná – tj. zda je v nalezeném intervalu f rostoucí, klesající, nerostoucí nebo neklesající.)
• Najdeme lokální extrémy funkce f.

c) • Vypočítáme druhou derivaci funkce f.
• Určíme maximální intervaly, v nichž je funkce f ryze konvexní nebo ryze konkávní (případně pouze konvexní nebo konkávní).
• Najdeme inflexní body f.

d) • Najdeme asymptoty grafu funkce f.
• Načrtneme graf f.

III.8.4. Příklad. Vyšetříme průběh funkce $f(x) = \dfrac{x^3}{4 - x^2}$.

a) • $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$ (jmenovatel zlomku nesmí být nulový).

• Funkce f je lichá, protože pro každé $x \in D(f)$ platí: $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$. Proto je graf f souměrný podle počátku souřadného systému. Funkcí f se proto budeme zabývat pouze na množině $\langle 0, 2) \cup (2, +\infty)$, informace o jejím „chování" na množině $(-\infty, -2) \cup (-2, 0\rangle$ získáme na základě zmíněné souměrnosti.

• Funkce f je v $D(f)$ spojitá (jakožto podíl dvou spojitých funkcí, funkce ve jmenovateli je kromě toho v $D(f)$ různá od nuly).

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} \frac{x^3}{4 - x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} \frac{x^3}{4 - x^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{4 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(4/x^2) - 1} = \frac{+\infty}{-1} = -\infty,$$

• $f(x) = 0 \iff \dfrac{x^3}{4 - x^2} = 0 \iff x = 0,$

$f(x) > 0 \iff x \in (0, 2), \qquad f(x) < 0 \iff x \in (2, +\infty).$

b) • Derivace funkce f: $\quad f'(x) = \dfrac{3x^2\,(4 - x^2) - (-2x)\,x^3}{(4 - x^2)^2} = \dfrac{x^2\,(12 - x^2)}{(4 - x^2)^2},$

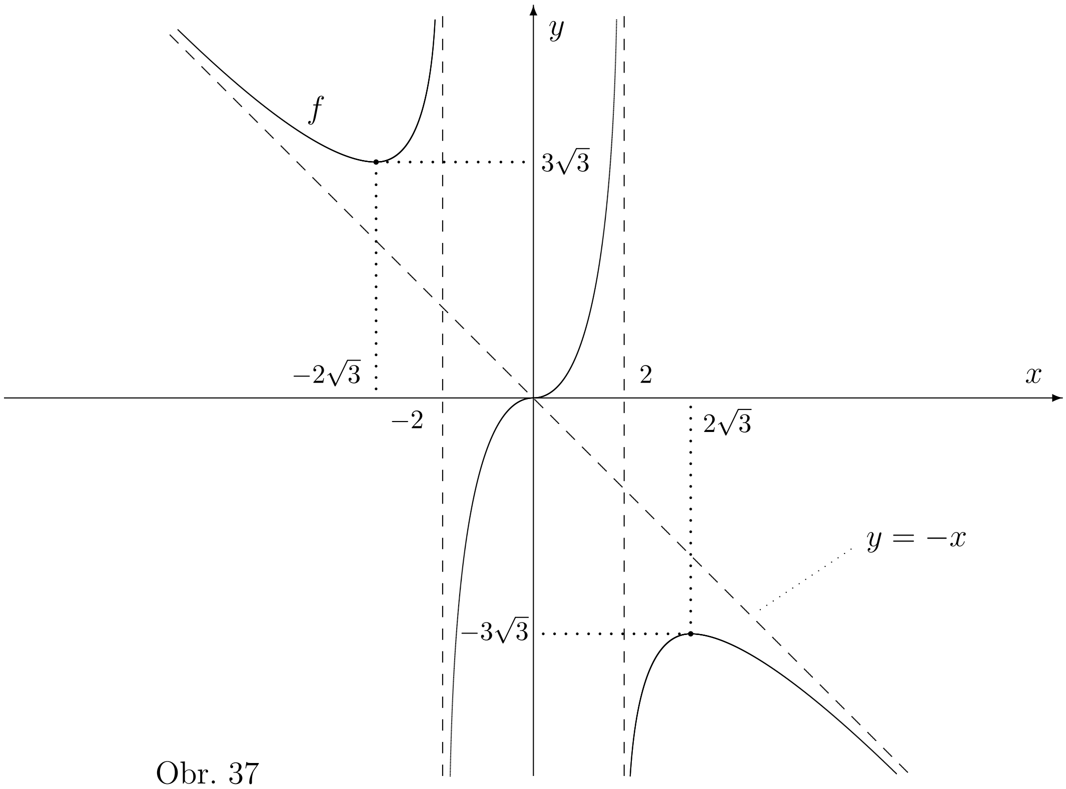
$D(f') = D(f)$,

• $f'(x) = 0 \iff \dfrac{x^2\,(12 - x^2)}{(4 - x^2)^2} = 0 \iff x = 0$ nebo $x = 2\sqrt{3}$,

$f'(x) > 0 \iff x \in (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3}),\qquad f'(x) < 0 \iff x \in (2\sqrt{3}, +\infty).$

Odtud vyplývá, že funkce f je rostoucí v intervalu $\langle 0, 2)$ a v intervalu $(2, 2\sqrt{3}\rangle$ a klesající v intervalu $\langle 2\sqrt{3}, +\infty)$.

• V bodě $2\sqrt{3}$ má ostré lokální maximum. $f(2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}$. V bodě 0 funkce f nemá extrém, i když zde má nulovou derivaci. Je totiž rostoucí v intervalu $\langle 0, 2)$ a vzhledem k tomu, že je lichá, je rostoucí i v intervalu $(-2, 0\rangle$. f je tedy rostoucí v intervalu $(-2, 2)$.



Obr. 37

c) • Vypočítejme druhou derivaci funkce f:

$$f''(x) = [\,f'(x)\,]' =$$

$$= \frac{(24x - 4x^3)\,(4 - x^2)^2 - 2\,(4 - x^2)\,(-2x)\,(12x^2 - x^4)}{(4 - x^2)^4} = \frac{8x\,(12 + x^2)}{(4 - x^2)^3},$$

$D(f'') = D(f') = D(f)$,

• $f''(x) = 0 \iff \dfrac{8x\,(12 + x^2)}{(4 - x^2)^3} = 0 \iff x = 0$,

$f''(x) > 0 \iff x \in (0, 2),\qquad f''(x) < 0 \iff x \in (2, +\infty).$

Odtud plyne, že funkce f je ryze konvexní v intervalu $\langle 0, 2)$ a ryze konkávní v intervalu $(2, +\infty)$.

• Bod 0 je inflexním bodem (protože f je ryze konvexní v $\langle 0, 2)$ a vzhledem k již zmíněné souměrnosti podle počátku je také ryze konkávní v $(-2, 0\rangle$).

d) • Svislými asymptotami funkce f jsou přímky $x = -2$ a $x = 2$ (protože f má v bodech -2 a 2 jednostranné nekonečné limity).

Hledejme šikmou asymptotu f pro $x \to +\infty$. Podle věty III.6.30 vypočítáme:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x\,(4-x^2)} = -1 = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [\, f(x) - kx\,] = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{4-x^2} = 0 = q.$$

Přímka $y = -x$ je tedy šikmou asymptotou grafu funkce f pro $x \to +\infty$. Podobně lze zjistit, že přímka $y = -x$ je také šikmou asymptotou grafu f pro $x \to -\infty$.

• Graf funkce f je nakreslen na obr. 37.

III.8.5. Cvičení. Vyšetřete průběhy funkcí

a) $f(x) = x^{2/3} - x$, b) $f(x) = x \cdot \exp(1/x)$, c) $f(x) = x \cdot \exp(-x^2)$,
d) $f(x) = x^2/(x^2-4)$, e) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

III.9. Taylorův polynom, Taylorova věta

III.9.1. Motivace, odvození tvaru Taylorova polynomu. Předpokládejme, že funkce f má derivace až do řádu n (včetně) v bodě x_0. Hledejme polynom T_n stupně nejvýše n, který má tvar

$$T_n(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + a_n \cdot (x - x_0)^n$$

a který v okolí bodu $x_0 \in (a, b)$ nejlépe aproximuje funkci f. Požadavek nejlepší aproximace realizujeme tak, že požadujeme, aby funkce f a polynom T_n měly v bodě x_0 stejnou hodnotu a aby se v bodě x_0 též shodovaly jejich derivace až do řádu n (včetně). (Říkáme tomu ,,styk n–tého řádu".) To znamená:

$$T_n(x_0) = f(x_0), \quad T_n'(x_0) = f'(x_0), \quad T_n''(x_0) = f''(x_0), \quad \ldots, \quad T_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Toto je celkem $n+1$ podmínek. Na jejich základě lze jednoduchým výpočtem určit $n+1$ koeficientů $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Polynom T_n s těmito koeficienty, tj. polynom

$$T_n(x) \;=\; f(x_0) \;+\; \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) \;+\; \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 \;+\; \ldots \;+\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n,$$

nazýváme _Taylorovým polynomem_ n–tého stupně funkce f o středu v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, často se též pro tento polynom používá název _Maclaurinův polynom_. Abychom však příliš nekomplikovali terminologii, v tomto textu zůstaneme u názvu ,,Taylorův polynom".

V bodech $x \neq x_0$ nelze očekávat, že rovnost $f(x) = T_n(x)$ bude platit zcela přesně. Nahradíme-li proto $f(x)$ polynomem $T_n(x)$, dopustíme se jisté chyby. Označme ji $R_{n+1}(x)$. Informaci o tom, jak lze $R_{n+1}(x)$ vyjádřit (a tudíž i odhadnout jeho velikost) dává následující věta.

III.9.2. Taylorova věta. *Nechť funkce f má derivace až do řádu $n+1$ (včetně) v intervalu (a,b) a nechť $x_0 \in (a,b)$. Pak ke každému $x \in (a,b)$ existuje bod ξ ležící mezi x a x_0 tak, že*

$$f(x) \;=\; T_n(x) \;+\; R_{n+1}(x), \tag{III.9.1}$$

kde

$$R_{n+1}(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}. \tag{III.9.2}$$

III.9.3. Poznámka. Vzorec (III.6.5) se nazývá _Taylorovým vzorcem_. Lze jej také psát ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & f(x_0) \;+\; \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) \;+\; \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 \;+\; \ldots \\ & +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n \;+\; R_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{III.9.3}$$

Výraz $R_{n+1}(x)$ se nazývá _zbytkem po n–tém členu v Taylorově vzorci_. (Písmeno R se používá proto, že anglicky se zbytek nazývá ,,remainder".) Zbytek lze vyjádřit různými způsoby, vzorec (III.9.2) obsahuje tzv. _Lagrangeův tvar zbytku_.

III.9.4. Příklad – Taylorův vzorec exponenciální funkce o středu 0 a tvar zbytku po n–tém členu. Zvolme $x_0 = 0$. Dosazením tohoto x_0 a $f(x) = \mathrm{e}^x$ do Taylorova vzorce (III.9.3) obdržíme:

$$\mathrm{e}^x \;=\; 1 \;+\; \frac{x}{1!} \;+\; \frac{x^2}{2!} \;+\; \ldots \;+\; \frac{x^n}{n!} \;+\; R_{n+1}(x), \qquad \text{kde} \quad R_{n+1}(x) = \frac{\mathrm{e}^\xi\, x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

III.9.5. Příklad – Taylorův polynom funkce sinus o středu 0 a tvar zbytku po n–tém členu. Výpočtem derivací funkce sinus v bodě $x_0 = 0$ zjistíme, že

a) všechny derivace sudého řádu jsou rovny nule,

b) derivace lichého řádu jsou rovny ± 1, přičemž znaménka se střídají:
$(\sin x)'\big|_{x=0} = \cos 0 = -1$, $\quad(\sin x)^{(3)}\big|_{x=0} = -\cos 0 = -1$,
$(\sin x)^{(5)}\big|_{x=0} = \cos 0 = 1$, $\quad$ atd.

Pokud tedy číslo n je například sudé, tj. n má tvar $n = 2m$ pro vhodné $m \in \mathbb{N}$, pak Taylorův polynom stupně n funkce sinus v bodě 0 má tvar

$$T_n(x) \;\equiv\; T_{2m}(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\,\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

Zbytek po n–tém členu vypadá takto:

$$R_{n+1}(x) \;\equiv\; R_{2m+1}(x) \;=\; (-1)^m\,\frac{\cos\xi}{(2m+1)!}\cdot x^{2m+1}.$$

III.9.6. Příklad – Taylorův polynom funkce kosinus o středu 0 a tvar zbytku po n–tém členu. Výpočtem derivací funkce kosinus v bodě $x_0 = 0$ zjistíme:

a) všechny derivace lichého řádu jsou rovny nule,

b) derivace sudého řádu jsou rovny ± 1, přičemž znaménka se střídají:
$(\cos x)''\big|_{x=0} = -\cos 0 = -1, \quad (\cos x)^{(4)}\big|_{x=0} = \cos 0 = 1,$
$(\cos x)^{(6)}\big|_{x=0} = -\cos 0 = -1,$ atd.

Pokud tedy číslo n je například liché, tj. n má tvar $n = 2m+1$ pro vhodné $m \in \mathbb{N}$, pak Taylorův polynom stupně n funkce kosinus v bodě 0 má tvar

$$T_n(x) \;\equiv\; T_{2m+1}(x) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m\,\frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Zbytek po n–tém členu pak vypadá takto:

$$R_{n+1}(x) \;\equiv\; R_{2m+2}(x) \;=\; (-1)^m\,\frac{\cos\xi}{(2m+2)!}\cdot x^{2m+2}.$$

III.9.7. Příklad. Pomocí Taylorova vzorce o středu 0 pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$ vypočítáme hodnotu Eulerova čísla e s maximální chybou $\frac{1}{100}$. Dosadíme-li do vyjádření e^x z příkladu III.9.4 $x = 1$, dostaneme:

$$\mathrm{e} \;=\; 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \qquad \text{kde} \quad R_{n+1}(1) \;=\; \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}.$$

Pokud hodnotu e nahradíme součtem $1 + \ldots + 1/n!$, dopustíme se chyby rovné $R_{n+1}(1)$. Výše uvedené vyjádření $R_{n+1}(1)$ obsahuje přesně neurčené číslo ξ. Taylorova věta poskytuje informaci, že $\xi \in (0,1)$. Ptejme se nyní, jak velké je nutné zvolit n, aby $|\,R_{n+1}(1)\,| < \frac{1}{100}$. Protože $0 < \mathrm{e}^\xi < \mathrm{e}^1 < 3$, velikost $R_{n+1}(1)$ lze odhadnout:

$$|\,R_{n+1}(1)\,| \;=\; \frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!} \;<\; \frac{3}{(n+1)!}.$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že pro $n = 5$ je $3/(n+1)! = 3/6! = \frac{3}{720} = \frac{1}{240} < \frac{1}{100}$. Stačí tedy použít $n = 5$. Číslo e pak vyjádříme s chybou menší než $\frac{1}{100}$ takto:

$$\mathrm{e} \doteq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{5!} \;=\; 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \;=\; \frac{326}{120}\,.$$

*III.10. Funkce definované parametricky

III.10.1. Motivace. Při různých technických výpočtech, při řešení diferenciálních rovnic, apod. se může stát, že hledáme funkci $y = f(x)$, ale tuto funkci nezískáme v explicitním tvaru a místo toho získáme zvlášť vyjádření x a y v závislosti na nějakém parametru, například

(III.10.1) $$x = t^2, \qquad y = 3t - 1; \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

Zajímá nás, zda rovnicemi (III.10.1) je skutečně definována nějaká funkce y proměnné x, jaký má tato funkce definiční obor, jaký obor hodnot, jaký průběh, atd.

Zabývejme se těmito otázkami na obecné úrovni, tj. předpokládejme, že místo konkrétních rovnic (III.10.1) máme obecné rovnice

(III.10.2) $$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t); \qquad t \in M.$$

Je-li funkce φ v množině M prostá, pak každé své hodnoty x nabývá tato funkce v jediném bodě $t \in M$. Tomuto bodu pak odpovídá jediná hodnota $y = \psi(t)$. Tímto způsobem je definována funkce, která každému $x \in H(\varphi)$ přiřazuje hodnotu $y \in H(\psi)$.

Naopak, není-li funkce φ v množině M prostá, pak některé své hodnoty x nabývá minimálně ve dvou různých bodech t_1, $t_2 \in M$. Těmto bodům odpovídají hodnoty $y_1 = \psi(t_1)$ a $y_2 = \psi(t_2)$. Tyto hodnoty sice ve výjimečných případech mohou být stejné, obecně to však očekávat nelze. Přiřazení $x \to y$, které je takto definováno, není funkcí, protože jedné hodnotě x může být přiřazeno více hodnot y.

III.10.2. Funkce definovaná parametricky. Předpokládejme, že funkce φ, ψ jsou definovány v množině M a že <u>funkce φ je prostá</u>. Rovnicemi (III.10.2) je pak <u>*parametricky definována*</u> funkce f která udává závislost y na x. Hodnotu $f(x)$ lze vyjádřit tímto způsobem: Jelikož funkce φ je prostá, existuje k ní inverzní funkce φ_{-1} a rovnost $x = \varphi(t)$ je splněna právě když $t = \varphi_{-1}(x)$. Dosadíme-li toto t do rovnice $y = \psi(t)$, obdržíme: $y = f(x) = \psi(\varphi_{-1}(x))$.

Definičním oborem funkce f je množina těch x, pro která lze získat t ve tvaru $t = \varphi_{-1}(x)$. To je ale množina $D(\varphi_{-1})$, která je identická s $H(\varphi)$. Platí tedy: $\underline{D(f) = H(\varphi)}$.

Oborem hodnot funkce f je množina těch y, která lze vyjádřit ve tvaru $y = \psi(t)$ pro $t \in M$. To je ale množina $H(\psi)$. Platí tedy: $\underline{H(f) = H(\psi)}$.

III.10.3. Poznámka. Vyjádření $y = f(x) = \psi(\varphi_{-1}(x))$ v praxi často nelze použít. Je to způsobeno tím, že není možné explicitně vyjádřit inverzní funkci φ_{-1}, i když tato inverzní funkce existuje. (Příklad: $\varphi(t) = \mathrm{e}^t + t$; $t \in (-\infty, +\infty)$.)

III.10.4. Poznámka. Pochopit definici parametricky zadané funkce může pomoci též tato představa: Rovnicemi (III.10.2) je v rovině $\mathbb{E}_2$ popsána křivka. Označme ji C. Tato křivka sestává ze všech bodů $P(t) = [\,x, y\,] = [\,\varphi(t), \psi(t)\,]$ pro $t \in M$. Je-li funkce φ prostá, pak nemůže nastat případ, kdy křivka C obsahuje dva různé body $[\,x, y_1\,]$ a $[\,x, y_2\,]$ se stejnou první a různými druhými souřadnicemi. To znamená, že křivka C je grafem funkce y proměnné x. Té funkce, která je parametricky definována rovnicemi (III.10.2).

Naopak, není-li funkce φ prostá, pak křivka C nemusí být grafem žádné funkce y proměnné x. To je případ funkce $x = \varphi(t) = t^2$ z rovnic (III.10.1). Tato funkce φ není v intervalu $(-\infty, +\infty)$ prostá. Křivka C vytvořená pomocí rovnic (III.10.1) je parabolou o rovnici $x = \frac{1}{9}(y+1)^2$. (Rovnici paraboly získáme, když ze druhé rovnice v (III.10.1) vyjádříme t a toto t dosadíme do první rovnice.) Nakreslete si tuto parabolu! Osou paraboly je přímka $y = -1$. Je patrné, že tato parabola není grafem funkce y proměnné x a rovnicemi (III.10.1) není proto parametricky žádná taková funkce definována.

Funkce $x = \varphi(t) = t^2$ sice není prostá v intervalu $(-\infty, +\infty)$, ale je prostá v každém z intervalů $I_1 = (-\infty, 0\rangle$ a $I_2 = \langle 0, +\infty)$. Rovnicemi (III.10.1) je proto pro $t \in I_1$ parametricky definována funkce $y = f_1(x)$ a pro $t \in I_2$ je jimi parametricky definována funkce $y = f_2(x)$. Grafem funkce f_1 je větev paraboly $x = \frac{1}{9}(y+1)^2$, která odpovídá $y \le -1$ a grafem funkce f_2 je větev paraboly, která odpovídá $y \ge -1$.

III.10.5. Věta (o spojitosti funkce definované parametricky). *Je-li M interval, funkce φ a ψ jsou spojité v M a funkce φ je prostá v M, pak funkce $y = f(x)$, která je definovaná parametricky rovnicemi (III.10.2), je spojitá ve svém definičním oboru $D(f)$.*

III.10.6. Poznámka. Věta III.10.5 je snadným důsledkem vyjádření $y = f(x) = \psi(\varphi_{-1}(x))$, věty o spojitosti složené funkce (viz odstavec III.3.25) a věty o spojitosti inverzní funkce (viz odstavec III.3.28).

III.10.7. Derivace funkce definované parametricky. Navažme na situaci popsanou v odstavci III.10.2. Předpokládejme navíc, že obě funkce φ a ψ mají v množině $M_1 \subset M$ derivace $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$. (Derivaci podle proměnné t označujeme tečkou v souladu s tím, jak je to běžné ve fyzice, mechanice, atd.) Předpokládejme dále, že $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ pro všechna $t \in M_1$. Pomocí věty o derivaci složené funkce a věty o derivaci inverzní funkce dostáváme pro $x \in H(\varphi|_{M_1})$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = [\psi(\varphi_{-1}(x))]' = \dot{\psi}(\varphi_{-1}(x)) \cdot \varphi'_{-1}(x) = \frac{\dot{\psi}(\varphi_{-1}(x))}{\dot{\varphi}(\varphi_{-1}(x))} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}.$$

Funkce f má tedy na množině $H(\varphi|_{M_1}) \equiv \varphi(M_1)$ derivaci f', kterou lze tedy parametricky vyjádřit rovnicemi

$$\text{(III.10.3)} \qquad f' : \quad x = \varphi(t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}; \quad t \in M_1.$$

III.10.8. Poznámka. V odborné literatuře často najdete rovnice (III.10.3) zapsané tak, že ve druhé rovnici není $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, ale pouze y. To je čistě formální věc – závisle proměnnou i nezávisle proměnnou můžeme značit různými symboly. Závisle proměnnou v rovnicích (III.10.3) tedy můžeme označovat jak y, tak i y' nebo $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Poslední možnost je možná méně obvyklá, avšak v daných souvislostech ji považujeme za nejnázornější.

