

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Jedná se o soustavy ve tvaru $A \cdot X = B$,

kde A je daná matice typu $m \times n$,

$X \in \mathbb{R}^n$ je sloupcový vektor n neznámých x_1, \dots, x_n ,

$B \in \mathbb{R}^m$ je daný sloupcový vektor pravých stran jednotlivých rovnic.

A se nazývá matice soustavy,

matice $(A|B)$ typu $m \times (n + 1)$ se nazývá rozšířená matice soustavy.

Následující věta obsahuje v části I nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení soustavy.

V části II je upřesněn počet řešení.

Věta I.3.7. (Frobeniova věta)

I. Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$ (n neznámých) má řešení právě tehdy, když hodnost $h(A) = h(A|B)$.

II. Je-li $h(A) = h(A|B) = n$, pak má soustava jediné řešení.

Je-li $h(A) = h(A|B) < n$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

Poznámka

V případě nekonečně mnoha řešení lze volit $n - h(A)$ neznámých.

I. Gaussova eliminační metoda pro řešení soustavy $A \cdot X = B$

1. krok: Matici $(A|B)$ upravíme na horní trojúhelníkovou.

2. krok: Podle Frobeniovy věty rozhodneme, zda soustava má řešení. Pokud ano, určíme počet řešení, tj. jediné, nebo nekonečně mnoho.

3. krok: Upravenou soustavu řešíme postupně od poslední rovnice k první rovnici (tzv. zpětný chod).

Homogenní soustava

je tvaru $A \cdot X = O$, kde $O \in \mathbb{R}^m$ je nulový vektor (sloupcový).

Má vždy **aspoň jedno řešení**, tzv. triviální $X = O$.

Důsledkem Frobeniovy věty je následující

Věta Homogenní soustava $A \cdot X = O$ se čtvercovou maticí A má **jediné řešení** $X = O \iff$ matice A je regulární, tj. $\iff \det A \neq 0$.

Struktura množiny řešení

Věta I.3.4. Množina všech řešení homogenní soustavy $A \cdot X = O$ je **podprostor** dimenze $n - h(A)$ prostoru \mathbb{R}^n .

Příklad. Dána homogenní soustava rovnic s parametrem c

$$cx + 3y + z = 0$$

$$4x - 4y + cz = 0$$

$$7x + 5y + 4z = 0$$

- a) Pro jaké c má soustava pouze nulové řešení?
b) Pro jaké c má soustava i nenulové řešení?
c) Najděte řešení pro $c = 0$. d) Najděte řešení pro $c = 2$.

Výsl.: a) pro $c \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$, neboť $\det A = 5c - 5c^2$,

b) pro $c = 0, c = 1$

c) nekonečně mnoho řešení, např.

$x = t, y = t, z = -3t, t \in \mathbb{R}$. Proveďte zkoušku !

d) Jediné řešení, $x = y = z = 0$.

Cramerovo pravidlo

Řešení soustavy $A \cdot X = B$ pomocí determinantů,
 n lineárních rovnic pro n neznámých, A je typu $n \times n$.

Je-li hodnost $h(A) = n$, pak soustava má jediné řešení
(Frobeniova věta)

\iff matice A je regulární, její $\det A \neq 0$

Pak pro neznámé x_1, \dots, x_n platí

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

kde $\Delta = \det A$,

Δ_i je determinant, který vznikne z matice A , v níž i -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran B .

Příklad. Dána soustava lineárních algebraických rovnic

$$4x - y + 5z = -1$$

$$x - y + z = 1$$

$$2x + y - 3z = 0.$$

a) Zdůvodněte, zda lze použít Cramerovo pravidlo.

b) Vypočítejte neznámou x .

Výsl.: a) ano lze, neboť $\det A = 18 \neq 0$ (matice soustavy je regulární)

b) $\Delta_x = 0$, pak $x = \frac{0}{18} = 0$.

Poznámka. Další neznámé ...

$\Delta_y = -27$, pak $y = -\frac{3}{2}$,

$\Delta_z = -9$, pak $z = -\frac{1}{2}$.

Příklad. Dána soustava s parametrem $b \in \mathbb{R}$

$$x + by + 2z = -3$$

$$bx + by + 2z = -1$$

$$y - z = 2.$$

- a) Pro které hodnoty b lze použít Cramerovo pravidlo? Zdůvodněte !
- b) Vypočítejte neznámou y v závislosti na parametru b .
- c) Rozhodněte o počtu řešení pro ty hodnoty parametru b , když nelze použít Cramerovo pravidlo.

Výsledky: a) pro $b \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$, neboť $\det A = b^2 + b - 2$,

b) pro $\Delta_y = b - 3$, pak $y = \frac{b - 3}{b^2 + b - 2}$, $b \neq -2$, $b \neq 1$.

c) Pro $b = -2$ nemá řešení. Pro $b = 1$ nemá řešení.

Příklad

Dána skupina vektorů $u = (1, 2, 2)$, $v = (1, 1, p+2)$, $w = (0, p, -2p)$.

a) Určete p , pro které daná skupina tvoří bázi v \mathbb{R}^3 .

b) Jaká je dimenze podprostoru, který je těmito vektory generován v případě kdy bázi netvoří?

c) Zvolte $p = 1$ a vyjádřete vektor $b = (2, -1, 4)$ jako kombinaci daných vektorů (pokud lze).

Výsledky: a) $p \in \mathbb{R} - \{2; 0\}$, neboť $\det A = 2p - p^2$,
kde A je matice sestavená z daných vektorů, např. po sloupcích.

b) Pro $p = 0$ dané vektory generují podprostor dimenze dva.
Totéž platí i pro $p = 2$.

c) $b = (-8)u + 10v + 5w$.