Soutavy lineárních algebraických rovnic

Jedná se o soustavy ve tvaru $A \cdot X = B$,
kde A je daná matice typu $m \times n$,
$X \in \mathbb{R}^n$ je sloupcový vektor n neznámých $x_1, \ldots, x_n$,
$B \in \mathbb{R}^m$ je daný sloupcový vektor pravých stran jednotlivých rovnic.
A se nazývá matice soustavy,
matice $(A|B)$ typu $m \times (n+1)$ se nazývá rozšířená matice soustavy.

Následující věta obsahuje v části I nutnou a postačující podmínku pro existenci řešení soustavy.
V části II je upřesněn počet řešení.

Věta I.3.7. (Frobeniova věta)

I. Soustava lineárních rovnic $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ (n neznámých) má řešení právě tehdy, když hodnost $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$.

II. Je-li $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{n}$, pak má soustava jediné řešení.

Je-li $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}) < \boldsymbol{n}$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení.

Poznámka

V případě nekonečně mnoha řešení lze volit $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{A})$ neznámých.

I. Gaussova eliminační metoda pro řešení soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$

1. krok: Matici $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B})$ upravíme na horní trojúhelníkovou.

2. krok: Podle Frobeniovy věty rozhodneme, zda soustava má řešení. Pokud ano, určíme počet řešení, tj. jediné, nebo nekonečně mnoho.

3. krok: Upravenou soustavu řešíme postupně od poslední rovnice k první rovnici (tzv. zpětný chod).

Homogenní soustava

je tvaru $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$, kde $\boldsymbol{O} \in \mathbb{R}^m$ je nulový vektor (sloupcový).

Má vždy aspoň jedno řešení, tzv. triviální $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$.

Důsledkem Frobeniovy věty je následující

Věta Homogenní soustava $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ se čtvercovou maticí A má jediné řešení $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{O} \iff$ matice A je regulární, tj. $\iff \det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

Struktura množiny řešení

Věta I.3.4. Množina všech řešení homogenní soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{O}$ je podprostor dimenze $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{h}(\boldsymbol{A})$ prostoru $\mathbb{R}^n$.

Příklad. Dána homogenní soustava rovnic s parametrem c

$$\begin{aligned} cx + 3y + z &= 0 \\ 4x - 4y + cz &= 0 \\ 7x + 5y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

a) Pro jaké c má soustava pouze nulové řešení?

b) Pro jaké c má soustava i nenulové řešení?

c) Najděte řešení pro $c = 0$. d) Najděte řešení pro $c = 2$.

Výsl.: a) pro $c \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$, neboť $\det A = 5c - 5c^2$,

b) pro $c = 0$, $c = 1$

c) nekonečně mnoho řešení, např.
$x = t$, $y = t$, $z = -3t$, $t \in \mathbb{R}$. Proveďte zkoušku !

d) Jediné řešení, $x = y = z = 0$.

Cramerovo pravidlo

Řešení soustavy $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ pomocí determinantů,
$\boldsymbol{n}$ lineárních rovnic pro $\boldsymbol{n}$ neznámých, A je typu $n \times n$.

Je-li hodnost $\boldsymbol{h(A) = n}$, pak soustava má jediné řešení
(Frobeniova věta)

$\Longleftrightarrow$ matice A je regulární, její $\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$

Pak pro neznámé $\boldsymbol{x_1, ..., x_n}$ platí

$$\boldsymbol{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}}, \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

kde $\boldsymbol{\Delta} = \mathbf{det}\,\boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{\Delta_i}$ je determinant, který vznikne z matice $\boldsymbol{A}$, v níž i-tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran $\boldsymbol{B}$.

Příklad. Dána soustava lineárních algebraických rovnic

$$\begin{aligned} 4x - y + 5z &= -1 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x + y - 3z &= 0. \end{aligned}$$

a) Zdůvodněte, zda lze použít Cramerovo pravidlo.

b) Vypočítejte neznámou x.

Výsl.: a) ano lze, neboť $\det A = 18 \neq 0$ (matice soustavy je regulární)

b) $\Delta_x = 0$, pak $x = \dfrac{0}{18} = 0$.

Poznámka. Další neznámé ...

$\Delta_y = -27$, pak $y = -\dfrac{3}{2}$,

$\Delta_z = -9$, pak $z = -\dfrac{1}{2}$.

Příklad. Dána soustava s parametrem $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + by + 2z &= -3 \\ bx + by + 2z &= -1 \\ y - z &= 2. \end{aligned}$$

a) Pro které hodnoty b lze použít Cramerovo pravidlo? Zdůvodněte !

b) Vypočítejte neznámou y v závislosti na parametru b.

c) Rozhodněte o počtu řešení pro ty hodnoty parametru b, když nelze použít Cramerovo pravidlo.

Výsl.: a) pro $b \in \mathbb{R} - \{-2; 1\}$, neboť $\det A = b^2 + b - 2$,

b) pro $\Delta_y = b - 3$, pak $y = \dfrac{b-3}{b^2+b-2}$, $b \neq -2$, $b \neq 1$.

c) Pro $b = -2$ nemá řešení. Pro $b = 1$ nemá řešení.