III.10.9. Příklad. Ověřte, zda rovnicemi $x = 2t - \sin t$, $y = 1 + \cos t$; $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je parametricky definována funkce $y = f(x)$. V kladném případě rozhodněte o její spojitosti, určete její definiční obor, obor hodnot, její derivaci a najděte intervaly monotónnosti.

Řešení: Funkce $\varphi(t) = 2t - \sin t$ má v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ kladnou derivaci $2 - \cos t$, proto je v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ rostoucí a tudíž i prostá. To znamená, že uvedenými rovnicemi je definována parametricky funkce $y = f(x)$. Obě funkce $\varphi(t) = 2t - \sin t$ a $\psi(t) = 1 + \cos t$ jsou v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ spojité, proto podle věty III.10.5 je i parametricky definovaná funkce $y = f(x)$ na svém definičním oboru spojitá.

Oborem hodnot funkce $\varphi(t) = 2t - \sin t$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je interval $\langle 0, 4\pi\rangle$. (Je to patrné z toho, že φ je v $\langle 0, 2\pi\rangle$ rostoucí, v bodě 0 má hodnotu 0 a v bodě 2π má hodnotu 4π.) Proto je $D(f) = H(\varphi) = \langle 0, 4\pi\rangle$.

Oborem hodnot funkce $\psi(t) = 1 + \cos t$ v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ je interval $\langle 0, 2\rangle$. Proto je $H(f) = H(\psi) = \langle 0, 2\rangle$.

Obě funkce φ a ψ mají v intervalu $(0, 2\pi)$ derivace a $\dot\varphi(t) = 2 - \cos t \neq 0$ pro všechna $t \in (0, 2\pi)$. (Funkce $2t - \sin t$ a $1 + \cos t$ mají derivace v $(-\infty, +\infty)$, ale rovnicemi $\varphi(t) = 2t - \sin t$ a $\psi(t) = 1 + \cos t$ jsou funkce φ a ψ definovány pouze v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, proto lze o jejich oboustranných derivacích hovořit pouze v intervalu $(0, 2\pi)$.) Dosazením do rovnic (III.10.3) dostáváme toto parametrické vyjádření derivace funkce f:

$$f' : \qquad x = 2t - \sin t, \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin t}{2 - \cos t}; \qquad t \in (0, 2\pi).$$

Hodnoty $f'(x)$ jsou dány druhou rovnicí. Tj. platí:

$$f'(x) > 0 \iff -\frac{\sin t}{2 - \cos t} > 0 \iff -\sin t > 0 \iff t \in (\pi, 2\pi) \iff x \in (2\pi, 4\pi),$$

$$f'(x) < 0 \iff -\frac{\sin t}{2 - \cos t} < 0 \iff -\sin t < 0 \iff t \in (0, \pi) \iff x \in (0, 2\pi).$$

Funkce f je proto v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ klesající a v intervalu $\langle 2\pi, 4\pi\rangle$ rostoucí. V bodě 2π, kde je $f(2\pi) = \psi(\pi) = 0$, nabývá svého absolutního minima. V bodech 0 a 4π, kde je $f(0) = \psi(0) = 2$ a $f(4\pi) = \psi(2\pi) = 2$, nabývá svého absolutního maxima.

III.10.10. Druhá derivace funkce definované parametricky. Vyjděme ze situace popsané v odstavci III.10.2. Předpokládejme navíc, že funkce φ i ψ mají v množině $M_2 \subset M$ druhé derivace $\ddot\varphi$, $\ddot\psi$ a že $\dot\varphi(t) \neq 0$ pro všechna $t \in M_2$. První derivace funkce $y = f(x)$, definované parametricky rovnicemi (III.10.2), je dána rovnicemi (III.10.3). Druhou derivaci f získáme jakožto derivaci první derivace, tj. na rovnice (III.10.3) aplikujeme stejný postup, který jsme v odstavci III.10.7 aplikovali na rovnice (III.10.2). Označíme-li ϑ funkci na pravé straně druhé rovnice v (III.10.3) (tj. $\vartheta(t) = \dot\psi(t)/\dot\varphi(t)$), obdržíme toto parametrické vyjádření funkce f'':

$$f'' : \qquad x = \varphi(t), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot\vartheta(t)}{\dot\varphi(t)}; \qquad t \in M_2.$$

Dosazením $\dot{\vartheta}(t) = [\,\ddot{\psi}(t)\cdot\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)\cdot\ddot{\varphi}(t)\,]\,/\,[\,\dot{\varphi}(t)\,]^2$ do druhé z výše uvedených rovnic dostáváme:

$$f'' \;:\qquad x = \varphi(t), \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\ddot{\psi}(t)\cdot\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)\cdot\ddot{\varphi}(t)}{[\,\dot{\varphi}(t)\,]^3}; \qquad t \in M_2.$$

Derivace vyšších řádů funkce definované parametricky by bylo možné počítat analogicky.

III.10.11. Cvičení. Ověřte, že danými rovnicemi jsou parametricky definovány funkce $y = f(x)$. Jsou tyto funkce spojité? Určete jejich definiční obory, obory hodnot a vyjádřete parametricky jejich první a druhé derivace.

a) $x = t^3 + t + 1, \quad y = t^4 + 2t + 2; \quad t \in (-\infty, +\infty)$,

b) $x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t; \quad t \in (0, \pi/2)$.

Výsledky:

a) Funkce f je spojitá, $D(f) = (-\infty, +\infty)$, $H(f) = (2^{-4/3} - 2^{2/3} + 2, +\infty)$,

$$f' \;:\qquad x = t^3 + t + 1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{4t^3 + 2}{3t^2 + 1}; \qquad t \in (-\infty, +\infty),$$

$$f'' \;:\qquad x = t^3 + t + 1, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{12\,(t^4 + t^2 - t)}{(3t^2 + 1)^3}; \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

b) Funkce f je spojitá, $D(f) = \langle 0, 1\rangle$, $H(f) = \langle 0, 1\rangle$,

$$f' \;:\qquad x = \cos^3 t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\operatorname{tg} t; \qquad t \in (0, \pi/2),$$

$$f'' \;:\qquad x = \cos^3 t, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{3\,\sin t\,\cos^4 t}; \qquad t \in (0, \pi/2).$$

*III.11. Přibližné řešení nelineární rovnice $f(x) = 0$

III.11.1. Kořen rovnice $f(x) = 0$. Nechť f je funkce. Každý bod $\xi \in D(f)$, pro který platí $f(\xi) = 0$, se nazývá <u>*kořenem*</u> rovnice

$$f(x) \;=\; 0.$$

III.11.2. Motivace. Rovnice $\mathrm{e}^x - 5 + x = 0$ má v reálném oboru jediný kořen. Zkuste se o tom přesvědčit sami. (Návod: Rovnice má ekvivalentní tvar $\mathrm{e}^x = 5 - x$ a z průběhu grafů funkcí e^x a $5 - x$ je patrné, že grafy se protínají v jediném bodě. Nakreslete si obrázek.) Vyjádřit z uvažované rovnice neznámou x se vám však nepodaří, analytické řešení rovnice totiž není možné.

III.11.3. Poznámka. Na střední škole jste se naučili řadu metod řešení různých typů rovnic. Tyto metody většinou vedly k tzv. analytickému vyjádření kořenů. To znamená, že kořeny rovnic byly dány nějakými vzorci a číselnou hodnotu kořenů jste mohli získat pomocí těchto vzorců po provedení konečného počtu operací. V mnoha případech, dokonce lze říci že ve většině praktických případů, však toto není možné. Nejjednodušší rovnice je obvykle možné řešit analyticky, o málo komplikovanější případy již většinou nikoliv.

V dalších odstavcích se seznámíme se dvěma tzv. ,,přibližnými" metodami řešení. Pro tyto metody je charakteristické, že umožní získat řešení pouze přibližně, avšak s chybou libovolně malou. Maximální velikost chyby můžeme před začátkem výpočtu sami stanovit. To je v praxi zcela postačující – uvědomte si, že i v těch případech, kdy rovnice umíme řešit analyticky, objevují se často ve vyjádření kořenů různé odmocniny nebo jiné komplikované výrazy a hodnotu těchto výrazů mnohdy stejně umíme stanovit pouze přibližně. (Příkladem je situace, kdy kořen rovnice je rovný $\sqrt{3}+5$.)

Použití přibližných metod obvykle vyžaduje provedení značného množství početních operací. Efektivní realizace přibližných metod je proto možná pouze na počítačích.

III.11.4. Postupné aproximace, iterační posloupnost, odhad chyby. Metody řešení rovnice $f(x) = 0$, které v následujících odstavcích popíšeme, jsou založeny na konstrukci tzv. *postupných aproximací*. Nějakým způsobem (dle návodu použité metody) zvolíme *počáteční aproximaci* x_0 a poté (opět dle návodu použité metody) vytváříme další aproximace $x_1, x_2, \ldots$ Posloupnost $\{x_n\}$ postupných aproximací se nazývá *iterační posloupnost*. Metody, při nichž se konstruuje iterační posloupnost, se nazývají *iterační metody*.

Tento postup má smysl tehdy, je-li

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi,$$

kde ξ je kořen rovnice $f(x)=0$. V tomto případě se totiž výpočtem dalších a dalších aproximací dostáváme blíže k přesnému řešení – ke kořenu ξ. Důležitou součástí každé metody je tedy nejen návod, jak volit počáteční aproximaci x_0 a jak vytvářet další aproximace $x_1, x_2, \ldots$, ale také informace o tom, za jakých podmínek tato iterační posloupnost konverguje ke kořenu rovnice $f(x)=0$.

Každý výpočet musíme někdy ukončit. To znamená, že s výpočtem postupných aproximací nemůžeme pokračovat donekonečna, musíme se spokojit s výpočtem až do nějakého indexu n. Jak tento index poslední aproximace ale vybrat? To souvisí s přesností, s jakou si přejeme rovnici $f(x)=0$ řešit. Součástí většiny iteračních metod je i odhad typu

$$|x_n-\xi| \le \gamma_n,$$

kde $\gamma_n\to 0$ pro $n\to+\infty$ a číslo γ_n metoda umožňuje stanovit. Takovému odhadu se říká *odhad chyby*. Říká nám totiž, že nahradíme-li přesné řešení ξ rovnice $f(x)=0$ přibližným řešením x_n, dopustíme se chyby nejvýše γ_n. Jsme-li tedy v situaci, že si přejeme rovnici $f(x)=0$ vyřešit s chybou nepřevyšující nějakou zadanou hodnotu ϵ, pak aproximace počítáme do tak velkého indexu n, až $\gamma_n\le\epsilon$. S aproximací x_n se pak již můžeme spokojit a můžeme ji prohlásit za přibližné řešení rovnice $f(x)=0$. Z odhadu chyby totiž plyne, že $|x_n-\xi|\le\gamma_n\le\epsilon$.

V některých případech výpočet ukončujeme bez použití odhadu chyby. Prostě se rozhodneme, že se spokojíme například s aproximací x_{100} a považujeme ji za přibližné řešení. Jak je ale patrné, tento postup není tak korektní, jako když pracujeme s odhadem chyby.

III.11.5. Separace kořenu. _Separací kořenu_ ξ rovnice $f(x) = 0$ rozumíme nalezení takového intervalu $\langle a, b\rangle$, ve kterém má rovnice $f(x) = 0$ jediný kořen ξ.

K separaci kořenů rovnice $f(x) = 0$ často používáme věty III.4.26 a III.6.4.

III.11.6. Příklad. Separujme kořeny rovnice $\ln x - 2x + 7 = 0$. Funkce $f(x) = \ln x - 2x + 7$ je definovaná v intervalu $(0, +\infty)$, je zde spojitá a má zde derivaci $f'(x) = 1/x - 2$. Platí:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Snadno ověříme, že derivace $f'(x)$ je kladná pro $x \in (0,\, 0.5)$, rovna nule pro $x = 0.5$ a záporná pro $x \in (0.5, +\infty)$. Funkce f je tedy rostoucí v intervalu $(0,\, 0.5\rangle$ a klesající v intervalu $\langle 0.5, +\infty)$. V bodě 0.5 má f ostré lokální maximum a je zde $f(0.5) = 6 - \ln 2 > 0$.

Zvolme nyní $a > 0$ dostatečně malé, například $a = 0.0001$ a ukažme, že jeden kořen rovnice $f(x) = 0$ je separován v intervalu $\langle a,\, 0.5\rangle$.

a) Existence kořenu: Víme, že v intervalu $\langle a,\, 0.5\rangle$ je funkce f spojitá, $f(a) = f(0.0001) = \ln 0.0001 - 0.0002 + 7 = (-4)\cdot \ln 10 - 0.0002 + 7 < (-4)\cdot 2 - 0.0002 + 7 < 0$ a $f(0.5) > 0$. Protože 0 leží mezi $f(a)$ a $f(0.5)$, plyne z věty III.4.26, že mezi body a a 0.5 existuje bod ξ_1 takový, že $f(\xi_1) = 0$.

b) Jednoznačnost kořenu: V intervalu $\langle a,\, 0.5\rangle$ je funkce f rostoucí, proto zde nemůže žádné své hodnoty nabývat více, než jednou. Odtud plyne, že kromě kořenu ξ_1 v intervalu $\langle a,\, 0.5\rangle$ žádný další kořen neleží.

Podobným způsobem lze ukázat, že zvolíme-li $b > 0$ dostatečně velké, například $b = 10$, pak v intervalu $\langle 0.5,\, b\rangle$ je separován druhý kořen ξ_2 rovnice $f(x) = 0$. Žádné další kořeny kromě ξ_1 a ξ_2 rovnice nemá.

III.11.7. Metoda půlení intervalu. Předpokládejme, že funkce f je spojitá a ryze monotónní v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a)\cdot f(b) < 0$. Z těchto předpokladů plyne, že rovnice $f(x) = 0$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ jediný kořen ξ a konverguje k němu iterační posloupnost, vytvářená tímto způsobem:

Volba počáteční aproximace: Položíme $x_0 = (a + b)/2$.

Výpočet dalších aproximací: Je-li $f(x_0)\cdot f(b) < 0$, je $\xi \in (x_0, b\rangle$. Změníme proto a a položíme $a = x_0$. Je-li $f(x_0)\cdot f(b) \geq 0$, je $\xi \in \langle a, x_0\rangle$. Změníme proto b a položíme $b = x_0$. Dále položíme $x_1 = (a + b)/2$. Podobným způsobem získáme x_2, atd. (Nakreslete si obrázek.)

Odhad chyby: Označme L délku intervalu $\langle a, b\rangle$ na začátku výpočtu. Víme, že $\xi \in \langle a, b\rangle$, proto je $|x_0 - \xi| \leq L/2$. Při výpočtu každé další aproximace se délka ,,proměnného" intervalu $\langle a, b\rangle$, v němž leží kořen ξ, zmenšuje na polovinu. Proto je

$$|x_n - \xi| \;\leq\; L/2^{n+1}.$$

III.11.8. Metoda tečen (Newtonova metoda). Předpokládejme, že

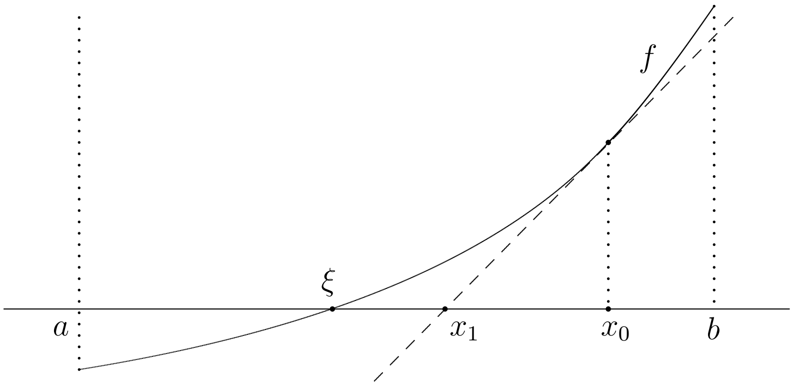
a) funkce f má ve všech bodech $x \in \langle a, b\rangle$ druhou derivaci $f''(x)$, která zde nemění své znaménko,

b) $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$,

c) $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Za těchto předpokladů má rovnice $f(x) = 0$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ jediný kořen ξ a konverguje k němu iterační posloupnost, vytvářená podle následujících pravidel:

Obr. 38



Volba počáteční aproximace: Za počáteční aproximaci x_0 zvolíme libovolný bod intervalu $\langle a, b\rangle$ takový, že $f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$. (Tomuto předpokladu vyhovuje vždy také jeden z bodů a, b.)

Výpočet dalších aproximací: V bodě $[x_0, f(x_0)]$ sestrojíme tečnu ke grafu funkce f. Průsečík tečny s osou x označíme x_1. Podobně získáme další aproximaci x_2, atd. (Nakreslete si obrázek.) Tento postup lze snadno vyjádřit početně. Představme si, že již známe aproximaci x_n a přejeme si vypočítat další aproximaci x_{n+1}. Rovnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_n, f(x_n)]$ je $y = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n)$. (Viz odstavec III.5.5.) Pro $x = x_{n+1}$ je $y = 0$. Tak dostáváme rovnici $0 = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x_{n+1} - x_n)$, ze které vypočítáme

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Odhad chyby: Z Lagrangeovy věty (odstavec III.6.1), použité na intervalu s krajními body x_n a ξ, plyne existence bodu η mezi body x_n a ξ takového, že $f(x_n) - f(\xi) = f'(\eta) \cdot (x_n - \xi)$. $f(\xi)$ je však rovno nule (neboť ξ je kořen rovnice $f(x) = 0$), takže dostáváme $x_n - \xi = f(x_n)/f'(\eta)$ a odtud dále plyne, že

$$|\, x_n - \xi \,| \leq \frac{|\, f(x_n) \,|}{m},$$

kde $m = \min_{\eta \in \langle a, b\rangle} |\, f'(\eta) \,|$.

III.11.9. Poznámka. V dalších semestrech, v předmětu Numerická matematika, se seznámíte ještě s jinými přibližnými metodami řešení rovnice $f(x) = 0$ (s metodou sečen též nazývanou metoda regula falsi, atd.). Rovněž se seznámíte s metodami, které umožňují přibližně řešit soustavy nelineárních algebraických rovnic pro více neznámých.

IV. Neurčitý integrál

IV.1. Primitivní funkce, neurčitý integrál

IV.1.1. Primitivní funkce. Nechť I je interval s krajními body a, b (přičemž $a < b$; čísla a, b mohou být i nekonečná). Funkci F nazýváme *primitivní funkcí* k funkci f v intervalu I, jestliže

a) $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$,

b) $F'_+(a) = f(a)$ (patří-li bod a do intervalu I),

c) $F'_-(b) = f(b)$ (patří-li bod b do intervalu I).

IV.1.2. Poznámka. Místo ,,F je primitivní funkcí k funkci f v intervalu I" budeme někdy stručně psát ,,$F' = f$ v I".

Prakticky celá část IV je věnována otázce, jak ke známé funkci f nalézt primitivní funkci F. Znalost primitivní funkce je důležitá zejména proto že pomocí primitivní funkce můžeme vypočítat tzv. určitý integrál funkce f. (Viz část V.) Na problém nalezení primitivní funkce vede i řešení mnohých diferenciálních rovnic. (Viz kapitolu IV.7.)

Nalézt k funkci f její primitivní funkci je problém ,,opačný", než nalézt derivaci funkce f. Podobně, jako ne každá funkce má derivaci, tak také nikoliv ke každé funkci existuje primitivní funkce. Následující věta obsahuje postačující podmínku pro to, aby k funkci f existovala v intervalu I primitivní funkce.

IV.1.3. Věta (o existenci primitivní funkce). *Je-li funkce f spojitá v intervalu I, pak k funkci f existuje v intervalu I primitivní funkce.*

IV.1.4. Poznámka. Kromě existence primitivní funkce je další otázkou její jednoznačnost. Následující věta říká, že pokud primitivní funkce existuje, pak není jediná. Primitivních funkcí je nekonečně mnoho, libovolné dvě se ale navzájem liší nejvýše o aditivní konstantu.

IV.1.5. Věta. a) *Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I a je-li C libovolná reálná konstanta, pak funkce $F + C$ je také primitivní funkcí k funkci f v intervalu I.*

b) Jsou-li F a G dvě primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak existuje reálná konstanta C taková, že $G = F + C$ v intervalu I.

Důkaz: a) Je-li $F' = f$ v I, pak v intervalu I také platí

$$G' = (F + C)' = F' + C' = F' = f.$$

b) Je-li $F' = f$ v I, a $G' = f$ v I, pak $(G-F)' = G'-F' = f-f = 0$ v I. Funkce $H = G - F$ má tudíž v intervalu I nulovou derivaci a proto je v I funkcí konstantní. (Viz větu III.6.4, bod e).) Existuje tedy $C \in \mathbb{R}$ takové, že $H(x) = G(x) - F(x) = C$ pro všechna $x \in I$. To ale znamená, že $G(x) = F(x) + C$ pro všechna $x \in I$. $\square$

IV.1.6. Věta. *Jsou-li F a G primitivní funkce k funkcím f a g v intervalu I, pak $F+G$ je primitivní funkcí k $f+g$ v intervalu I.*

Je-li F primitivní funkce k f v intervalu I a α je libovolné reálné číslo, je $\alpha \cdot F$ primitivní funkcí k $\alpha \cdot f$ v intervalu I.

Důkaz: plyne okamžitě z věty III.5.10, částí a) a b). □

IV.1.7. Neurčitý integrál. *Neurčitým integrálem funkce f v intervalu I* nazýváme množinu všech primitivních funkcí k funkci f v intervalu I (pokud je tato množina neprázdná). Neurčitý integrál označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I \qquad \text{nebo pouze stručněji} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int f\,\mathrm{d}x.$$

Je-li F primitivní funkce k funkci f v intervalu I, pak množina $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ je tvořena funkcí F a všemi funkcemi, které se od F liší na I pouze o aditivní konstantu. Tuto skutečnost vyjadřujeme zápisem:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \qquad x \in I.$$

Konstantu C nazýváme *integrační konstantou*.

Z definice neurčitého integrálu je patrné, že integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ v intervalu I existuje právě tehdy, existuje-li k funkci f primitivní funkce v intervalu I. Postačující podmínkou pro tuto existenci je spojitost funkce f v I. (Viz větu IV.1.3.)

IV.1.8. Věta. *Mají-li funkce f a g neurčité integrály v intervalu I a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak*

$$\int [\,f(x)+g(x)\,]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in I \tag{IV.1.1}$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad x \in I. \tag{IV.1.2}$$

Tato věta plyne okamžitě z věty IV.1.6. Rovnost (IV.1.1) je přesně vzato rovnost mezi množinami funkcí. Této rovnosti je třeba rozumět takto:

a) Libovolnou funkci z množiny vlevo, tj. z $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$, je možné vyjádřit jako součet dvou funkcí z množin vpravo, tj. funkce z množiny $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a funkce z množiny $\int g(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Naopak, součet dvou libovolných funkcí z množin vpravo, tj. funkce z $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a funkce z $\int g(x)\,\mathrm{d}x$, patří do množiny vlevo, tj. do $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$.

Podobným způsobem lze vysvětlit i smysl rovnosti (IV.1.2).

IV.1.9. Důsledek. Větu IV.1.8 lze zobecnit: *Mají-li funkce $f_1, \ldots, f_n$ neurčité integrály v intervalu I a jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ reálná čísla, je*

$$\int [\,\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x)\,]\,\mathrm{d}x = \alpha_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \alpha_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

IV.1.10. Tabulka základních neurčitých integrálů. Ze vzorců pro derivace elementárních funkcí (viz odstavce III.5.12, III.5.13 a III.5.17) bezprostředně vyplývají vzorce pro některé neurčité integrály. Tyto vzorce nyní uvedeme. Každý z nich platí v libovolném intervalu I, který je obsažen v definičním oboru integrované funkce.

a) $\displaystyle\int 0 \, \mathrm{d}x = C,$ b) $\displaystyle\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1),$

c) $\displaystyle\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C,$ d) $\displaystyle\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C,$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(\cos x)^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C,$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x)^2} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C,$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C,$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C,$

i) $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1),$ j) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C,$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln |x| + C.$

IV.1.11. Poznámka. Na první pohled není patrné, jak plyne vzorec k) ze vzorce pro derivování funkce $\ln x$ (tj. ze vzorce e) v odstavci III.5.17). V intervalu $(0, +\infty)$ to patrné je, neboť zde je $|x| = x$. V intervalu $(-\infty, 0)$ je ale $|x| = -x$ a proto zde platí:

$$[\ln |x|\,]' = \frac{1}{|x|} \cdot |x|' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-x)' = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

Odtud vyplývá, že vzorec k) platí i v intervalu $(-\infty, 0)$.

IV.1.12. Poznámka. Použitím vzorců pro derivace funkcí arkuskosinus a arkuskotangens (z odstavce III.5.17) můžeme integrály g) a h) v odstavci IV.1.10 napsat také takto:

g)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\arccos x + C,$ h)* $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{arccotg} x + C.$

To ale neznamená nic jiného, než že rozdíl $[\arcsin x - (-\arccos x)\,]$ je konstantní funkcí v intervalu $(-1, +1)$ a podobně, rozdíl $[\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arccotg} x)\,]$ je konstantní funkcí v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

IV.1.13. Poznámka. Postup, vedoucí k nalezení primitivní funkce nebo neurčitého integrálu k zadané funkci f (což je vlastně jedno a totéž, neboť k vyjádření neurčitého integrálu stačí znát jednu z primitivních funkcí k f), nazýváme *integrování* nebo *integrace*.

Zatímco derivování funkcí je procedura, kterou lze poměrně dobře algoritmizovat (obvykle stačí vybrat a použít vhodné vzorečky pro derivování), totéž nelze v žádném případě říci o integrování. Obecný algoritmus, který by poskytoval návod k integraci jakékoliv funkce, neexistuje. Dokonce je známo mnoho funkcí, jejichž primitivní funkce existují, ale nelze je vyjádřit v tzv. uzavřeném tvaru, tj. pomocí formule která předepisuje provedení konečně mnoha různých operací a dovoluje při nich použít elementárních funkcí. (Příkladem takové funkce je $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$.) V minulosti bylo vymyšleno velké množství různých postupů, které umožňují vždy pro určitou skupinu ,,podobných” funkcí nalézt neurčité integrály. Toto bylo předmětem zájmu mnoha matematiků zejména v 18. a 19 století. Mnohé postupy jsou jednoduché, jiné jsou však velmi komplikované (jsou založené na složitých substitucích, apod.). Dnes tyto komplikované postupy do značné míry ztratily svůj význam. Je to dáno tím, že rozvoj výpočetní techniky umožňuje počítat určité integrály a řešit diferenciální rovnice (kvůli nimž se hlavně neurčité integrály učíme), různými, zejména přibližnými metodami pomocí počítačů. To však neznamená, že se můžeme zcela spoléhat na počítače a integrování se neučit vůbec! (Na základní škole se také stále učí a patrně i dále bude učit násobilka, i když počítače umí násobit čísla rychleji a spolehlivěji.) S nejjednoduššími postupy integrace se proto v další části této kapitoly seznámíme.

IV.1.14. Příklad. $\displaystyle\int (x^3 - 3x^2 + 4x - 1)\,\mathrm{d}x$

$$= \int x^3\,\mathrm{d}x - 3\int x^2\,\mathrm{d}x + 4\int x\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x^2 - x + C.$$

Metoda, kterou jsme vyřešili tento příklad, se nazývá *integrace rozkladem*. Integrál jsme totiž rozložili na lineární kombinaci jednodušších integrálů, z nichž každý umíme samostatně vypočítat. Správnost tohoto postupu potvrzuje věta IV.1.8 a důsledek IV.1.9.

Integrační konstanty není třeba připisovat zvlášť ke každému neurčitému integrálu ve výše uvedeném rozkladu. Všechny takové konstanty je možné sdružit do jedné, kterou označíme například C a připíšeme nakonec.

IV.2. Integrace per–partes

IV.2.1. Motivace. V kapitole III jsme odvodili pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí (viz odstavec III.5.10, část d)). Toto pravidlo lze zjednodušeně zapsat: $(uv)' = u'v + uv'$. Odtud plyne: $u'v = (uv)' - uv'$. Integrujeme-li obě strany a uvědomíme-li si, že integrace je ,,inverzní operace k derivování (a tudíž $\int (uv)'\,\mathrm{d}x = u\,v$), obdržíme vzorec:

IV.2.2. Věta (o integraci per–partes). *Mají-li funkce u a v spojité derivace v intervalu I, pak v tomto intervalu platí:*

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

IV.2.3. Příklad. $\int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \;=\, ^{*)}\, -x\cdot\cos x - \int(-\cos x)\,\mathrm{d}x \;=\; -x\cdot\cos x + \sin x + C$ (pro $x \in \mathbb{R}$). $\quad ^{*)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = \sin x,\;\; v(x) = x,\;\; u(x) = -\cos x,\;\; v'(x) = 1.$

IV.2.4. Příklad. $\int (x^2 - 3x + 1)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\, ^{*)}\; (x^2-3x+1)\,\mathrm{e}^x \;-\; \int (2x-3)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\, ^{**)}$

$$= \;(x^2-3x+1)\,\mathrm{e}^x \;-\; (2x-3)\,\mathrm{e}^x \;+\; \int 2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; (x^2-5x+6)\,\mathrm{e}^x \;+\; C \qquad (\text{pro } x \in \mathbb{R}).$$

$^{*)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v(x) = x^2 - 3x + 1,\;\; u(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v'(x) = 2x - 3.$
$^{**)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v(x) = 2x - 3,\;\; u(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v'(x) = 2.$

IV.2.5. Příklad. $\int \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; \int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x \;=\, ^{*)}\; x\cdot\ln x \;-\; \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$$= x\cdot\ln x \;-\; \int 1\,\mathrm{d}x \;=\; x\cdot\ln x \;-\; x \;+\; C \qquad (\text{pro } x > 0).$$

$^{*)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = 1,\;\; v(x) = \ln x,\;\; u(x) = x,\;\; v'(x) = 1/x.$

IV.2.6. Příklad. $\int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \;=\, ^{*)}\; \mathrm{e}^x\cdot\sin x \;-\; \int \mathrm{e}^x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x \;=\, ^{**)}\; \mathrm{e}^x\cdot\sin x -$

$$-\,\mathrm{e}^x\cdot\cos x + \int \mathrm{e}^x\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^x\cdot\sin x - \mathrm{e}^x\cdot\cos x - \int \mathrm{e}^x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \qquad (\text{pro } x \in \mathbb{R}).$$

$^{*)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v(x) = \sin x,\;\; u(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v'(x) = \cos x.$
$^{**)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v(x) = \cos x,\;\; u(x) = \mathrm{e}^x,\;\; v'(x) = -\sin x.$

Označíme-li počítaný integrál $\mathcal{I}$, pak můžeme psát: $\quad \mathcal{I} \;=\; \mathrm{e}^x\cdot\sin x \;-\; \mathrm{e}^x\cdot\cos x \;-\; \mathcal{I}.$

Odtud snadno vypočítáme: $\quad \mathcal{I} \;=\; \frac{1}{2}\,[\,\mathrm{e}^x\cdot\sin x \;-\; \mathrm{e}^x\cdot\cos x\,] \;+\; C \qquad (\text{pro } x \in \mathbb{R}).$

***IV.2.7. Příklad.** $\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \;=\; \int 1\cdot\frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \;=\, ^{*)}\; x\cdot\frac{1}{(1+x^2)^n} -$

$$-\int x\cdot\Big[\frac{1}{(1+x^2)^n}\Big]'\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x}{(1+x^2)^n} \;-\; \int x\cdot\Big[\frac{-n}{(1+x^2)^{n+1}}\cdot 2x\Big]\,\mathrm{d}x \;=$$

$$= \;\frac{x}{(1+x^2)^n} \;+\; 2n\int\frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \;-\; 2n\int\frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

$^{*)}$ Položili jsme: $\quad u'(x) = 1,\;\; v(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n},\;\; u(x) = x,\;\; v'(x) = \frac{(-n)\cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}}.$

Označme $\quad \mathcal{I}_n \;=\; \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.\quad$ Integrací per–partes jsme obdrželi rovnici

$$\mathcal{I}_n \;=\; \frac{x}{(1+x^2)^n} \;+\; 2n\cdot\mathcal{I}_n \;-\; 2n\cdot\mathcal{I}_{n+1}\,.$$

Odtud odvodíme rekurentní vzorec: $\quad \mathcal{I}_{n+1} = \dfrac{1}{2n} \cdot \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n} \mathcal{I}_n \,.$

Například pro $n = 1$ tento vzorec dává: $\quad \mathcal{I}_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2} \mathcal{I}_1.$

Protože $\mathcal{I}_1 = \operatorname{arctg} x + C$, dospěli jsme k výsledku: $\quad \mathcal{I}_2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{x}{1+x^2} + \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C$

pro $x \in \mathbb{R}$. (Integrační konstantu stále značíme pouze C. Nehledejte proto žádnou korespondenci mezi C v jedné formuli a C v jiné formuli.)

IV.2.8. Cvičení. Vypočítejte integrály:

a) $\displaystyle\int x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, $\qquad$ b) $\displaystyle\int x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$, $\qquad$ c) $\displaystyle\int x^2 \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int x^2 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x$, $\qquad$ e) $\displaystyle\int x \cdot \operatorname{arccotg} x \,\mathrm{d}x$, $\qquad$ f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$.

Výsledky: a) $\mathrm{e}^x \cdot (x-1) + C$ (pro $x \in \mathbb{R}$),

b) $x \cdot \sin x + \cos x + C$ (pro $x \in \mathbb{R}$),

c) $x^2 \cdot \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C$ (pro $x \in \mathbb{R}$),

d) $\frac{1}{3} x^3 [\ln x - \frac{1}{3}] + C$ (pro $x > 0$),

e) $\frac{1}{2} (x^2+1) \cdot \operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2} x + C$ (pro $x \in \mathbb{R}$),

f) $\frac{1}{2} \mathrm{e}^x (\sin x + \cos x) + C$ (pro $x \in \mathbb{R}$).

IV.3. Substituční metoda

IV.3.1. Motivace. Podobně, jako integrace per–partes je ,,otočením" vzorce pro derivování součinu dvou funkcí, tak substituční metoda je ,,otočením" vzorce pro derivování složené funkce. Vysvětleme to trochu podrobněji: Je-li F primitivní funkce k f na intervalu I, pak

$$F(x) + C = \int f(x) \,\mathrm{d}x \qquad \text{pro } x \in I.$$

Dosadíme-li $x = g(t)$ (pro t probíhající nějaký interval J), pak podle pravidla pro derivování složené funkce je $[F(g(t))]' = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$ pro $t \in J$. To znamená, že

$$F(g(t)) + C = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{pro } t \in J.$$

Levé strany v obou formulích se shodují za předpokladu, že proměnné x a t jsou svázány podmínkou $x = g(t)$. Proto i pravé strany se musí za stejného předpokladu shodovat. Dostáváme tak vzorec

$$\int f(x) \,\mathrm{d}x = \int f(g(t)) \cdot g'(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{pro } x \in I \text{ a } t \in J.$$

IV.3.2. Věta (o integraci substitucí). *Předpokládejme, že funkce* $f(x)$ *je spojitá v intervalu* I. *Předpokládejme dále, že funkce* $x = g(t)$ *má spojitou derivaci v intervalu* J *a zobrazuje tento interval na interval* I. *Pak platí*

$$\text{(IV.3.1)} \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(g(t))\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{pro } x\in I,\;\; t\in J,\;\; x=g(t).$$

Poznámka IV.3.3. Připomeňme, že neurčitý integrál na levé straně (IV.3.1) je množinou všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu I. Podobně, neurčitý integrál na pravé straně je množinou všech primitivních funkcí k funkci $f(g(t))\cdot g'(t)$ v intervalu J. Rovnost (IV.3.1) je tedy rovnost mezi dvěma množinami funkcí. Na první pohled vypadá tato rovnost podivně, protože na levé straně je množina funkcí definovaných v intervalu I a na pravé straně množina funkcí definovaných v intervalu J. Rovnosti (IV.3.1) je však třeba rozumět tak, že dosadíme-li do každé funkce v množině na levé straně $x = g(t)$, pak obě množiny splývají.

Rovnost (IV.3.1) lze použít dvěma způsoby:

I. Přejeme si vypočítat integrál vpravo a problém převedeme na výpočet integrálu vlevo. (Tento postup má smysl, pokud je integrál vlevo jednodušší.)

II. Přejeme si vypočítat integrál vlevo a problém převedeme na výpočet integrálu vpravo. (Má to smysl tehdy, je-li integrál vpravo jednodušší.)

Oba způsoby popíšeme v následujících odstavcích podrobněji. Nazveme je ,,substituční metoda I" a ,,substituční metoda II".

IV.3.4. Substituční metoda I. Nechť jsou splněny předpoklady věty IV.3.2. Představme si, že chceme vypočítat neurčitý integrál na pravé straně rovnosti (IV.3.1). Položíme $g(t) = x$ a $g'(t)\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Tak získáme integrál vyskytující se na levé straně rovnosti (IV.3.1). Tento integrál vypočítáme (pro $x \in I$). Vyjádření původního integrálu pak získáme, dosadíme-li do výsledku za x opět $g(t)$.

IV.3.5. Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int (\sin t)^3\cdot\cos t\ \mathrm{d}t$. Provedeme-li substituci $\sin t = x$ a použijeme-li též (v souladu s výše popsaným postupem) odtud vyplývající vyjádření $(\sin t)'\ \mathrm{d}t = \cos t\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$, obdržíme:

$$\int (\sin t)^3\cdot\cos t\ \mathrm{d}t \;=\; \int x^3\ \mathrm{d}x \;=\; \tfrac{1}{4}\,x^4 + C \;=\; \tfrac{1}{4}\,(\sin t)^4 + C.$$

Předpoklady věty IV.3.2 jsou splněny, neboť: Funkce $g(t) = \sin t$ má v intervalu $J = (-\infty, +\infty)$ derivaci a zobrazuje tento interval na interval $I = \langle -1, +1\rangle$. Funkce $f(x) = x^3$ je v intervalu I spojitá.

IV.3.6. Poznámka. Při použití ,,substituční metody I" není většinou nutné přesné stanovení intervalu I na nějž zobrazuje funkce g interval J. Stačí vědět, že funkce g zobrazuje interval J do nějakého intervalu I', ve kterém je funkce f spojitá. Pak je totiž f spojitá v každém intervalu který je podmnožinou I', tedy také v intervalu $I = H(g|_J)$.

Při řešení příkladu IV.3.5 by tedy stačilo konstatovat, že funkce g zobrazuje interval J do intervalu $I' = (-\infty, +\infty)$, ve kterém je funkce $f(x) = x^3$ spojitá.

IV.3.7. Poznámka. Proměnnou, podle které integrujeme, lze označovat různě. V prvním integrálu který máme počítat, však bývá nejčastěji označována jako x. To ale znamená, že při použití prvního pravidla o substituci začínáme s integrálem $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x$. Novou proměnnou můžeme označit třeba s. Pomocí substituce $s = g(x)$, $\mathrm{d}s = g'(x)\ \mathrm{d}x$ pak tento integrál převádíme na integrál $\int f(s)\ \mathrm{d}s$. Zvykněte si na různá označení proměnných!

IV.3.8. Substituční metoda II. Nechť jsou splněny předpoklady věty IV.3.2 a funkce g je v intervalu J ryze monotónní. Představme si, že chceme vypočítat integrál $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ v intervalu I. Položíme $x = g(t)$ a $\mathrm{d}x = g'(t) \cdot \mathrm{d}t$. Problém tak převedeme na výpočet integrálu $\int f(g(t)) \cdot g'(t)\ \mathrm{d}t$ v intervalu J. Tento integrál vypočítáme a vyjádření původního integrálu získáme, dosadíme-li do výsledku $t = g_{-1}(x)$.

IV.3.9. Poznámka. Při použití „substituční metody II" potřebujeme v závěru, při zpětném dosazování, z rovnosti $x = g(t)$ vyjádřit $t = g_{-1}(x)$. Předpoklad o ryzí monotónnosti funkce g v intervalu J zajišťuje existenci inverzní funkce g_{-1} v intervalu I.

IV.3.10. Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \sqrt{9 - x^2}\ \mathrm{d}x$. Integrovaná funkce je definovaná a spojitá v intervalu $\langle -3, 3\rangle$. V tomto intervalu budeme neurčitý integrál počítat. Použijeme substituci $x = g(t) = 3 \sin t$ (pro $t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$). Funkce g je v intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ rostoucí (a tudíž ryze monotónní), má zde derivaci a zobrazuje tento interval na interval $\langle -3, 3\rangle$. Funkce g tedy vyhovuje předpokladům pro použití Substituční metody II. Do integrálu kromě substituce $x = 3 \sin t$ dosadíme také $\mathrm{d}x = g'(t)\ \mathrm{d}t = \cos t\ \mathrm{d}t$. Obdržíme:

$$\int \sqrt{9 - x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{9 - 9 \sin^2 t} \cdot 3 \cos t\ \mathrm{d}t = 9 \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t\ \mathrm{d}t =$$

$$= 9 \int |\cos t| \cdot \cos t\ \mathrm{d}t \overset{*)}{=} 9 \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = 9 \int \frac{1 + \cos(2t)}{2}\ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{9}{2} \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right] + C = \frac{9}{2} [t + \sin t \cdot \cos t] + C \overset{**)}{=}$$

$$= \tfrac{9}{2} \left[\arcsin\left(\tfrac{1}{3} x\right) + \tfrac{1}{3} x \cdot \sqrt{1 - \tfrac{1}{9} x^2} \right] + C.$$

*) Funkce kosinus je v intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ nezáporná, proto pro všechna t z tohoto intervalu je $|\cos t| = \cos t$.

**) Pro $t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ platí $x = 3 \sin t$ právě tehdy, platí-li $t = \arcsin\left(\frac{1}{3} x\right)$.

IV.3.11. Příklad. Vypočítejme integrál $\displaystyle\int \frac{1}{1 - x}\ \mathrm{d}x$. Definičním oborem funkce $1/(1 - x)$ je sjednocení $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. V obou intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$.

je funkce $1/(1-x)$ spojitá, proto v každém z nich existuje jak primitivní funkce, tak i neurčitý integrál.

Použijeme substituci $x = 1-u$. Kromě toho do integrálu dosadíme $\mathrm{d}x = (1-u)'\,\mathrm{d}u = -\mathrm{d}u$. Dostaneme:

$$\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = -\ln|u| + C = -\ln|1-u| + C.$$

Ověřte sami podrobně platnost všech předpokladů Substituční metody II.

IV.3.12. Cvičení. a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{(\sin x)^3}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{\exp\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$,

h) $\displaystyle\int (1-2x)^{1000}\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-2x^2}}\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2^x+1}}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\,\mathrm{d}x$,

l) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky: a) $-\frac{3}{4}(1-x^2)^{2/3} + C$ (v intervalech $(-\infty,-1), (-1,1), (1,+\infty)$),
b) $-1/(2\sin^2 x) + C$ (ve všech intervalech $(k\pi, /k+1)\pi)$, k celé),
c) $\frac{2}{3}(\operatorname{arctg} x)^{3/2} + C$ (v $(-\infty,+\infty)$), d) $2\exp\sqrt{x} + C$ (v $(-\infty,+\infty)$),
e) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln x}\,(\ln x - 9) + C$ (v $(1,+\infty)$), f) $-\mathrm{e}^{-x} + C$ (v $(-\infty,+\infty)$),
g) $\operatorname{arctg}(\mathrm{e}^x) + C$ (v $(-\infty,+\infty)$), h) $-\frac{1}{2002}(1-2x)^{1001} + C$ (v $(-\infty,+\infty)$),
i) $\arcsin(\sqrt{2}x)/\sqrt{2} + C$ (v $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$), j) $\displaystyle\frac{1}{\ln 2}\ln\left[\frac{\sqrt{2^x+1}-1}{\sqrt{2^x+1}+1}\right] + C$
(v $(-\infty,+\infty)$), k) $\displaystyle 2\sqrt{1-x} + \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right| + C$ (v $(-\infty,1)$),
l) $\ln|\operatorname{arctg} x| + C$ (v intervalech $(-\infty,0)$ a $(0,+\infty)$).

IV.4. Integrace jednodušších racionálních funkcí

IV.4.1. Racionální funkce. *Racionální funkcí* nazýváme funkci typu P/Q, kde P a Q jsou polynomy, přičemž stupeň polynomu Q je větší nebo roven jedné.

IV.4.2. Poznámka. Ukážeme, jak lze integrovat racionální funkce, které mají ve jmenovateli polynom stupně nejvýše tři. Postup při integraci ostatních racionálních funkcí je podobný, může být ovšem technicky podstatně komplikovanější. V příkladu IV.6.6 je zahrnut a ukázán postup integrace racionální funkce s polynomem stupně čtyři ve jmenovateli.

Na začátku integrace racionální funkce je třeba polynom ve jmenovateli (tj. polynom Q) rozložit na součin polynomů lineárních, případně též kvadratických.

Lineární polynomy vyskytující se v tomto rozkladu mají úzký vztah ke kořenům polynomu Q: Rozklad Q obsahuje lineární polynom $(x-\alpha)$ právě tehdy, je-li α kořenem polynomu Q. $(x-\alpha)$ se v takovém případě nazývá *kořenovým činitelem* polynomu Q.

Kvadratický polynom se v rozkladu Q bude vyskytovat jen tehdy, není-li možné tento kvadratický polynom v reálném oboru již dále rozložit (tj. nemá-li reálné kořeny a je-li jeho diskriminant záporný – viz dále případy Ia) a IIa)).

IV.4.3. Rozklad polynomu stupně nejvýše tři.

I) Předpokládejme nejprve, že Q je polynom stupně dva, tj.

$$Q(x) \;=\; q_0\, x^2 \,+\, q_1\, x \,+\, q_2 \qquad (\text{kde } q_0 \neq 0\,).$$

Jsou tři možnosti:

- Ia) Polynom Q nemá v reálném oboru žádný kořen a nelze jej tedy v reálném oboru rozložit.
- Ib) Polynom Q má v reálném oboru jediný (dvojnásobný) kořen α a je možné jej rozložit následujícím způsobem: $Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)^2$.
- Ic) Polynom Q má v reálném oboru dva různé (jednoduché) kořeny α, β a je možné jej rozložit takto: $Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)$.

II) Nyní předpokládejme, že Q je polynom stupně tři, tj.

$$Q(x) \;=\; q_0\, x^3 \,+\, q_1\, x^2 \,+\, q_2\, x \,+\, q_3 \qquad (\text{kde } q_0 \neq 0\,).$$

Jsou čtyři možnosti:

- IIa) Polynom Q má jediný reálný kořen α, který je jednoduchý. V tomto případě lze Q psát ve tvaru $Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x^2+rx+s)$, přičemž kvadratický polynom (x^2+rx+s) v reálném oboru rozložit nelze (jeho diskriminant je záporný).
- IIb) Polynom Q má jediný reálný kořen α, který je trojnásobný. V tomto případě lze Q rozložit takto: $Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)^3$.
- IIc) Polynom Q má v reálném oboru jeden jednoduchý kořen α a jeden dvojnásobný kořen β. Pak Q je možné rozložit takto: $Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)^2$.
- IId) Polynom Q má v reálném oboru tři různé kořeny α, β, γ. V takovém případě lze Q rozložit následujícím způsobem:
  $Q(x) \;=\; q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)$.

Načrtněte si sami, jak v uvedených případech může vypadat graf polynomu Q.

IV.4.4. Příklad. Rozložme na součin jednodušších činitelů (v reálném oboru již dále nerozložitelných) polynom

$$Q(x) \;=\; 2x^3 \,-\, 4x^2 \,-\, 20x \,-\, 50.$$

Odhadem (tj. postupným dosazováním čísel 0, 1, -1, 2, -2, ...) zjistíme, že $Q(5) = 0$. Polynom Q má tedy reálný kořen $\alpha = 5$. (Kdybychom tímto způsobem kořen polynomu Q nenalezli, mohli bychom použít například tzv. Cardanových vzorců – viz knihu [Re].) Polynom Q je tudíž beze zbytku dělitelný kořenovým činitelem $(x - 5)$. Dělením polynomů zjistíme, že

$$Q(x) : (x-5) = \\ = (2x^3 - 4x^2 - 20x - 50) : (x-5) = 2x^2 + 6x + 10 = 2\,(x^2 + 3x + 5).$$

Diskriminant polynomu $x^2 + 3x + 5$ je záporný ($= -11$). Polynom proto nemá reálné kořeny a v reálném oboru je nerozložitelný. Hledaný rozklad polynomu Q tedy je:

$$Q(x) = 2\,(x-5)\,(x^2 + 3x + 5).$$

Tento rozklad odpovídá případu IIa) v předcházejícím odstavci IV.4.3.

IV.4.5. Rozklad racionální funkce s polynomem 2. stupně ve jmenovateli na součet parciálních zlomků. Předpokládejme, že P je polynom stupně menšího než 2 (tj. je to buď konstantní funkce nebo je to lineární polynom) a Q je polynom stupně 2. Předpokládejme dále, že polynomy P a Q nemají společného kořenového činitele kterým by bylo možné racionální funkci P/Q krátit (tj. polynomy P, Q jsou nesoudělné). V tomto odstavci ukážeme, jak je možné racionální funkci P/Q rozložit na součet jednodušších, tzv. *parciálních zlomků*. Rozklad závisí na tom, jak lze rozložit polynom Q na součin jednodušších, v reálném oboru již dále nerozložitelných činitelů (viz odstavec IV.4.3). Proto projdeme všechny tři možnosti rozkladu polynomu Q (tj. možnosti Ia), Ib) a Ic) z odstavce IV.4.3) a vždy ukážeme odpovídající rozklad racionální funkce P/Q.

Ia) $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x)}{q_0x^2 + q_1x + q_2}$ V tomto případě je již racionální funkce $P(x)/Q(x)$ parciálním zlomkem.

Ib) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)^2} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2}$$

Ic) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

Jak lze v konkrétním případě určit konstanty A_1 a A_2 (respektive A a B) ukážeme v následujícím příkladu.

IV.4.6. Příklad. Rozložíme na součet parciálních zlomků racionální funkci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-7}{x^2 - 5x + 6}.$$

Polynom Q lze rozložit takto: $Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)\,(x-3)$. Podle vzorce Ic) v předcházejícím odstavci lze psát:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\,.$$

Součet na pravé straně znovu převedeme na společného jmenovatele:

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A\,(x-3) + B\,(x-2)}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{(A+B)\,x - (3A+2B)}{(x-2)\,(x-3)}\,.$$

Poslední zlomek je totožný se zlomkem $P(x)/Q(x)$ (je pouze jinak zapsán). Porovnáním čitatelů dostáváme: $(A+B)\,x - (3A+2B) = 2x-7$. Dva polynomy se sobě rovnají právě když se sobě rovnají všechny koeficienty u odpovídajících si mocnin nezávisle proměnné (tj. x). Porovnáním koeficientů obdržíme soustavu dvou lineárních algebraických rovnic

$$A + B = 2, \qquad 3A + 2B = -7$$

pro dvě neznámé A a B. Řešením této soustavy dostaneme: $A=3,\ B=-1$. Hledaný rozklad tedy je:

$$\frac{2x-7}{x^2-5x+6} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x-3}\,.$$

IV.4.7. Rozklad racionální funkce s polynomem 3. stupně ve jmenovateli na součet parciálních zlomků. Předpokládejme, že P je polynom stupně menšího než 3 (tj. stupně 0, 1, nebo 2) a Q je polynom stupně 3. Dále předpokládejme, že polynomy P a Q nemají společného kořenového činitele kterým by bylo možné racionální funkci P/Q krátit (tj. polynomy P, Q jsou nesoudělné). Ukážeme, jak je možné racionální funkci P/Q rozložit na součet parciálních zlomků. Rozklad je závislý na tom, jak lze rozložit polynom Q na součin jednodušších, v reálném oboru již dále nerozložitelných činitelů (viz odstavec IV.4.3). Proto projdeme všechny čtyři možnosti rozkladu polynomu Q (tj. možnosti IIa), IIb), IIc) a IId) z odstavce IV.4.3) a vždy uvedeme odpovídající rozklad racionální funkce P/Q.

IIa) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)\,(x^2+rx+s)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{Bx+C}{x^2+rx+s}$$

IIb) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)^3} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{A_3}{(x-\alpha)^3}$$

IIc) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2}$$

IId) $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{q_0\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta} + \frac{C}{x-\gamma}$$

Koeficienty A, B, C (respektive A_1, A_2, A_3, respektive A, B_1, B_2) lze v konkrétních případech stanovit podobně, jako v příkladu IV.4.6. Ukážeme to také v následujícím příkladu.

IV.4.8. Příklad. Rozložíme na součet parciálních zlomků racionální funkci

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 10x - 25}\,.$$

Polynom Q je možné rozložit (viz příklad IV.4.4): $Q(x) = (x-5)\,(x^2+3x+5)$. Podle vzorce IIa) z předcházejícího odstavce můžeme psát:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{5x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 10x - 25} = \frac{A}{x-5} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3x + 5}\,.$$

Převedeme-li součet na pravé straně znovu na společného jmenovatele, obdržíme po jednoduché úpravě:

$$\frac{A}{x-5} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3x + 5} = \frac{(A+B)\,x^2 + (3A - 5B + C)\,x + (5A - 5C)}{(x-5)\,(x^2 + 3x + 5)}\,.$$

Poslední zlomek je totožný se zlomkem $P(x)/Q(x)$. Porovnáním čitatelů dostáváme: $(A+B)\,x^2 + (3A-5B+C)\,x + (5A-5C) = 5x^2 + 2x$. Porovnáme-li dále koeficienty u odpovídajících si mocnin x obdržíme soustavu tří lineárních algebraických rovnic pro tři neznámé A, B, C:

$$A + B = 5, \qquad 3A - 5B + C = 2, \qquad 5A - 5C = 0.$$

Tato soustava má jediné řešení: $A = 3$, $B = 2$, $C = 3$. Hledaný rozklad tedy je:

$$\frac{5x^2 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 10x - 25} = \frac{3}{x-5} + \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5}\,.$$

IV.4.9. Postup integrace racionální funkce. Máme-li integrovat racionální funkci P/Q (kde stupeň polynomu Q je nejvýše tři), postupujeme takto:

a) Je-li stupeň polynomu P větší nebo roven stupni polynomu Q, pak částečným dělením upravíme racionální funkci P/Q na tvar $P_1 + P_2/Q$, kde P_1 a P_2 jsou polynomy, přičemž stupeň polynomu P_2 je menší než stupeň polynomu Q. Polynom P_1 integrovat umíme. Podíl P_2/Q můžeme integrovat způsobem, popsaným v následujícím bodě.

b) Je-li stupeň polynomu P menší než stupeň polynomu Q, pak racionální funkci P/Q rozložíme na součet parciálních zlomků, využijeme toho, že „integrál součtu je součet integrálů" a každý z parciálních zlomků integrujeme zvlášť. Integraci jednotlivých parciálních zlomků jsou věnovány odstavce IV.4.11 a IV.4.12.

IV.4.10. Poznámka. Je-li stupeň polynomu Q ve jmenovateli racionální funkce P/Q roven jedné a stupeň polynomu P je roven nule, je racionální funkce již sama o sobě parciálním zlomkem. Je-li stupeň P větší než nula, pak racionální funkci P/Q po částečném dělení převedeme na tvar $P_1 + P_2/Q$, kde P_1 je nějaký polynom a P_2 je polynom stupně nula, tj. je to konstantní funkce. Podíl P_2/Q již je parciálním zlomkem.

Případ, kdy stupeň polynomu Q je roven jedné je tedy poměrně jednoduchý a proto mu nevěnujeme větší pozornost.

IV.4.11. Integrace parciálních zlomků typu $A/(x-\alpha)^n$. Při výpočtu integrálů typu $\int A/(x-\alpha)^n \,\mathrm{d}x$ je možné použít substituci $x - \alpha = t$, tj. $x = t + \alpha$. Pomocí této substituce převedeme zmíněný integrál na integrál $\int A/t^n \, \mathrm{d}t$, který lze vyjádřit pomocí vzorce b) z odstavce IV.1.10 (pro $n \neq 1$) nebo pomocí vzorce k) z odstavce IV.1.10 (pro $n = 1$). Dosazením $t = x - \alpha$ do výsledku se vrátíme k proměnné x. Tímto způsobem získáme vyjádření integrálu $\int A/(x-\alpha)^n \, \mathrm{d}x$ na dvou intervalech: $(-\infty, \alpha)$ a $(\alpha, +\infty)$.

IV.4.12. Integrace parciálních zlomků typu $(Bx + C)/(x^2 + rx + s)$. Předpokládáme, že kvadratický polynom $x^2 + rx + s$ je v reálném oboru nerozložitelný (jinak by zlomek $(Bx + C)/(x^2 + rx + s)$ nebyl parciálním zlomkem). Připomeňme, že to poznáme například podle toho, že $D < 0$ (kde $D = r^2 - 4s$ je diskriminant polynomu $x^2 + rx + s$). Než se budeme zabývat integrálem obecné funkce $(Bx + C)/(x^2 + rx + s)$, ukážeme postup na konkrétním příkladu. Integrační konstantu zde budeme značit c, aby nedošlo k záměně s koeficientem C v obecném parciálním zlomku.

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 5} \, \mathrm{d}x \;=^{*)}\; \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 5} \, \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} \, \mathrm{d}x$$

$$=^{**)} \int \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int \frac{1}{(x^2 + 2x + 1) + 4} \, \mathrm{d}x = \ln|u| + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2 + 4}$$

$$= \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2 + 1} =^{***)} \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2 + 1}$$

$$= \ln|x^2 + 2x + 5| + \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg} v + c =$$

$$=^{+)} \ln(x^2 + 2x + 5) + \tfrac{1}{2} \operatorname{arctg}\left[\tfrac{1}{2}(x+1)\right] + c.$$

$^{*)}$ Výraz $2x + 3$ jsme rozložili na $2x + 2$ (což je derivace jmenovatele) plus 1.

$^{**)}$ Použili jsme substituci $x^2 + 2x + 5 = u$ a odtud plynoucí rovnost $(2x+2)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

$^{***)}$ Použili jsme substituci $\frac{1}{2}(x+1) = v$ a odtud plynoucí rovnost $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$.

$^{+)}$ Vynechali jsme absolutní hodnotu v logaritmu, protože $x^2 + 2x + 5 > 0$ pro všechna $x \in (-\infty, +\infty)$.

Parciální zlomek $(2x + 3)/(x^2 + 2x + 5)$ je funkcí spojitou v intervalu $(-\infty, +\infty)$, proto jeho primitivní funkce i neurčitý integrál existují rovněž na tomto intervalu. Na tomto intervalu je také platné nalezené vyjádření integrálu $\int (2x+3)/(x^2+2x+5) \, \mathrm{d}x$.

Vraťme se nyní k obecnému parciálnímu zlomku $(Bx + C)/(x^2 + rx + s)$. Tento zlomek lze rozložit:

$$\frac{Bx + C}{x^2 + rx + s} = R \, \frac{2x + r}{x^2 + rx + s} + S \, \frac{1}{x^2 + rx + s}.$$

R a S lze určit porovnáním koeficientů u stejných mocnin x, stejně jako například čísla A, B a C v odstavci IV.4.8. První ze zlomků vpravo má v čitateli derivaci jmenovatele a tudíž je

$$\int \frac{2x + r}{x^2 + rx + s} \, \mathrm{d}x = \ln|x^2 + rx + s| + c \qquad (\text{pro } x \in (-\infty, +\infty)).$$

(Návod: Použijte substituci $u = x^2 + rx + s$.) Druhý zlomek je možné integrovat způsobem, jaký již byl v tomto odstavci na konkrétním příkladu vysvětlen. Vyjde

$$\int \frac{dx}{x^2 + rx + s}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{-D}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x + r}{\sqrt{-D}} + c \qquad (\text{pro } x \in (-\infty, +\infty)\,).$$

(Připomínáme, že dle předpokladů je $D = r^2 - 4s < 0$.) Můžete si buď pamatovat postup integrace (ukázaný na konkrétním příkladu) nebo tento vzorec.

IV.4.13. Cvičení. Vypočítejte integrály a) $\displaystyle\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{2x + 1}\,\mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3 - 1}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \frac{5x - 4}{x^3 - x^2 - 2x}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky: a) $\frac{1}{6}\,x - \frac{7}{8}\,x^2 + \frac{7}{8}\,x + \frac{9}{16}\,\ln|2x+1| + c$ (pro $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ a $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$),

b) $\displaystyle\frac{1}{3}\,\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c$ (pro $x \in (-\infty, 1)$ a $x \in (1, +\infty)$),

c) $\displaystyle x + \frac{1}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + c$ (pro $x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, 1)$ a $x \in (1, +\infty)$),

d) $\displaystyle\ln\frac{x^2\,|x-2|}{|x+1|^3} + c$ (pro $x \in (-\infty, -1)$, $x \in (-1, 0)$, $x \in (0, 2)$ a $x \in (2, +\infty)$).

IV.5. Integrace funkcí typu $\sin^n x \cdot \cos^m x$

IV.5.1. Integrace funkcí $\sin^n x \cdot \cos^m x$ (případ, kdy alespoň jedno z čísel m, n je liché). Nechť m, n jsou celá čísla a alespoň jedno z nich je liché. Budeme dále předpokládat, že m je liché. (Kdyby bylo liché n, byl by postup analogický.) Liché číslo m lze vyjádřit ve tvaru $m = 2k + 1$, kde k je vhodné celé číslo. Funkci $\sin^n x \cdot \cos^m x$ lze upravit:

$$\sin^n x \cdot \cos^m x =$$

$$= \sin^n x \cdot \cos^{2k+1} x = \sin^n x \cdot (\cos^2 x)^k \cdot \cos x = \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x.$$

Integrál $\displaystyle\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,\mathrm{d}x$ lze tudíž počítat pomocí substituce $\sin x = t$:

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x\,\mathrm{d}x = \int \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int t^n \cdot (1 - t^2)^k\,\mathrm{d}t.$$

IV.5.2. Příklad. $\displaystyle\int \sin^2 x \cdot \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x =$

$$= \int \sin^2 x \cdot (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \cdot (1 - 2\,\sin^2 x + \sin^4 x) \cdot \cos x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \sin^2 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x \;-\; 2\int \sin^4 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x \;+\; \int \sin^6 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x \;=$$

$$=^{*)} \;\int t^2 \,\mathrm{d}t \;-\; 2\int t^4 \,\mathrm{d}t \;+\; \int t^6 \,\mathrm{d}t \;=\; \tfrac{1}{3}\,t^3 \;-\; \tfrac{2}{5}\,t^5 \;+\; \tfrac{1}{7}\,t^7 \;+\; C \;=$$

$$= \tfrac{1}{3}\,\sin^3 x \;-\; \tfrac{2}{5}\,\sin^5 x \;+\; \tfrac{1}{7}\,\sin^7 x \;+\; C \quad (\text{pro } \; x \in (-\infty, +\infty)\,)$$

$^{*)}$ Použili jsme substituci $\sin x = t$.

IV.5.3. Příklad. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \;=^{*)}$

$$= -\int \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{1}{(1-t)\,(1+t)}\,\mathrm{d}t \;=\; -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t \;-\; \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \;=$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\ln\,|1+t| \;-\; \tfrac{1}{2}\,\ln\,|1+t| \;+\; C \;=$$

$$= \tfrac{1}{2}\,\ln\,|1-\cos x| \;-\; \tfrac{1}{2}\,\ln\,|1+\cos x| \;+\; C \;=\; \tfrac{1}{2}\,\ln\left|\,\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,\right| \;+\; C$$

(pro $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$; k je libovolné celé číslo)

$^{*)}$ Použili jsme substituci $\cos x = t$.

IV.5.4. Integrace funkcí $\sin^n x \cdot \cos^m x$ (případ, kdy obě čísla m, n jsou sudá). Integrovanou funkci upravíme pomocí vzorců

$$\sin^2 x \;=\; \frac{1-\cos(2x)}{2}, \qquad \cos^2 x \;=\; \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Rovněž použijeme substituci $2x = t$. Tímto způsobem integrovanou funkci rozložíme na součet funkcí ,,typu IV.5.1" (tj. funkcí vyhovujících předpokladům z odstavce IV.5.1) a funkcí ,,typu IV.5.4" (tj. funkcí vyhovujících předpokladům z tohoto odstavce). Funkce ,,typu IV.5.1" již integrovat umíme. Funkce ,,typu IV.5.4" opět upravujeme podle stejných pravidel tak dlouho, až nám zbydou pouze funkce ,,typu IV.5.1".

IV.5.5. Příklad.

$$\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x \;=\; \int \Big(\frac{1-\cos(2x)}{2}\Big)^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1-2\,\cos(2x)-\cos^2(2x)}{4}\,\mathrm{d}x \;=$$

$$=^{*)} \;\int \frac{1-2\,\cos\,t-\cos^2 t}{8}\,\mathrm{d}t \;=\; \int \tfrac{1}{8}\,\mathrm{d}t \;-\; \int \tfrac{1}{4}\,\cos\,t\,\mathrm{d}t \;+\; \int \tfrac{1}{8}\,\cos^2 t\,\mathrm{d}t \;=$$

$$= \tfrac{1}{8}\,t \;-\; \tfrac{1}{4}\,\sin\,t \;+\; \tfrac{1}{8}\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t \;=^{**)}\; \tfrac{1}{8}\,t \;-\; \tfrac{1}{4}\,\sin\,t \;+\; \tfrac{1}{8}\int \frac{1+\cos\,u}{4}\,\mathrm{d}u \;=$$

$$= \tfrac{1}{8}\,t - \tfrac{1}{4}\,\sin\,t + \tfrac{1}{32}\,u + \tfrac{1}{32}\,\sin\,u + C = \tfrac{1}{8}\,t - \tfrac{1}{4}\,\sin\,t + \tfrac{1}{16}\,t + \tfrac{1}{32}\,\sin(2t) + C =$$

$$= \tfrac{3}{8}\,x \;-\; \tfrac{1}{4}\,\sin(2x) \;+\; \tfrac{1}{32}\,\sin(4x) \;+\; C \qquad (\text{pro } x \in \mathbb{R}).$$

*) Použili jsme substituci $t = 2x$.

**) Použili jsme substituci $u = 2t$.

IV.5.6. Cvičení. Vypočítejte integrály

a) $\displaystyle\int \sin^7 x \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \cos^6 x \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky: a) $-\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$) (pro $x \in (-\infty, +\infty)$),
b) $\frac{5}{16}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{3}{64}\sin(4x) - \frac{1}{48}\sin^3 x + C$ (pro $x \in (-\infty, +\infty)$),
c) $\displaystyle -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C$ (pro $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$; k je libovolné celé číslo).

IV.6. Integrace některých dalších typů funkcí

IV.6.1. Racionální funkce dvou proměnných. V této kapitole několikrát použijeme symbol $R(u, v)$. Budeme jím rozumět tzv. *racionální funkci dvou proměnných* u a v, což je podíl dvou polynomů $P(u, v)$ a $Q(u, v)$.

S funkcemi více proměnných se podrobněji seznámíte ve druhém semestru v předmětu Matematika II. Zde se spokojíme pouze s konstatováním, že polynom dvou proměnných u a v je součet konečně mnoha členů tvaru $k \cdot u^m \cdot v^n$, kde k je reálná konstanta a m, n jsou celá nezáporná čísla.

Příklady racionálních funkcí dvou proměnných:

$$R(u, v) = \frac{2u + v^2 + 2}{u - 1}, \qquad R(u, v) = \frac{1}{2 + u}, \qquad R(u, v) = \frac{u - v}{u^2 + v^2}.$$

***IV.6.2. Integrály typu** $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$**.** Integrály tohoto typu lze převést pomocí substituce

$$t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \tag{IV.6.1}$$

na integrály racionálních funkcí. Vysvětleme to podrobněji. Použitím známých vzorců pro goniometrické funkce dostáváme:

$$\cos^2(x/2) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}, \qquad \sin^2(x/2) = 1 - \cos^2(x/2) = \frac{\operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)},$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = 2\sin(x/2) \cdot \cos(x/2) = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

„Diferencováním" rovnice $\operatorname{tg}(x/2) = t$ dále obdržíme:

$$\frac{1}{2\cos^2(x/2)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \qquad \text{tj. } \tfrac{1}{2}\left[1 + \operatorname{tg}^2(x/2)\right]\mathrm{d}x = \mathrm{d}t.$$

Odtud plyne: $\quad \mathrm{d}x \;=\; \dfrac{2}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)}\,\mathrm{d}t \;=\; \dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Dosadíme-li nyní za $\sin x$, $\cos x$ a $\mathrm{d}x$ výše odvozené výrazy do integrálu $\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, obdržíme integrál racionální funkce (proměnné t). Takové integrály jsou počítány v kapitole IV.4 v tomto textu.

Substituci (IV.6.1) je možné použít pouze na takovém intervalu, kde je funkce $\mathrm{tg}\,(x/2)$ definovaná, tj. na každém intervalu $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$, kde k je celé číslo. (Někdy počítáme integrál ještě na menším intervalu, závisí to na tom, jak konkrétně vypadá integrovaná funkce.)

***IV.6.3. Příklad.** $\displaystyle\int \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{1-2t/(1+t^2)}{1+(1-t^2)/(1+t^2)}\,\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

$$= \int \frac{1-2t+t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; \int \Big[1 - \frac{2\,t}{1+t^2}\Big]\,\mathrm{d}t \;=\; t - \ln(1+t^2) + C \;=$$

$$= \mathrm{tg}\,(x/2) - \ln\left[1+\mathrm{tg}^2(x/2)\right] + C.$$

Integrovaná funkce je spojitá na každém z intervalů $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$, kde k je celé číslo. Na každém z těchto intervalů tedy existuje primitivní funkce i neurčitý integrál. Tyto intervaly jsou totožné s těmi, na kterých lze použít substituci (IV.6.1). Nalezené vyjádření integrálu je tedy platné na každém z intervalů $(-\pi+2k\pi, \pi+2k\pi)$.

IV.6.4. Poznámka. Před výpočtem každého ne zcela triviálního integrálu stojí za to se na chvilku zamyslet nad tím, jakou metodu pro výpočet zvolit. Například integrál

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

můžeme počítat pomocí substituce (IV.6.1), přitom ale existuje i možnost podstatně jednodušší. Přijdete sami na to jaká?

IV.6.5. Integrály typu $\displaystyle\int R\Big(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\Big)\,\mathrm{d}x$**.** Předpokládejme, že $ad-bc\neq 0$. (Tato nerovnost zaručuje, že polynomy $ax+b$ a $cx+d$ ve zlomku pod odmocninou nejsou soudělné a že tedy po příslušném zkrácení nejsou například rovny nějaké konstantní funkci.) Je možné použít substituci

$$t \;=\; \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}. \qquad \text{(IV.6.2)}$$

Odtud můžeme vyjádřit x a $\mathrm{d}x$. Po dosazení do počítaného integrálu získáme integrál racionální funkce (proměnné t). Konkrétní postup je ukázán v příkladu IV.6.6. Substituci (IV.6.2) můžeme použít na každém intervalu, který je částí definičního oboru integrované funkce. Mimo jiné na tomto intervalu musí platit: $(ax+b)/(cx+d)\geq 0$.

Integrál $\int R(x, \sqrt{ax+b})\,\mathrm{d}x$ je speciálním případem výše uvedeného integrálu. (Odpovídá hodnotám $c=0$, $d=1$.) Při jeho výpočtu je tedy možné použít substituci $t=\sqrt{ax+b}$.

IV.6.6. Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\;\mathrm{d}x.$

Výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Řešením nerovnice $(1-x)/(1+x) \geq 0$ dostaneme podmínku: $x \in (-1, 1\rangle$. V integrálu se ale kromě toho vyskytuje funkce $1/x$, z čehož vyplývá další podmínka: $x \neq 0$. Integrovaná funkce je tedy definovaná v intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 1\rangle$. V každém z těchto intervalů je integrovaná funkce spojitá, proto v každém z nich existuje primitivní funkce i neurčitý integrál. Pomocí substituce

$$t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \text{tj.} \quad x = -\frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad \mathrm{d}x = -\Big(\frac{t^2-1}{t^2+1}\Big)'\,\mathrm{d}t = -\frac{4\,t}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

dostáváme:

$$\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\;\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{t^2+1}{t^2-1}\,t\,\frac{4\,t}{(t^2+1)^2}\;\mathrm{d}t \;=$$

$$= \int \frac{4\,t^2\;\mathrm{d}t}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} \;=\; \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \;=$$

$$= \ln\Big|\frac{t-1}{t+1}\Big| + 2\,\mathrm{arctg}\,t + C \;=\; \ln\Big|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\Big| + 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

(pro $x \in (-1, 0)$ nebo pro $x \in (0, 1\rangle$). Racionální funkce proměnné t, kterou jsme po použití substituce obdrželi, má dokonce polynom stupně čtyři ve jmenovateli, takže přesahuje rámec výkladu z kapitoly IV.4. Nicméně, její rozklad je zcela analogický:

$$\frac{4\,t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} \;=\; \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{C_1 t + C_2}{t^2+1}.$$

Koeficienty A, B, C_1 a C_2 je možné určit například stejnou metodou, jako čísla A, B a C v odstavci IV.4.8. Obdržíme: $A = 1$, $B = -1$, $C_1 = 0$, $C_2 = 2$.

*__IV.6.7. Integrály typu__ $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\;\mathrm{d}x$**.** Budeme předpokládat, že $a \neq 0$, jinak by integrál byl speciálním případem integrálu řešeného v odstavci IV.6.4. Budeme rozlišovat dva případy:

a) $\underline{a < 0}$ Aby byl výraz pod odmocninou na nějakém intervalu nezáporný, je třeba, aby kvadratický polynom ax^2+bx+c měl dva různé reálné kořeny α, β. Zvolme označení kořenů tak, že $\alpha < \beta$. Pak $ax^2+bx+c > 0$ pro $x \in (\alpha, \beta)$. Pro tato x pak můžeme psát:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \;=\; \sqrt{a\,(x-\alpha)(x-\beta)} \;=$$
$$=\; \sqrt{-a\,(x-\alpha)(\beta-x)} \;=\; \sqrt{-a}\;(x-\alpha)\,\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}.$$

Integrál této funkce je ale integrálem typu, kterému je věnován odstavec IV.6.5. Pomocí substituce (IV.6.2), tj.

$$t \;=\; \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

lze tento integrál převést na integrál racionální funkce.

b) $\underline{a > 0}$ V tomto případě můžeme použít tzv. Eulerovu substituci

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \;=\; t + \sqrt{a}\,x. \tag{IV.6.3}$$

Umocníme-li obě strany rovnosti (IV.6.3) na druhou, můžeme vyjádřit x a $\mathrm{d}x$. Počítaný integrál tímto způsobem převedeme na integrál racionální funkce (proměnné t). Konkrétní postup je ukázán v příkladu IV.6.8. Substituci (IV.6.3) můžeme použít na každém intervalu, který je částí definičního oboru integrované funkce. Mimo jiné na tomto intervalu musí platit: $ax^2 + bx + c \geq 0$.

***IV.6.8. Příklad.** Vypočítejme $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}}\,\mathrm{d}x.$

Protože výraz x^2+2x-1 se vyskytuje pod odmocninou a ještě k tomu ve jmenovateli, musí v definičním oboru integrované funkce být $x^2+2x-1 > 0$. Kromě toho se v integrované funkci ještě ve jmenovateli vyskytuje x. Odtud plyne další podmínka: $x \neq 0$. Snadno zjistíme, že maximální intervaly, na kterých jsou obě podmínky splněny, jsou: $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ a $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$. Na každém z těchto intervalů je integrovaná funkce spojitá, proto na každém z nich existuje primitivní funkce i neurčitý integrál.

Použijeme substituci $\sqrt{x^2+2x-1} \;=\; x + t$. Jejím umocněním na druhou a následným výpočtem zjistíme, že

$$x \;=\; \frac{t^2+1}{2\,(1-t)}, \qquad \mathrm{d}x \;=\; \frac{-t^2+2t+1}{2\,(1-t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dosazením do počítaného integrálu dostáváme:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+2x-1}}\,\mathrm{d}x \;=\; \int \frac{2\,(1-t)}{t^2+1}\,\frac{1}{\dfrac{t^2+1}{2\,(1-t)}+t}\,\frac{-t^2+2t+1}{2\,(1-t)^2}\,\mathrm{d}t \;=$$

$$=\; \int \frac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \;=\; 2\operatorname{arctg} t \,+\, C \;=\; 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right) \,+\, C$$

(pro $x \in (-\infty, -1-\sqrt{2})$ nebo $x \in (-1-\sqrt{2}, +\infty)$).

*IV.7. Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými

Diferenciální rovnicí obecně nazýváme rovnici, ve které neznámou je funkce a v rovnici se vyskytuje derivace neznámé funkce. (Mohou to být i derivace vyšších řádů.) Nauka o diferenciálních rovnicích tvoří rozsáhlou a samostatnou část matematiky s velkým množstvím aplikací v technických oborech, ve fyzice, v chemii a dalších vědních disciplinách. Zde se seznámíme s nejjednodušším typem diferenciální rovnice, který je možné řešit tzv. ,,metodou separace proměnných". Protože podstatnou součástí metody je integrování, uvádíme ji jako část kapitoly IV o neurčitých integrálech a chápeme ji jako ilustrativní příklad aplikací teorie neurčitých integrálů.

Více se o diferenciálních rovnicích dozvíte v předmětu Matematika III ve třetím semestru studia.

IV.7.1. Diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými. Diferenciální rovnici tvaru

$$y' \;=\; g(x)\cdot h(y), \tag{IV.7.1}$$

(případně diferenciální rovnici, kterou lze na tento tvar převést pomocí algebraických úprav) nazýváme *diferenciální rovnicí se separovatelnými proměnnými*. Neznámou v diferenciální rovnici (IV.7.1) je funkce y proměnné x.

IV.7.2. Pojem řešení. *Řešením* diferenciální rovnice (IV.7.1) na intervalu I nazýváme funkci $y(x)$, která rovnici (IV.7.1) ve všech bodech $x \in I$ vyhovuje. (V koncových bodech intervalu I, pokud tyto body do intervalu I patří, přitom derivaci $y'(x)$ chápeme jako jednostrannou derivaci.)

IV.7.3. Příklad. Funkce $y(x) = 2\sqrt{x-1}$ je řešením diferenciální rovnice $y' = 2/y$ v intervalu $(1, +\infty)$. (Toto lze ověřit výpočtem y' a dosazením za y' a y do diferenciální rovnice.)

IV.7.4. Konstantní řešení diferenciální rovnice (IV.7.1). Nechť y^* je bod, ve kterém je $h(y^*) = 0$. Nechť I je interval, obsažený v $D(g)$. Dosazením do rovnice (IV.7.1) zjistíme, že konstantní funkce definovaná rovnicí $y(x) = y^*$ pro všechna $x \in I$ je řešením rovnice (IV.7.1) na intervalu I. Nalezení nulových bodů funkce $h(y)$ tedy vede k nalezení konstantních řešení rovnice (IV.7.1).

IV.7.5. Metoda separace proměnných. V tomto odstavci ukážeme, jak můžeme vypočítat další řešení diferenciální rovnice (IV.7.1).

Budeme předpokládat, že $g(x)$ je spojitá funkce v intervalu $\mathcal{I}$ a $h(y)$ je spojitá funkce v intervalu $\mathcal{J}$, přičemž interval $\mathcal{J}$ je zvolen tak, že funkce $h(y)$ v něm žádné nulové body nemá, tj. že $h(y) \neq 0$ pro všechna $y \in \mathcal{J}$. Rovnici (IV.7.1) tudíž můžeme dělit výrazem $h(y)$. Kromě toho zapíšeme derivaci y' jako podíl $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ a rovnici (IV.7.1) násobíme výrazem $\mathrm{d}x$. Obdržíme:

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)} \;=\; g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Levá strana vzniklé rovnice závisí pouze na y a pravá strana závisí pouze na x. Proměnné jsme tedy oddělili, neboli separovali. Tento fakt dal název metodě řešení, kterou právě vysvětlujeme: *metoda separace proměnných*. Před levou i pravou stranu nyní připíšeme znak integrálu a vzniklé neurčité integrály vypočítáme. Integrační konstanty vzniklé na obou stranách můžeme sdružit do jedné a připisovat ji pouze na pravé straně. Získáme rovnici, ve které se již vyskytuje pouze samotná funkce y a nikoliv její derivace. Z této rovnice nakonec y vyjádříme. (Poslední krok je někdy obtížný nebo dokonce nemožný. V takovém případě se spokojíme s ,,implicitním vyjádřením” řešení y rovnicí, kterou obdržíme po výpočtu obou integrálů.)

Výše uvedený postup není z formálního hlediska zcela korektní, protože při něm rozdělujeme ,,nedělitelný” symbol $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ označující derivaci funkce y, zacházíme s ním jako se zlomkem a rovnici (IV.7.1) násobíme ,,pomocným” výrazem $\mathrm{d}x$. Tento postup je však snadno zapamatovatelný a vede ke správným výsledkům.

IV.7.6. Příklad. Řešme diferenciální rovnici $y' = 5xy$.

Pravá strana je součinem funkce $g(x) = 5x$ a funkce $h(y) = y$. Obě funkce jsou spojité v $(-\infty, +\infty)$. Řešením rovnice $h(y) = 0$ získáme jediný nulový bod funkce $h(y)$: $y^* = 0$. Diferenciální rovnice $y' = 5xy$ má proto jediné konstantní řešení: $y(x) = 0$, definované v intervalu $I = (-\infty, +\infty)$.

Další řešení hledáme metodou separace proměnných. V diferenciální rovnici zapíšeme derivaci y' ve tvaru $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ a rovnici násobíme výrazem $\mathrm{d}x$. Dále rovnici dělíme y, čímž získáme rovnici se separovanými proměnnými. Poté připíšeme znak integrálu. Postupně tak dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5xy, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{y} = 5x\,\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 5x\,\mathrm{d}x.$$

Výpočtem neurčitého integrálu na levé i pravé straně obdržíme: $\ln|y| = \frac{5}{2}x^2 + C$. Pišme C ve tvaru $\ln|K|$, kde $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. Poslední rovnici pak můžeme upravit:

$$|y| = \exp\left(\tfrac{5}{2}x^2 + \ln|K|\right) = \left|K \cdot \exp(\tfrac{5}{2}x^2)\right|.$$

Odtud plyne: $y = \pm K\cdot\exp\left(\frac{5}{2}x^2\right)$. Protože však K může nabývat hodnot jak kladných, tak i záporných, lze symbol $\pm$ vynechat.

Vyjádření řešení ve tvaru $y = K \cdot \exp\left(\frac{5}{2}x^2\right)$ jsme získali pro $K \neq 0$. Dosazením $K = 0$ však dostáváme již dříve nalezené nulové řešení. Vidíme, že podmínka $K \neq 0$ byla svázána pouze s postupem, kterým jsme řešení hledali a v konečném zápisu řešení není nutná. Řešení diferenciální rovnice v intervalu $(-\infty, +\infty)$ má tedy tvar:

$$y = K \cdot \exp\left(\tfrac{5}{2}x^2\right), \tag{IV.7.2}$$

kde K ,,probíhá” množinu všech reálných čísel.

Vyjádření (IV.7.2) se nazývá *obecné řešení* diferenciální rovnice $y' = 5xy$. Na rozdíl od obecného řešení, jakékoliv konkrétní řešení se nazývá *partikulární řešení*.

Například, funkce $y = 2\exp\left(\frac{5}{2}x^2\right)$ je partikulárním řešením diferenciální rovnice $y' = 5xy$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Toto partikulární řešení obdržíme z obecného řešení konkrétní volbou konstanty: $K = 2$.

IV.7.7. Počáteční podmínka, Cauchyova úloha. Při užití diferenciálních rovnic k řešení problémů z jiných vědních oborů většinou nehledáme obecné řešení, které ve skutečnosti zahrnuje nekonečně mnoho různých partikulárních řešení. Častěji nás zajímá nějaké konkrétní partikulární řešení. Takové řešení lze získat přidáním vhodné doplňující podmínky. Nejjednodušší možností je předepsat hodnotu y_0, které má hledané řešení nabývat ve zvoleném bodě x_0. Řešená úloha pak sestává z diferenciální rovnice a podmínky $y(x_0) = y_0$:

$$\text{(IV.7.3)} \qquad y' = g(x) \cdot h(y); \qquad y(x_0) = y_0.$$

Podmínce $y(x_0) = y_0$ se říká *počáteční podmínka.* Důvodem je tato skutečnost: Pomocí diferenciálních rovnic můžeme popisovat procesy probíhající v čase a nezávisle proměnná x zde pak má fyzikální význam času. Často řešíme problémy tohoto typu: *Zjistěte, jak bude probíhat proces popsaný diferenciální rovnicí (IV.7.1) v časech* $x > x_0$, *je-li znám stav v „počátečním" časovém okamžiku* x_0. Samozřejmě, můžeme se ptát i na to, co stavu v časovém okamžiku x_0 předcházelo, tj. může nás zajímat jak proces probíhal v časech $x < x_0$, ale úlohy tohoto druhu již nejsou (nebo spíše nebyly v minulosti, kdy vznikala terminologie) tak časté.

Úlohu (IV.7.3) (tj. úlohu nalézt řešení diferenciální rovnice (IV.7.1), které vyhovuje počáteční podmínce $y(x_0) = y_0$), nazýváme *Cauchyovou úlohou*.

IV.7.8. Příklad. Najdeme řešení Cauchyovy úlohy dané diferenciální rovnicí $y' = 5xy$ a počáteční podmínkou $y(1) = 2$.

Jedná se o stejnou diferenciální rovnici, kterou jsme řešili v Příkladu IV.7.6. Nalezené obecné řešení je dáno vzorcem (IV.7.2). Dosadíme-li na levou stranu požadovanou hodnotu $y = 2$ a na pravou stranu $x = 1$ (neboť hodnoty $y = 2$ má hledané řešení nabývat v bodě $x = 1$), dostaneme:

$$2 = K \cdot \exp\left(\tfrac{5}{2}\, 1^2\right) = K \cdot \exp \tfrac{5}{2}.$$

Odtud vyjádříme $K = 2\exp\left(-\frac{5}{2}\right)$. Zpětným dosazením do vzorce (IV.7.2) dostáváme hledané partikulární řešení:

$$y = 2\exp \tfrac{5}{2}(x^2 - 1).$$

Definičním oborem tohoto řešení je interval $(-\infty, +\infty)$.

IV.7.9. Poznámka. Diferenciální rovnice které máme řešit, bývají zřídka zapsané již ve tvaru (IV.7.1). Například rovnice $xy' - y = 0$ tento tvar nemá, i když ji na tvar (IV.7.1) snadno upravíme převedením y na pravou stranu a dělením x. Tak dostaneme rovnici $y' = y/x$.

Řešíme-li rovnici $y' = y/x$ separací proměnných, obdržíme toto obecné vyjádření maximálních řešení: $y = K \cdot x$ pro $x \in (-\infty, 0)$ nebo pro $x \in (0, +\infty)$ $(K \in \mathbb{R})$. Bod $x = 0$ je třeba vynechat, protože ve jmenovateli zlomku na pravé straně rovnice nula být nesmí.

Vraťme se znovu k původní rovnici $xy' - y = 0$. Zde není důvod bod $x = 0$ z definičního oboru řešení vylučovat, proto obecné vyjádření maximálních řešení je $y = K \cdot x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$ $(K \in \mathbb{R})$.

Z uvedeného příkladu plyne toto poučení: Není-li diferenciální rovnice, kterou řešíte, zadána ve tvaru (IV.7.1) a převádíte-li ji na tento tvar pomocí algebraických úprav, dávejte pozor na definiční obor nalezených řešení.

IV.7.10. Příklad – pohyb tělesa v prostředí, kladoucím odpor. Těleso hmotnosti m se pohybuje přímočaře. Odpor prostředí je úměrný velikosti rychlosti, koeficient úměrnosti je k. Na těleso působí ve směru pohybu konstantní síla f. Rychlost v čase $t = 0$ je v_0. Jaká je za uvedených předpokladů rychlost $v(t)$ pohybu tělesa v čase t?

Řešení: Označme $a(t)$ zrychlení tělesa. Podle druhého Newtonova zákona je

$$m\,a(t) \;=\; F(t), \tag{IV.7.4}$$

kde $F(t)$ je celková síla, která působí na těleso ve směru pohybu. Pro tuto sílu platí: $F(t) = f - k\,v(t)$. (U členu $k\,v(t)$ je záporné znaménko, protože odpor, například tření, působí proti směru pohybu.)

Z kapitoly III.5 víme, že rychlost $v(t)$ je derivací polohové funkce $s(t)$. Podobně, zrychlení $a(t)$ pohybu lze definovat jako derivaci rychlosti $v(t)$. Budeme-li derivaci podle času značit, jak je ve fyzice obvyklé, tečkou, můžeme psát: $a(t) = \dot v(t)$. Dosadíme-li toto i vyjádření síly $F(t)$ do rovnice (IV.7.4), dostaneme diferenciální rovnici

$$m\,\dot v(t) \;=\; f - k\,v(t). \tag{IV.7.5}$$

Toto je diferenciální rovnice se separovatelnými proměnnými. Její obecné řešení má tvar

$$v(t) \;=\; \frac{f}{k} \;-\; \frac{C}{k}\,\mathrm{e}^{-kt/m}. \tag{IV.7.6}$$

(Separujte proměnné v rovnici (IV.7.6) a integrováním se sami přesvědčte o tom, že tomu tak je.) Nyní dosadíme do obecného řešení (IV.7.6) konkrétní hodnoty $t = 0$ a $v(0) = v_0$. Obdržíme rovnici, ze které vypočítáme C: $C = f - kv_0$. Dosadíme-li toto C zpět do obecného řešení (IV.7.6), získáme hledané partikulární řešení:

$$v(t) = \frac{f}{k} \;+\; \left(v_0 - \frac{f}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt/m}.$$

IV.7.11. Poznámka. Někdy se stane, že pravá strana diferenciální rovnice (IV.7.1) nezávisí na y a rovnice má tvar $y' = g(x)$. Řešení takové diferenciální rovnice jednoduše získáme integrováním funkce g. Obecné řešení diferenciální rovnice je totožné s neurčitým integrálem $\int g(x)\,\mathrm{d}x$. (Viz příklad d) v následujícím odstavci.)

IV.7.13. Cvičení. Najděte řešení Cauchyových úloh

a) $x^2y' + y^2 = 0,\ \ y(-1) = 1;$ b) $2y'\sqrt{x} = y,\ \ y(4) = 1;$
c) $y' = (2y+1)\operatorname{cotg} x,\ \ y(\pi/4) = \frac{1}{2};$ d) $y' = x^2 + 3\,\sin^5 x\,\cos x,\ \ y(0) = 2.$

Výsledky: a) $y = -x$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$

b) $y = \exp\left(\sqrt{x} - 2\right)$ pro $x \in (0, +\infty)$

c) $y = 2\,\sin^2 x - \frac{1}{2}$ pro $x \in (0, \pi)$

d) $y = \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,\sin^6 x + 2$ pro $x \in (-\infty, +\infty)$. (V zadané rovnici jsou proměnné již separovány. K nalezení řešení tedy nepotřebujete nic jiného, než umět integrovat.)

V. Určitý (Riemannův) integrál

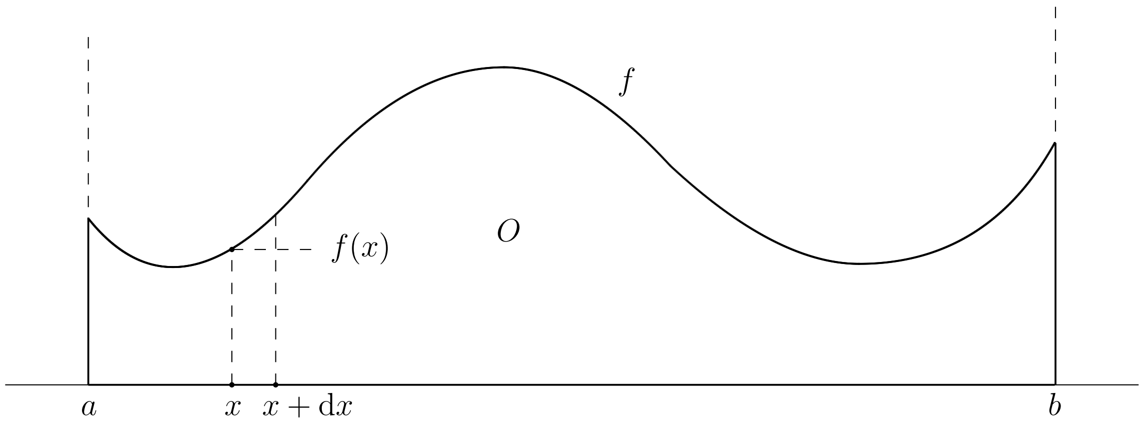
V.1. Historický přístup

V.1.1. Motivace, úvod. Představte si, že f je spojitá, nezáporná funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Chceme vyjádřit obsah obrazce O, omezeného grafem funkce f, osou x, přímkou $x = a$ a přímkou $x = b$. (Viz obr. 39.)

Je-li funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná, konstantní a její hodnotou je v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ číslo h, je problém jednoduchý: Obrazec O je obdélníkem, jehož strany mají délky $b - a$ a h. Obsah takového obdélníku je $p(O) = (b - a) \cdot h$.

Podobně, je-li funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná a lineární (tj. $f: \ y = kx + q$), je problém rovněž jednoduchý: Obrazec O je lichoběžníkem se základnou délky $b - a$ a boční strany mají délky $ka + q$ a $kb + q$. Načrtněte si obrázek a vypočítejte sami, čemu se rovná obsah obrazce O.

V.1.2. Historické zavedení určitého integrálu. V obecném případě je situace složitější a k jejímu řešení přispěli v 17. století zejména Isaac Newton (1642–1727) a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Základem byla tato představa: Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na nekonečně mnoho ,,nekonečně krátkých" úseků. Typický úsek má krajní body x a $x + \mathrm{d}x$, kde $x \in \langle a, b)$ a $\mathrm{d}x$ je ,,nekonečně malé", kladné, číslo. Obrazec, sevřený shora grafem funkce f na intervalu $\langle x, x + \mathrm{d}x\rangle$ a zdola úsečkou kterou tento interval vytíná na ose x, je ,,nekonečně úzký" a proto lze na něm funkci f považovat za konstantní (mající hodnotu $f(x)$). Obrazec je tedy ,,nekonečně úzkým" obdélníkem se stranami délky $\mathrm{d}x$ a $f(x)$. Jeho obsahem je číslo $\mathrm{d}p = f(x)\,\mathrm{d}x$.



Obr. 39

Obsah celého obrazce O získáme sečtením nekonečně mnoha ,,nekonečně malých" čísel $\mathrm{d}p$. Součet se zprvu označoval písmenem S, později se však toto písmeno protáhlo a bylo nahrazeno znakem integrálu $\int$. Obsah obrazce O se zapisuje:

$$p(O) = \int_a^b \mathrm{d}p = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{V.1.1}$$

Výraz na pravé straně se nazývá <u>*určitý integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$*</u> a číslům a a b se říká <u>*meze integrálu*</u>: a je <u>*dolní mez*</u> a b je <u>*horní mez*</u>.

Ze střední školy znáte vzorce pro výpočet obsahů čtverce, obdélníku, lichoběžníku, rovnoběžníku, kruhu, atd. Pro obsah obecného obrazce O uvažovaného typu (viz obr. 39) však žádný obdobný, jednoduchý, vzorec neexistuje. Proto je třeba formuli (V.1.1) rozumět tak, že touto formulí obsah obrazce O <u>definujeme</u> a nikoliv pouze sdělujeme jak vypočítat něco, co jsme již definovali jinak.

Určitý integrál má smysl i pro funkce f, které v některých (nebo ve všech) bodech nabývají záporných hodnot. Na těch úsecích, kde je funkce f záporná, však určitý integrál vyjadřuje obsah obrazce mezi grafem funkce f a osou x, se záporným znaménkem.

V.1.3. Poznámka k fyzikálnímu významu určitého integrálu. K určitému integrálu lze dospět i při řešení tohoto fyzikálního problému: Představme si, že hmotná tyč je umístěna na ose x v intervalu $\langle a, b\rangle$. Hmota je na tyči rozložena s délkovou hustotou ρ. (Délková hustota vyjadřuje hmotnost, vztaženou k jednotce délky tyče. Její jednotkou je $\mathrm{kg\,m^{-1}}$.) Tato hustota se může podél tyče měnit – například proto, že se mění průřez tyče, nebo proto, že se mění materiál ze kterého je tyč vyrobena. ρ je tedy funkcí definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$. Chceme vyjádřit celkovou hmotnost tyče.

Provedeme stejnou úvahu, jako v odstavci V.1.2. Rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na nekonečně mnoho ,,nekonečně malých" úseků. Jedním, typickým, úsekem je interval s krajními body x a $x + \mathrm{d}x$. Protože je ,,nekonečně krátký", lze na něm hustotu ρ považovat za konstantu rovnou $\rho(x)$. Hmotnost uvažovaného úseku tyče je pak $\mathrm{d}m = \rho(x)\,\mathrm{d}x$. Celkovou hmotnost tyče obdržíme sečtením všech hmotností $\mathrm{d}m$ všech uvažovaných úseků délky $\mathrm{d}x$:

$$m = \int_a^b \mathrm{d}m = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x. \tag{V.1.2}$$

V.1.4. Poznámka k zavedení a definicím určitého integrálu. Sami vidíte, že výše uvedené zavedení určitého integrálu je z dnešního pohledu <u>nepřesné</u> a <u>nejasné</u>. Zejména proto, že se opírá o pojem ,,nekonečně malého", přitom však kladného, čísla $\mathrm{d}x$. Takové číslo však neexistuje. (Kdyby existovalo, jakou by mohlo mít hodnotu? Například $\mathrm{d}x = 10^{-2}$? To ne, protože 10^{-3} je také kladné číslo a přitom menší, než 10^{-2}. Nebo $\mathrm{d}x = 10^{-6}$? To také ne, protože 10^{-7} je ještě menší. Nekonečně malé a zároveň kladné číslo prostě nenajdete.) Dalším důvodem, proč toto zavedení určitého integrálu nelze považovat za přesné, je naprostá nejasnost toho, co se vlastně míní ,,součtem nekonečně mnoha nekonečně malých čísel".

Aby měl určitý integrál rozumný smysl, je třeba

a) *jej přesně definovat,*

b) *ukázat, jaké má vlastnosti (tj. například vymezit třídu funkcí, pro které jeho definice má smysl – jinými slovy: pro které integrál existuje),*

c) *a v neposlední řadě také ukázat, jak je možné hodnotu integrálu vypočítat.*

Řešení těchto problémů paradoxně probíhalo od konce. Byli to opět Newton a Leibniz, kteří si všimli, že výpočet obsahu obrazce mezi grafem funkce f a osou x je vlastně

,,opačným" problémem k derivování. Newton a Leibniz dospěli nezávisle na sobě ke vzorci, který dnes nazýváme ,,Newtonovou–Leibnizovou formulí" a který dává návod, jak určitý integrál vypočítat:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) - F(a). \tag{V.1.3}$$

(F je libovolná primitivní funkce k funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$.) K tomuto vzorci a jeho užití při výpočtu určitého integrálu se znovu vrátíme v kapitole V.4.

S intuitivním zavedením určitého integrálu, vysvětleným v odstavci V.1.2, matematika vystačila poměrně dlouho. Rostoucí význam integrálního počtu a množství aplikací ve fyzice a dalších oborech si však vyžádaly korektní a přesné vymezení (definici) určitého integrálu. Takových definic se v průběhu minulých století objevilo několik. Zmiňme se o třech z nich.

První definice pochází od Newtona: Newton vzal za základ formuli (V.1.3) a navrhl, aby za určitý integrál funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ byl považován rozdíl $F(b) - F(a)$, kde F je primitivní funkce k f na $\langle a, b\rangle$. Tato definice však poněkud odsouvá do pozadí původní geometrické a fyzikální problémy, které k zavedení určitého integrálu vedly.

Další, velmi úspěšnou definici, podal v 19. století George Riemann (1822–1866). S touto definicí se seznámíme v kapitole V.2. Určitý integrál, definovaný způsobem navrženým Riemannem, se též nazývá *Riemannův integrál*. V těchto skriptech se budeme zabývat výhradně tímto integrálem.

V aplikované matematice se dnes často používá tzv. Lebesgueův určitý integrál. Tento integrál představuje zobecnění Riemannova integrálu. Jeho teorie ale vyžaduje delší výklad a přesahuje rámec těchto skript.

I když jsme vysvětlili, že představa o nekonečně malém kladném čísle dx neodpovídá našemu pojetí reálných čísel, nebudeme tuto představu zcela opouštět. Naopak. Podobně, jako jsme tuto představu v odstavci V.1.3 použili k odvození vzorce pro vyjádření hmotnosti nehomogenní tyče, je možné ji využít dále a poměrně jednoduše získat mnoho dalších vzorců – například pro vyjádření délky křivky která je grafem funkce $y = f(x)$, pro výpočet polohy těžiště, statického momentu a momentu setrvačnosti hmotné křivky, atd. Těmto aplikacím určitého integrálu je věnována kapitola V.7.

V.2. Definice Riemannova integrálu

Předpokládejme, že

a) $\langle a, b\rangle$ je uzavřený, omezený a neprázdný interval,

b) f je omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Jak uvidíte, definice Riemannova integrálu funkce f na $\langle a, b\rangle$ je založena na rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ na mnoho menších sub–intervalů, na konstrukci Riemannova součtu který je aproximací obsahu obrazce O omezeného grafem funkce f, osou x, přímkou $x = a$ a přímkou $x = b$ a na úvaze o limitě tohoto součtu při nekonečném zjemňování dělení intervalu $\langle a, b\rangle$.

V.2.1. Dělení intervalu. Nechť $\langle a, b\rangle$ je omezený uzavřený interval. Systém bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n$ v $\langle a, b\rangle$ takových, že $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ se nazývá *dělení* intervalu $\langle a, b\rangle$. Nazveme-li toto dělení D, pak píšeme:

$$D: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{V.2.1}$$

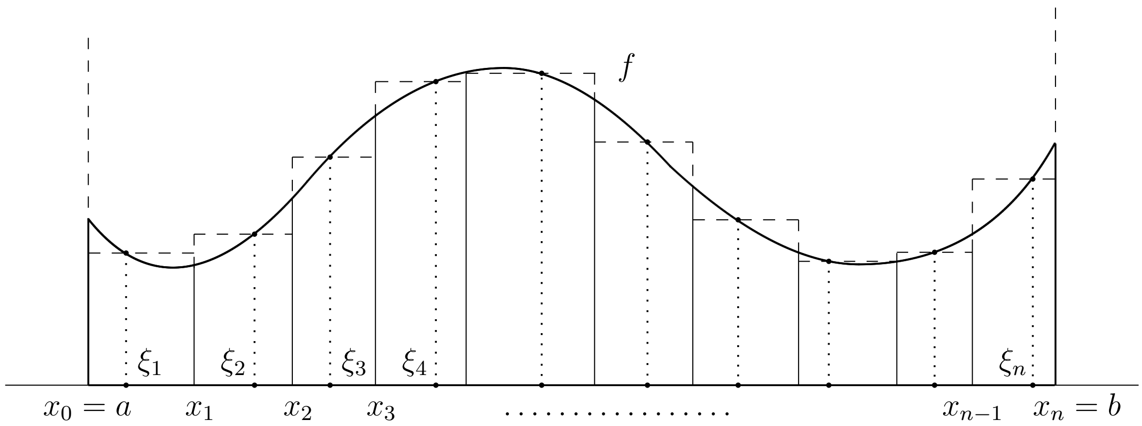
Normou dělení D nazýváme číslo $\|D\| = \max_{i=1,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$. ($\|D\|$ je délka nejdelšího ze sub–intervalů $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, ..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$. $\|D\|$ poskytuje informaci o tom, jak „jemné" je dělení D.)

V.2.2. Riemannův součet a jeho limita. Předpokládejme, že f je omezená funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a D je dělení $\langle a, b\rangle$, dané (V.2.1). Označme Δx_i délku i–tého sub–intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. (Tj. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.)

Zvolme v každém z intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ bod ζ_i. Označme V systém zvolených bodů: $\zeta_1 \in \langle x_0, x_1\rangle$, $\zeta_2 \in \langle x_1, x_2\rangle$, ..., $\zeta_n \in \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.

Pak *Riemannovým součtem* funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, odpovídajícím dělení D a systému V, nazýváme

$$s(f, D, V) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i) \cdot \Delta x_i.$$



Obr. 40

Říkáme, že číslo S je *limitou Riemannových součtů* $s(f, D, V)$ *pro* $\|D\| \to 0+$, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ a jakýkoliv systém V bodů $\zeta_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí implikace

$$\|D\| < \delta \implies |s(f, D, V) - S| < \epsilon.$$

Píšeme:

$$\lim_{\|D\| \to 0+} s(f, D, V) = S. \tag{V.2.2}$$

V.2.3. Riemannův integrál. Jestliže limita (V.2.2) existuje, pak o funkci f říkáme, že je *integrovatelná* v intervalu $\langle a, b\rangle$. Číslo S v takovém případě nazýváme *Riemannův integrál* funkce f v $\langle a, b\rangle$. Integrál označujeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{nebo} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}x.$$

Čísla a a b se nazývají *meze integrálu*. a je *dolní mez* a b je *horní mez*. Integrovaná funkce se nazývá *integrand*.

Místo toho, že funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$, často říkáme, že *Riemannův integrál* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje*.

Riemannův integrál často nazýváme *určitý integrál*. (Jak jsme se dozvěděli v odstavci V.1.8, je možné definovat více typů určitých integrálů. Protože v tomto textu však o jiných, než Riemannových integrálech, nepojednáváme, toto nemůže vést k nedorozumění.)

Proměnnou v Riemannově integrálu můžeme samozřejmě značit i jinak, než x. Integrál můžeme tedy také zapisovat jako $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$, atd.

V.2.4. Obsah obrazce mezi grafem funkce f a osou x. Je-li f nezáporná integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak *obsahem* obrazce O omezeného shora grafem funkce f, zdola osou x a ze stran přímkami $x = a$ a $x = b$ nazýváme číslo, jehož hodnota je rovna integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Analogicky, pokud je funkce f nekladná a integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, pak obsahem obrazce O, omezeného zdola grafem funkce f, shora osou x a ze stran přímkami $x = a$ a $x = b$, nazýváme číslo $-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Rozmyslete si sami tuto skutečnost: V obecném případě, kdy f je integrovatelnou funkcí v $\langle a, b\rangle$, která v $\langle a, b\rangle$ nabývá jak kladných, tak i záporných hodnot, vyjadřuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ součet obsahů všech částí roviny mezi grafem funkce f a osou x; příspěvky od částí pod osou x jsou však v součtu brány se záporným znaménkem. (Načrtněte si obrázek.)

V.2.5. Rozšíření definice Riemannova integrálu. Je-li funkce f integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak klademe

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Speciálně, rovněž klademe $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

V.2.6. Střední hodnota funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$. Předpokládejme, že f je integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak číslo

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazýváme *střední hodnotou* funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Střední hodnotu lze jednoduše geometricky interpretovat: Pro jednoduchost předpokládejme, že funkce f je nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Střední hodnotou funkce f v $\langle a, b\rangle$ je pak takové číslo μ, že obrazec O omezený grafem f, osou x, přímkou $x = a$ a přímkou $x = b$ má stejný obsah, jako obdélník o stranách $b - a$ a μ. (Načrtněte si obrázek.)

V.3. Důležité vlastnosti Riemannova integrálu

Připomeňme, že Riemannův integrál je od začátku konstruován pouze pro omezené funkce a na omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$.

Většina omezených funkcí, se kterými se setkáte v aplikacích určitého integrálu, patří mezi integrovatelné funkce. Nicméně, existují i ,,špatné" funkce, pro které limita Riemannových součtů (V.2.2) v intervalu $\langle a, b\rangle$ neexistuje. Takové funkce nejsou integrovatelné v $\langle a, b\rangle$. Riemannův integrál těchto funkcí v $\langle a, b\rangle$ tedy neexistuje. Přesnou hranici mezi funkcemi integrovatelnými a neintegrovatelnými není snadné vymezit. Abychom měli snažší situaci při poznávání integrovatelných funkcí, uvádíme v následující větě a v poznámce V.3.2 postačující podmínky pro integrovatelnost uvažované funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Nezapomeňme na to, že výroky ,,funkce f je integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$" a ,,Riemannův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje" říkají přesně totéž.

V.3.1. Věta (o existenci Riemannova integrálu). *Nechť funkce f je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$.*

V.3.2. Poznámka. Ve většině praktických případů s větou V.3.1 vystačíme. Někdy je však užitečné znát její zobecnění:

Nechť funkce f je omezená a po částech spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$.

(O funkci f říkáme, že je *po částech spojitá* v intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže $\langle a, b\rangle$ je možné rozdělit na konečně mnoho sub–intervalů, přičemž funkce f je spojitá ve vnitřku každého z nich.)

V.3.3. Věta. a) *Je li funkce f integrovatelná v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, pak f je také integrovatelná v intervalu $\langle c, d\rangle$.*

b) *Jsou-li funkce f a g obě integrovatelné v intervalu $\langle a, b\rangle$, pak jejich součin $f \cdot g$ je také integrovatelnou funkcí v $\langle a, b\rangle$.*

c) *Je-li f integrovatelná funkce v intervalu $\langle a, b\rangle$ a liší-li se funkce g od f v $\langle a, b\rangle$ pouze v konečně mnoha bodech, pak g je také integrovatelnou funkcí v $\langle a, b\rangle$ a*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tvrzení a) je okamžitým důsledkem definice Riemannova integrálu.

Tvrzení b) je výrokem o integrovatelnosti součinu dvou funkcí f a g. Mějte však na paměti, že toto neznamená, že $\int_a^b f \cdot g\,\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_a^b g\,\mathrm{d}x\right)$!

Tvrzení c) říká, že změna funkce f v konečně mnoha bodech nemá žádný vliv na existenci ani na hodnotu integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Jinými slovy: Existence ani hodnota integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ nezávisí na hodnotách funkce f v konečně mnoha bodech. Funkce f tedy nemusí být ani definována v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ a tato skutečnost nemá žádný vliv na existenci ani hodnotu integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Speciálně, nehraje žádnou roli, zda je integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ uvažován na otevřeném nebo na uzavřeném intervalu.

V.3.4. Horní a dolní odhad Riemannova integrálu. Z definice Riemannova integrálu i z jeho geometrického významu (viz odstavec V.2.4) okamžitě plyne, že pokud funkce f, integrovatelná v $\langle a,b\rangle$, vyhovuje nerovnostem

$$m \le f(x) \le M \qquad \text{pro všechna } x \in \langle a,b\rangle,$$

pak

$$m\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M\cdot(b-a).$$

Speciálně, pokud f má v intervalu $\langle a,b\rangle$ své maximum a minimum, pak

$$\min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\cdot(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)\cdot(b-a). \tag{V.3.1}$$

Pokud minimum funkce f v $\langle a,b\rangle$ neexistuje, je třeba je v nerovnosti (V.3.1) nahradit infimem f v $\langle a,b\rangle$. Podobně, pokud neexistuje maximum f v $\langle a,b\rangle$, je třeba je nahradit supremem f v $\langle a,b\rangle$.

Podobně, z definice Riemannova integrálu i z jeho geometrického významu snadno plyne následující věta:

V.3.5. Věta. *Jsou-li funkce f a g obě integrovatelné v $\langle a,b\rangle$ a $g(x)\le f(x)$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$, pak*

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Speciálně, je-li $f(x)\ge 0$ pro všechna $x\in\langle a,b\rangle$, pak $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge 0.$

Následující věta obsahuje formule, jejichž obdobu známe z teorie neurčitého integrálu – viz větu IV.1.8.

V.3.6. Věta. (Linearita Riemannova integrálu.) *Jsou-li f a g integrovatelné funkce v $\langle a,b\rangle$ a $\alpha\in\mathbf{R}$, pak*

$$\int_a^b \big[f(x)+g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int_a^b \alpha\cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V.3.7. Věta. (Aditivita Riemannova integrálu vzhledem k intervalu.) *Existují-li integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}x$, pak*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V.3.8. Věta. (Riemannův integrál jako funkce horní meze.) *Předpokládejme, že f je integrovatelná funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$. Pak*

a) funkce $P(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$, *b) rovnost* $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$ *platí ve všech bodech* $x \in (a,b)$*, ve kterých je funkce* f *spojitá.*

Pravdivost tvrzení a) plyne (alespoň intuitivně) z geometrického významu Riemannova integrálu (viz odstavec V.2.4). Zkuste si k tomu načrtnout obrázek a rozmyslete si to.

Tvrzení b) můžeme dokázat tímto způsobem:

$$P'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{P(x+h)-P(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\mu(h)$$

kde $\mu(h)$ je střední hodnota funkce f na intervalu s krajními body x a $x+h$. Ze spojitosti funkce f v bodě x a z (V.3.1) plyne, že $\mu(h) \to f(x)$ pro $h \to 0$. To dokazuje platnost vzorce v části b).

V.3.9. Poznámka. Z věty V.3.8 plyne, že je-li funkce f spojitá v intervalu I a $a \in I$, pak $P(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je primitivní funkce k f v I.

***V.3.10. Poznámka.** Při aplikacích určitého integrálu je často užitečné znát toto zobecnění formule (V.3.2):
Je-li f *spojitá funkce v intervalu* I *a* $a(x)$, $b(x)$ *jsou funkce, které mají derivaci podle* x *v intervalu* J *a jejich hodnoty patří do intervalu* I*, pak*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x) \qquad \text{pro } x \in J.$$

V.3.11. Cvičení. Existují následující Riemannovy integrály?

a) $\displaystyle\int_{-2}^{1}\frac{x+1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{5}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_{-2.5}^{3}\frac{x}{\ln(x+3)}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\frac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$

Výsledky: a) ne, b) ano, c) ano, d) ano, e) ne, f) ano.

V.3.12. Cvičení. Vypočítejte $F'(x)$, je-li funkce F definována následujícími integrály.

a) $F(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{\sqrt{x}}\cos(t^2)\,\mathrm{d}t\,;\quad x>0$ b) $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

c) $F(x) = \displaystyle\int_x^0\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ d) $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\ln t\,\mathrm{d}t\,;\quad x>0$

Výsledky: a) $F'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\cos 1/x^2}{x^2}$ (pro $x>0$), b) $2\,\dfrac{\sin 2x}{2x}$,
c) $-\sqrt{1+x^4}$, d) $(9x^2-4x)\ln x$ (pro $x>0$).

V.4. Výpočet Riemannova integrálu

Přistupujeme k důležité otázce teorie Riemannova integrálu, totiž k otázce jeho výpočtu. Následující věta bývá vzhledem ke svému významu nazývána Základní větou integrálního počtu.

V.4.1. Věta. *Je-li f spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$ a F je primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$, pak*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b)-F(a). \tag{V.4.1}$$

Vzorec (V.4.1) se nazývá *Newtonova–Leibnizova formule*. Rozdíl $F(b)-F(a)$ je často zapisován kratším způsobem: $F(b)-F(a)=[\,F\,]_a^b$.

Důkaz základní věty integrálního počtu je snadný: Funkce $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je také primitivní funkcí k f v $\langle a,b\rangle$. Dvě primitivní funkce se mohou lišit nejvýše o aditivní konstantu (věta IV.1.5). Proto existuje konstanta C taková, že $F=G+C$ v $\langle a,b\rangle$. To znamená, že $F(a)=G(a)+C=C$ (protože $G(a)=0$) a $F(b)=G(b)+C=G(b)+F(a)$. Odtud plyne:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; G(b) \;=\; F(b)-F(a).$$

Newtonova–Leibnizova formule spojuje neurčitý integrál s určitým integrálem: Znáte-li neurčitý integrál funkce f v intervalu $\langle a,b\rangle$, pak znáte všechny primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$. Můžete vybrat jakoukoliv z nich, použít ji v Newtonově–Leibnizově formuli a získáte hodnotu určitého integrálu funkce f v $\langle a,b\rangle$. Skutečnost, že neurčitý integrál a primitivní funkce hrají tak důležitou roli při výpočtu určitého integrálu, byla jedním z hlavních důvodů, proč jste se v části IV těchto skript učili počítat neurčité integrály.

Již několikrát jsme opakovali, že všechny primitivní funkce k f v $\langle a,b\rangle$ se navzájem liší nejvýše o aditivní konstantu. Když tedy vyberete například primitivní funkci $F+k$ (kde k je konstanta) místo F a použijete ji v Newtonově–Leibnizově formuli, obdržíte

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; [F+k]_a^b \;=\; \big(F(b)+k\big)-\big(F(a)+k\big) \;=\; F(b)-F(a).$$

Výsledek je stejný, jako v (V.4.1), protože aditivní konstanta se ve výsledku zruší. Je tedy jedno, kterou primitivní funkci k f k výpočtu určitého integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ použijete.

V.4.2. Příklad. $\displaystyle\int_0^\pi \sin\,x\,\mathrm{d}x=[\,-\cos\,x\,]_0^\pi=(-\cos\,\pi)-(-\cos\,0)=2.$

Následující dvě věty ukazují, že metody integrace per partes a integrace substitucí, známé z teorie neurčitého integrálu, mohou být přímo použity i k výpočtu určitého integrálu.

V.4.3. Věta (o integraci per partes). *Předpokládejme, že funkce u a v mají spojité derivace v intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom*

$$\int_a^b u'\cdot v\,\mathrm{d}x \;=\; [\,u\cdot v\,]_a^b - \int_a^b u\cdot v'\,\mathrm{d}x. \tag{V.4.2}$$

V.4.4. Příklad. $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^{2x}\cdot x\,\mathrm{d}x = {}^{*)}\ \left[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\cdot x\right]_0^2 - \int_0^2 \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x =$

$$= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^4\cdot 2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^0\cdot 0 - \left[\tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}\right]_0^2 = \mathrm{e}^4 - \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^4 + \tfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^0 = \tfrac{3}{4}\,\mathrm{e}^4 + \tfrac{1}{4}.$$

*) Položili jsme $u'(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $u(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}$, $v(x) = x$ and $v'(x) = 1$.

V.4.5. Věta (o integraci substitucí). *Nechť funkce g má spojitou derivaci v intervalu $\langle a, b\rangle$ a zobrazuje $\langle a, b\rangle$ do intervalu J. Nechť funkce f je spojitá v J. Potom*

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{V.4.3}$$

Formuli (V.4.3) můžeme použít dvěma způsoby:

a) Chceme vypočítat integrál vlevo a problém převedeme na výpočet integrálu vpravo (je-li integrál vpravo jednodušší), nebo naopak

b) Chceme vypočítat integrál vpravo a problém převedeme na výpočet integrálu vlevo (je-li integrál vlevo jednodušší).

V.4.6. Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$.

Položíme-li $\langle a, b\rangle = \langle 0, \pi/2\rangle$, $s = g(x) = \sin x$, $f(s) = s^2$, $J = (-\infty, +\infty)$, jsou všechny předpoklady věty V.4.5 splněny. Kromě toho, $g(0) = \sin 0 = 0$ a $g(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1$. Použitím vzorce (V.4.3) dostáváme:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 s^2\,\mathrm{d}s = \left[\tfrac{1}{3}\,s^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

V.4.7. Příklad. Vypočítejme $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Tento integrál můžeme považovat za integrál na pravé straně vzorce (V.4.3) (s proměnnou označenou x místo s). Funkce $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ je spojitá v $\langle 0, 2\rangle$, proto integrál existuje. Položme $x = g(t) = 2\sin t$, $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t = 2\cos t\,\mathrm{d}t$. Pak $g(a) = 2\sin a = 0$ a $g(b) = 2\sin b = 2$. Můžeme tedy zvolit $a = 0$ a $b = \pi/2$. Všechny předpoklady věty V.4.5 jsou nyní splněny a pomocí vzorce (V.4.3) dostáváme:

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\pi/2} 2\,(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[2t + \sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \pi.$$

V.4.8. Poznámka. Představte si, že počítáte Riemannův integrál funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a zvažujete použití integrace per partes nebo integrace substitucí. Pak máte dvě možnosti:

1) Můžete použít větu V.4.3 nebo větu V.4.5. Tím převedete integrál na jiný (jednodušší) integrál a přitom stále pracujete s integračními mezemi. Tento přístup je vysvětlen v příkladech V.4.5, V.4.6 a V.4.7.

2) Integrál můžete nejprve vypočítat jako neurčitý integrál v intervalu $\langle a, b\rangle$ a poté použijete Newtonovu–Leibnizovu formuli (V.4.1) na intervalu $\langle a, b\rangle$.

   Abychom ukázali, co tímto přesně míníme, vypočítáme integrál z příkladu V.4.6 ještě jednou, tentokrát způsobem, který právě vysvětlujeme. Začněme tedy neurčitým integrálem $\int \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$. Použijeme substituci $s = \sin x$. Pak $\mathrm{d}s = \cos x \, \mathrm{d}x$ a

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \, \mathrm{d}x = \int s^2 \, \mathrm{d}s = \tfrac{1}{3} s^3 + C = \tfrac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

   Pomocí formule (V.4.1) dostáváme: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{3}.$

Jak uvidíte poté, až si sami vyřešíte větší počet příkladů, způsob 1), založený na přímé aplikaci integrace per partes nebo integrace substitucí, je obvykle technicky snazší a méně pracný.

V.4.9. Cvičení. Vypočítejte následující integrály.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3x^2 - 4x + 7) \, \mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 (8t^3 - 12t^2 + 5) \, \mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4}{s^2} \, \mathrm{d}s$

d) $\displaystyle\int_1^{27} x^{-4/3} \, \mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - s^2} \, \mathrm{d}s$ f) $\displaystyle\int_0^1 u \operatorname{arctg} u \, \mathrm{d}u$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_0^1 9w \, \mathrm{e}^{3w} \, \mathrm{d}w$ i) $\displaystyle\int_{1/\mathrm{e}}^{\mathrm{e}} |\ln r| \, \mathrm{d}r$

j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{4 - x}} \, \mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$ l) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{3 + 2 \sin \theta}$

Vypočítejte obsah oblasti mezi grafem funkce f a osou x.

m) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ \ 0 \le x \le 3$ n) $f(x) = 1 - (x^2/4),\ \ -2 \le x \le 3$

o) $f(x) = 5 - 5x^{2/3},\ \ -1 \le x \le 8$ p) $f(x) = 1 - \sqrt{x},\ \ 0 \le x \le 4$

Určete střední hodnotu funkce na zadaném intervalu.

q) $f(x) = \sqrt{3x}$ na $\langle 0, 3\rangle$ r) $f(x) = \sqrt{ax}$ na $\langle 0, a\rangle$

s) $f(x) = mx + b$ na $\langle -1, 1\rangle$ t) $f(x) = mx + b$ na $\langle -k, k\rangle$

Výsledky: a) 18, b) 4, c) 2, d) 2, e) π, f) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$, g) $\frac{1}{2}\pi$, h) $2\mathrm{e}^3 + 1$, i) $2(1 - \mathrm{e}^{-1})$, j) $2\pi/3 - \sqrt{3}$, k) $\frac{2}{15}$, l) $2/\sqrt{5} \cdot \operatorname{arctg}(1/\sqrt{5})$, m) 0, n) $\frac{41}{12}$, o) -58, p) $-\frac{4}{3}$, q) 2, r) $\frac{2}{3}a$, s) b, t) b.

*V.5. Numerická integrace

Z teorie neurčitého integrálu si pamatujeme, že primitivní funkce k dané funkci f může existovat, ale nelze ji získat standardními postupy integrace a není možné ji ani vyjádřit v ,,uzavřeném tvaru" (tj. formulí, předepisující provedení konečného počtu operací). Podobně, často se stává, že Riemannův integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ sice existuje, ale není možné jej vypočítat standardní integrací založenou na nalezení primitivní funkce a použití Newtonovy–Leibnizovy formule. Existují však přibližné metody (často též zvané numerické metody), které umožňují integrál vypočítat sice pouze přibližně, ale s chybou tak malou, jak si přejeme. V této kapitole vysvětlíme dvě takové metody. Všechny tyto metody vyžadují pro dosažení větší přesnosti (tj. menší chyby) provedení poměrně velkého počtu aritmetických operací. Proto jsou prakticky realizovatelné pouze na počítačích.

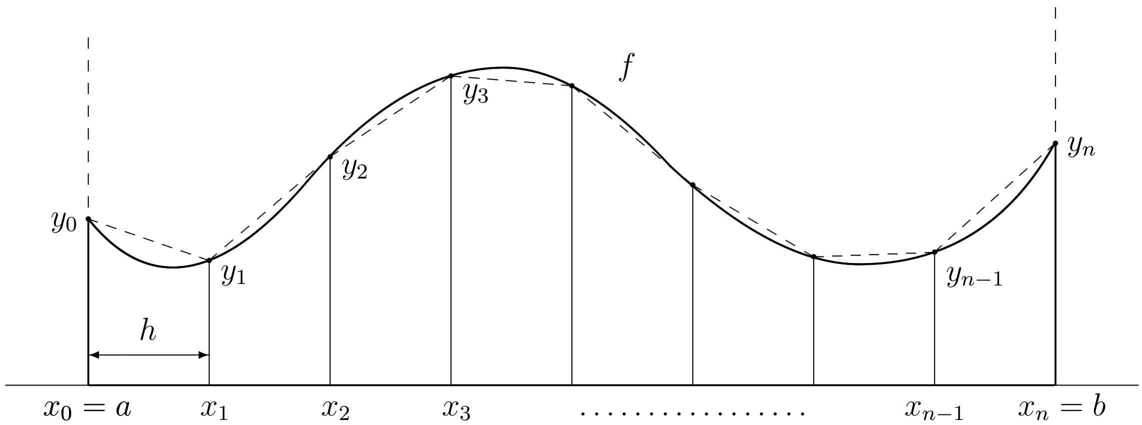
Obě metody jsou založeny na dělení

$$D: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

intervalu $\langle a, b\rangle$ na n sub–intervalů $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ stejné délky h. Platí tedy

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{a} \qquad x_k = a + k \cdot h \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Budeme označovat $y_k = f(x_k)$.



Obr. 41

V.5.1. Lichoběžníková metoda. Funkci f aproximujeme na každém sub–intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ lineární funkcí. Lineární funkce je jednoznačně určena požadavkem, aby její graf (přímka) procházel dvěma vybranými body. Zvolme body $[x_{k-1}, y_{k-1}]$ a $[x_k, y_k]$. Pak uvažovaná lineární funkce má rovnici $y = y_{k-1} + (y_k - y_{k-1})/h \cdot (x - x_{k-1})$. Její integrál v intervalu $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ (označme jej I_k) představuje obsah lichoběžníku (viz obr. 41) a je $I_k = h \cdot (y_{k-1} + y_k)/2$. Sečteme-li všechna čísla I_1, I_2, ... , I_n, obdržíme

$$\text{(V.5.1)} \qquad L_n = \frac{h}{2} \cdot \left[\, y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n \,\right].$$

L_n je přibližnou hodnotou Riemannova integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Geometrický smysl L_n je patrný z obr. 41 – je to součet obsahů n lichoběžníků sestrojených na intervalech $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$ ... , $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$.

Z definice Riemannova integrálu lze usuzovat, že čím jemnější je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, tím přesněji L_n aproximuje skutečnou hodnotu Riemannova integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Jinými slovy, přesnost aproximace by měla růst s rostoucím n (tj. s klesajícím h). Opravdu, lze dokázat, že má-li funkce f druhou derivaci f'' spojitou v $\langle a, b\rangle$ a M_2 je maximum $|f''|$ v $\langle a, b\rangle$, pak platí následující odhad chyby:

(V.5.2) $$\left| L_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{b-a}{12}\, h^2\, M_2.$$

(Nerovnost (V.5.2) se nazývá odhad chyby, protože poskytuje horní odhad chyby, které se dopustíme, když přesnou hodnotu integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ nahradíme jeho přibližnou hodnotou L_n.)

V.5.2. Simpsonova metoda. Vyberme nyní přirozené číslo n tak aby bylo sudé. Funkci f budeme aproximovat na každém ze sub–intervalů $\langle x_0, x_2\rangle$, $\langle x_2, x_4\rangle$, ... , $\langle x_{n-2}, x_n\rangle$ kvadratickým polynomem. Kvadratický polynom na sub–intervalu $\langle x_{k-2}, x_k\rangle$ $(k = 2, 4, \dots, n)$ je jednoznačně určen, požadujeme-li, aby jeho graf (parabola) procházel třemi vybranými body. Zvolme body $[x_{k-2}, y_{k-2}]$, $[x_{k-1}, y_{k-1}]$, $[x_k, y_k]$. Integrál takového kvadratického polynomu v intervalu $\langle x_{k-2}, x_k\rangle$ může být poměrně snadno vypočítán – můžete si sami ověřit, že je roven $I_k = h \cdot (y_{k-2} + 4y_{k-1} + y_k)/3$. Sečtením všech čísel I_2, I_4, ... , I_n obdržíme

(V.5.3) $$S_n = \frac{h}{3} \cdot \big[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n \big].$$

S_n je přibližnou hodnotou Riemannova integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$. Za předpokladu, že čtvrtá derivace $f^{(4)}$ funkce f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a M_4 je maximum $|f^{(4)}|$ na $\langle a, b\rangle$, je možné odvodit, že platí následující odhad chyby:

(V.5.4) $$\left| S_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}x \right| \le \frac{b-a}{180}\, h^4\, M_4.$$

V.6. Nevlastní Riemannův integrál

V definici Riemannova integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ předpokládáme, že

(V.6.1) $\langle a, b\rangle$ je omezený interval a

(V.6.2) funkce f je v tomto intervalu omezená.

(Viz kapitolu V.2.) V různých situacích však vzniká potřeba počítat určité integrály, ve kterých je buď integrační obor (interval), nebo integrand (funkce), nebo obojí neomezené. Takové integrály se nazývají nevlastní. V této kapitole vysvětlíme definici nevlastního Riemannova integrálu. Začněme však jednoduchým příkladem.

V.6.1. Příklad. Riemannův integrál $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ neexistuje, protože oborem integrace není omezený interval. Přitom ale otázka ,,jak velký obsah má obrazec $O = \{[x,y];\ x \in \langle 1, +\infty),\ 0 \leq y \leq 1/x\}$" je zcela rozumná. ($O$ je část roviny $\mathbb{E}_2$, odpovídající $x \in \langle 1, +\infty)$, omezená shora grafem funkce $1/x$ a zdola osou x. Načrtněte si obrázek.) Při hledání odpovědi je přirozené postupovat takto: Zvolme $t \in \langle 1, +\infty)$. Obsah obrazce $O_t = \{[x,y];\ x \in \langle 1, t\rangle,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$, tj. části roviny, odpovídající $x \in \langle 1, t\rangle$ a omezené shora grafem funkce $1/x$ a zdola osou x, je roven

$$p(O_t) = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^t = \ln t - \ln 1 = \ln t.$$

Obsah celého obrazce O je nyní přirozené definovat rovnicí

$$p(O) = \lim_{t\to+\infty} p(O_t) = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty.$$

Tento postup je motivací k následující definici.

V.6.2. Nevlastní Riemannův integrál se singulární horní mezí. Předpokládejme, že funkce f je definovaná v intervalu $\langle a, b)$ a že je integrovatelná v každém intervalu $\langle a, t\rangle$ (pro $a \leq t < b$). Jestliže

a) alespoň jedna z podmínek (V.6.1) a (V.6.2) není splněna a

b) existuje limita $\displaystyle\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x,$

pak její hodnotu nazýváme *nevlastním Riemannovým integrálem* se *singulární horní mezí*.

Nevlastní Riemannův integrál značíme stejně, jako ,,běžný" Riemannův integrál, tj. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Můžeme tedy psát:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nevlastní Riemannův integrál se *singulární dolní mezí* může být definován zcela analogicky. (Zkuste si definici sami napsat.)

Zatímco hodnotou vlastního integrálu může být jen konečné číslo, hodnota nevlastního integrálu může být konečná i nekonečná. Pokud je nevlastní integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ konečný, pak říkáme, že *integrál konverguje*. Pokud je $\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \pm\infty$, pak říkáme, že *integrál diverguje*.

V.6.3 Příklad. Vypočítejme nevlastní Riemannův integrál $\displaystyle\int_{-5}^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x.$

Funkce $f(x) = 1/\sqrt{2-x}$ není omezená v intervalu $\langle -5, 2\rangle$. (,,Vadí" její chování v okolí horní meze 2, jmenovitě to, že $\lim_{x\to 2-} 1/\sqrt{2-x} = +\infty$.) Riemannův integrál funkce f v $\langle -5, 2\rangle$ tedy neexistuje. f je však spojitou funkcí v intervalu $\langle -5, 2)$. V každém intervalu $\langle -5, t\rangle$ (kde $-5 \leq t < 2$ je tedy integrovatelná. Primitivní funkcí k f v $\langle -5, 2)$ je $F(x) = -2\sqrt{2-x}$. Proto je

$$\int_{-5}^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; F(t) - F(1) \;=\; -2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{2-(-5)} \;=\; -2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{7}.$$

Protože $\quad \lim\limits_{t\to 2-} -2\sqrt{2-t} + 2\sqrt{7} = 2\sqrt{7}, \quad$ platí: $\quad \displaystyle\int_{-5}^{2} \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{7}.$

V.6.4. Nevlastní Riemannův integrál s oběma mezemi singulárními. Definici nevlastního Riemannova integrálu lze rozšířit na případy, kdy jsou singulární obě meze: Předpokládejme, že $c \in (a,b)$ a oba integrály $\int_a^c f\,\mathrm{d}x$ a $\int_c^b f\,\mathrm{d}x$ existují (první jako nevlastní integrál se singulární dolní mezí a a druhý jako nevlastní integrál se singulární horní mezí b). Jestliže součet obou integrálů má smysl (tj. jestliže to není například výraz $-\infty + \infty$), pak pokládáme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ je pak nevlastním integrálem s oběma mezemi singulárními.

Definici je možné rozšířit i na případy, kdy jsou singulárními body některé body uvnitř intervalu (a,b). Těmito případy se v tomto textu ale nezabýváme.

V.6.5. Poznámka. Existuje-li nevlastní integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ a je-li interval s krajními body a, b neomezený, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem meze*. Je-li funkce f neomezená, hovoříme o *nevlastním integrálu vlivem funkce*. Oba vlivy se mohou kombinovat (v okolí jedné z mezí je funkce neomezená a druhá mez je nekonečná) nebo i kumulovat (v okolí nekonečné meze je i funkce neomezená).

V.6.6. Výpočet nevlastního Riemannova integrálu. V tomto odstavci budeme pro jednoduchost předpokládat, že f je spojitou funkcí v intervalu (otevřeném nebo uzavřeném) s krajními body a, b (kde $a < b$).

Podle věty IV.1.3 má funkce f v intervalu od a do b primitivní funkci. Označme ji F. (Ve skutečnosti je primitivních funkcí nekonečně mnoho a všechny se navzájem liší pouze o aditivní konstantu – viz větu IV.1.5. Nám ale nyní stačí jedna z nich.) Lze ukázat, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ existuje jakožto nevlastní integrál a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{t\to b-} F(t) - \lim_{t\to a+} F(t), \tag{V.6.1}$$

pokud výraz na pravé straně má smysl (tj. pokud existují obě limity a rozdíl jejich hodnot má smysl).

V.6.7. Příklad. Integrál $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ je nevlastním integrálem s oběma mezemi singulárními: 0 je singulární mezí protože v jejím pravém okolí není funkce $1/\sqrt{x}$ omezená a $+\infty$ je singulární mezí protože to není konečné číslo. Primitivní funkcí k $1/\sqrt{x}$ v $(0,+\infty)$ je například funkce $2\sqrt{x}$. Pak

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{t\to+\infty} 2\sqrt{t} - \lim_{t\to 0+} 2\sqrt{t} \;=\; +\infty - 0 \;=\; +\infty.$$

V.6.8. Cvičení. Vypočítejte následující nevlastní integrály.

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$

d) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$ e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$ h) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int_1^5 (x-1)^a\,\mathrm{d}x\,;\quad a>-1$

Výsledky: a) $\pi/2$, b) $\pi/2$, c) $\frac{1}{2}$, d) $-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}$, e) 2, f) $2\sqrt{5}$, g) $\pi/\sqrt{20}$, h) $\frac{1}{2}$, i) $4^{a+1}/(a+1)$.

*V.7. Některé geometrické a fyzikální aplikace určitého integrálu

O jednoduchém geometrickém a fyzikálním významu určitého integrálu jsme již hovořili v odstavcích V.1.1, V.1.3 a V.2.4. V této kapitole ukážeme další možnosti využití určitého integrálu v geometrii i v mechanice.

V celé této kapitole budeme předpokládat, že f je nezáporná a spojitá funkce v intervalu $\langle a,b\rangle$.

V.7.1. Objem rotačního tělesa. Označme, stejně jako v odstavci V.1.1, O obrazec shora omezený grafem funkce f, zdola osou x a ze stran přímkami $x=a$, $x=b$. (Viz obr. 39.) Rotací obrazce O okolo osy x vznikne rotační těleso. Pro jeho objem platí:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{V.7.1}$$

Ke vzorci (V.7.1) lze dospět podobnými úvahami, jako jsme v odstavci V.1.2 dospěli k vyjádření obsahu obrazce O určitým integrálem funkce f: Interval $\langle a,b\rangle$ rozdělíme na nekonečně mnoho ,,nekonečně krátkých" úseků délky $\mathrm{d}x$. Typický úsek má krajní body x a $x+\mathrm{d}x$, kde $x\in\langle a,b)$. Obrazec, omezený shora grafem funkce f na intervalu $\langle x,x+\mathrm{d}x\rangle$ a zdola úsečkou kterou tento interval vytíná na ose x, je ,,nekonečně úzkým" obdélníkem se stranami délky $\mathrm{d}x$ a $f(x)$. Jeho rotací okolo osy x vznikne ,,nekonečně tenký" válec, jehož objem je $\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\,\mathrm{d}x$. Objem celého rotačního tělesa je součtem nekonečně mnoha ,,nekonečně malých" čísel $\mathrm{d}V$. Takto obdržíme vzorec (V.7.1).

Další vzorce, uvedené v této kapitole, lze získat podobně. Proto již jejich odvození neukazujeme.

V.7.2. Obsah rotační plochy. Rotací grafu funkce f okolo osy x vznikne rotační plocha. Pro její obsah platí:

$$p = 2\pi\int_a^b f(x)\,\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

V.7.3. Délka křivky. Grafem funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ je křivka. Pro její délku platí:

$$l = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

V.7.4. Statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti křivky. Předpokládejme, že na křivce z předcházejícího odstavce (tj. na grafu funkce f) je rozložena hmota s konstantní délkovou hustotou ρ. Celková hmotnost křivky je v tomto případě rovna součinu ρ a délky křivky:

$$m = \rho\, l = \rho \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Statickými momenty křivky vzhledem k osám x a y nazýváme integrály

$$m_x = \rho \int_a^b f(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x, \qquad m_y = \rho \int_a^b x\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Pro souřadnice x_T a y_T těžiště T uvažované křivky platí:

$$x_T = \frac{m_x}{m}, \qquad y_T = \frac{m_y}{m}.$$

Momenty setrvačnosti křivky vzhledem k osám x a y jsou

$$J_x = \rho \int_a^b f^2(x)\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x, \qquad J_y = \rho \int_a^b x^2\sqrt{[f'(x)]^2 + 1}\,\mathrm{d}x.$$

V.7.5. Statické momenty, těžiště a momenty setrvačnosti rovinného obrazce. Nechť O je obrazec z odstavce V.7.1. Předpokládejme, že v O je rozložena hmota s plošnou hustotou ρ. Celková hmotnost obrazce O je

$$m = \rho \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty obrazce O vzhledem k osám x a y jsou

$$m_x = \frac{1}{2}\rho \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x, \qquad m_y = \rho \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro souřadnice x_T a y_T těžiště T obrazce O platí:

$$x_T = \frac{m_x}{m}, \qquad y_T = \frac{m_y}{m}.$$

Momenty setrvačnosti obrazce vzhledem k osám x a y jsou

$$J_x = \frac{1}{3}\rho \int_a^b f^3(x)\,\mathrm{d}x, \qquad J_y = \rho \int_a^b x^2\,f(x)\,\mathrm{d}x.$$

V.7.6. Statické momenty a těžiště rotačního tělesa. Předpokládejme, že v rotačním tělese, které vznikne rotací obrazce O okolo osy x, je rozložena hmota s objemovou hustotou ρ. Celková hmotnost tělesa je rovna součinu ρ a objemu tělesa:

$$m = \rho V = \rho\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Statické momenty tělesa vzhledem k rovinám xy, xz a yz jsou

$$m_{xy} = 0, \qquad m_{xz} = 0, \qquad m_{yz} = \rho\pi \int_a^b x\,f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pro souřadnice x_T, y_T a z_T těžiště T tělesa platí:

$$x_T = \frac{m_{yz}}{m}, \qquad y_T = \frac{m_{xz}}{m} = 0, \qquad z_T = \frac{m_{xy}}{m} = 0.$$

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rotace x je

$$J_x = \frac{1}{2}\,\rho\pi \int_a^b f^4(x)\,\mathrm{d}x.$$

V.7.7. Poznámka. S možnostmi, jak vypočítat délky obecnějších křivek, obsahy obecnějších ploch a objemy obecnějších těles se seznámíte v předmětu Matematika II. V Matematice II se rovněž dozvíte, jak je možné vypočítat hmotnost, statické momenty, momenty setrvačnosti a souřadnice těžiště obecných křivek, ploch a těles, a to i v případě proměnné hustoty.

Doporučená literatura

1. B. Budínský, J. Charvát: *Matematika I,* SNTL/Alfa, Praha 1987. `(Srozumitelně a podrobně napsaná učebnice pro stavební fakulty.)`
2. J. Neustupa, S. Kračmar: *Sbírka příkladů z matematiky I,* Ediční středisko ČVUT, Praha 2003, 2006. `(Sbírka úloh z Matematiky I, určená pro cvičení a doporučené semináře z Matematiky I a pro samostatné studium.)`

Další literatura

1. V. Jarník: *Diferenciální počet I,* Nakladatelství ČSAV, Praha 1946, 1951, 1953, 1955, 1963, atd. `(Základní a podrobná učebnice diferenciálního počtu.)`
2. V. Jarník: *Integrální počet I,* Nakladatelství ČSAV, Praha 1948, 1954, 1956, 1963, atd. `(Základní a podrobná učebnice integrálního počtu.)`
3. J. Neustupa: *Mathematics I,* Ediční středisko ČVUT, Praha 2004. `(Anglická verze čtvrtého vydání tohoto skripta Matematika I s anglicko-českým slovníkem užitých matematických termínů.)`
4. K. Rektorys: *Přehled užité matematiky,* SNTL, Praha 1963, 1968, atd. `(Rozsáhlý přehled klasických partií aplikované matematiky.)`

Rejstřík

aproximace
– postupná ... 92
– počáteční ... 92
argument funkce ... 47
asymptota
– svislá ... 82
– šikmá ... 82
báze vektorového prostoru ... 8
bod
– vlastní ... 42
– nevlastní ... 42
– inflexní ... 81
Cauchyova úloha ... 117
činitel kořenový ... 104
člen posloupnosti ... 43
číslo
– Eulerovo e ... 53
– vlastní ... 22
délka vektoru ... 26
derivace ... 64, 65
– druhého řádu ... 70
– elementárních funkcí ... 67, 68
– funkce definované parametricky 89
– inverzní funkce ... 68
– logaritmická ... 68
– n–tého řádu ... 70
– nevlastní ... 69
– složené funkce ... 68
– zleva ... 65
– zprava ... 65
determinant ... 14
dělení intervalu ... 122
diagonála matice ... 10
diferenciál funkce ... 70, 71
dimenze vektorového prostoru ... 8
doplněk prvku v matici ... 14
ekvivalence ... 4
ekvivalentní úpravy matice ... 13
elipsoid ... 37
– rotační ... 36, 37
extrém
– funkce ... 49
– – absolutní ... 77
– – na množině ... 49
– – globální ... 77
– – lokální ... 77
– – – ostrý ... 77
– množiny ... 42
formule Newtonova–Leibnizova .. 127
funkce ... 47
– arkuskosinus ... 56
– arkuskotangens ... 57
– arkussinus ... 55
– arkustangens ... 56
– cyklometrická ... 57
– definovaná parametricky ... 88
– elementární ... 52
– – exponenciální ... 52, 53, 54
– integrovatelná ... 122
– inverzní ... 48
– klesající ... 51
– konkávní ... 73
– – ryze ... 73
– konvexní ... 73
– – ryze ... 73
– kosinus ... 52, 56
– kotangens ... 57
– lichá ... 52
– lineární ... 52
– logaritmická při základu a ... 52
– mocninná ... 54
– monotónní ... 51
– – ryze ... 51
– neklesající ... 51
– nerostoucí ... 51
– omezená ... 49
– – shora ... 49
– – zdola ... 49
– periodická ... 52
– po částech spojitá ... 124
– primitivní ... 95
– prostá ... 48
– racionální ... 103
– – dvou proměnných ... 111
– rostoucí ... 51
– sinus ... 52, 55

– složená 49
– spojitá 60
– – v bodě 60
– – – zprava 60
– – – zleva 60
– – na intervalu 60
– sudá 52
– tangens 52, 56
– vnější 49
– vnitřní 49
Gaussův algoritmus 13, 14
graf funkce 47
hodnost matice 12
hyperboloid
– jednodílný 37
– – rotační 36, 37
– dvoudílný 38
– – rotační 36, 38
implikace 4
infimum
– množiny 42
– funkce 50
integrace 97
– per–partes 98, 127
– rozkladem 98
– substitucí 101, 128
integrál
– neurčitý 96
– nevlastní
– – se singulární dolní mezí 132
– – se singulární horní mezí 132
– – vlivem funkce 133
– – vlivem meze 133
– Riemannův 122, 123
– určitý 123
integrand 123
konstanta integrační 96
kořen
– polynomu 53
– rovnice 91
kružnice oskulační 76
křivost 76
kvadrika 35
– regulární 36
– rotační 36
– singulární 36
– v posunuté poloze 37
– v základní poloze 37
kvantifikátor
– existenční 4
– universální 4
Lagrangeův tvar zbytku 86
limita
– funkce 57
– nevlastní 44, 57
– posloupnosti 44
– Riemannových součtů 122
– vlastní 44, 57
– zleva 59
– zprava 59
lineární kombinace 7
lineární nezávislost 7
lineární závislost 7
lineární obal 10
logaritmus
– o základu a 52, 53
– přirozený 54
matice 10
– čtvercová 11
– horní trojúhelníková 11
– inverzní 17
– jednotková 11
– nulová 11
– regulární 17
– singulární 17
– soustavy 18
– – rozšířená 18
– transponovaná 11
maximum
– funkce 49
– – absolutní 77
– – globální 77
– – lokální 77
– – – ostré 77
– – na množině 49
– množiny 49
metoda
– Gaussova eliminační 19, 20
– iterační 92
– lichoběžníková 130, 131

– numerická 92, 130
– přibližná 92, 130
– separace proměnných 115, 116
– Simpsonova 131
– substituční 100, 128
mez
– funkce
– – horní 49
– – dolní 49
– integrálu
– – horní 123
– – dolní 123
minimum
– funkce 49
– – absolutní 77
– – globální 77
– – lokální 77
– – – ostré 77
– – na množině 49
– množiny 42
mnohočlen 53
násobení matic 11
negace výroku 4
norma dělení 122
obor
– definiční 47
– hodnot 47
obsah obrazce 119, 123
odhad chyby 93, 94, 131
odchylka
– dvou přímek 31
– dvou rovin 34
– přímky od roviny 34
okolí 43
– levé 43
– neúplné 43
– pravé 43
– prstencové 43
paraboloid 39
– eliptický 39
– hyperbolický 39
– rotační 36, 39
plocha
– kulová 37
– kuželová 40
– – eliptická 40
– – rotační 40
– kvadratická 35
– rotační 36
– válcová 39, 40
počátek souřadného systému 26
podmínka počáteční 116, 117
podprostor 9
poloměr křivosti 76
polynom 53
– kvadratický 53
– kubický 53
– lineární 53
– Maclaurinův 86
– stupně n 53
– Taylorův 86
posloupnost 43
– divergentní 44
– iterační 92
– klesající 43
– konvergentní 44
– monotónní 43
– – ryze 43
– neklesající 43
– nerostoucí 43
– omezená 43
– – shora 43
– – zdola 43
– rostoucí 43
– vybraná 45
pravidlo
– Cramerovo 21
– l'Hospitalovo 75
proměnná
– nezávisle 47
– závisle 47
prostor
– aritmetický 5
– Eukleidův 4
– n–rozměrný 4, 5, 8
– vektorový 6
prvek matice 10
příčka dvou přímek 29
přímka v $\mathbb{E}_3$ 28
přímky

– totožné 29
– různoběžné 29
– rovnoběžné 29
– mimoběžné 29
restrikce funkce 48
rovina v $\mathbb{E}_3$ 31
roviny
– totožné 34
– rovnoběžné 34
rovnice
– charakteristická 22
– diferenciální 114
– – se separ. proměnými 115
– přímky parametrická 28
– roviny 32
– – parametrická 31
rozdíl
– dvou bodů 27
– matic 11
rozklad
– polynomu 104
– racionální funkce 105, 106
rozšířená množina reálných čísel .. 42
rozvoj determinantu 14
řádek matice 10, 11
řešení
– diferenciální rovnice 115
– – obecné 116
– – partikulární 116
– soustavy lineárních rovnic 19
– – obecné 21
– – triviální 19
separace
– kořenu 93
– proměnných 115
sloupec matice 10, 11
součet
– bodu a vektoru 27
– matic 11
– Riemannův 122
součin
– čísla a matice 11
– matic 11
– skalární 11, 26
– vektorový 27
souřadnice kartézské 26
soustava lineárních rovnic 18
– ekvivalentní 19
– homogenní 19
– nehomogenní 19
střed křivosti 76
střední hodnota funkce 123
supremum
– množiny 42
– funkce 50
tabulka zákl. neurčitých integrálů . 97
tečna ke grafu funkce 65
typ matice 10
vektor 5, 26
– aritmetický 4
– normálový 32
– směrový 28
– vlastní 22
věta
– Frobeniova 21
– Lagrangeova 71
– o existenci primitivní funkce ... 95
– o existenci Riemannova int. ... 124
– o integraci substitucí 101, 128
– o integraci per–partes 98, 127
– o nabývání mezihodnot 61
– o střední hodnotě 71
– Taylorova 86
– základní integrálního počtu ... 127
vlastnost Darbouxova 61
vnitřek intervalu 71
vzdálenost
– bodu od přímky 28
– bodu od roviny 32
– dvou bodů 4
– dvou přímek 30
vzorec
– Leibnizův 70
– Taylorův 86
závora funkce
– horní 49
– dolní 49
zbytek po n–tém členu 86
zlomek parciální 105
zobrazení 3