Tečna ke grafu funkce (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Z analytické geometrie známe tvar $y = y_0 + k(x - x_0)$. Jedná se o rovnici přímky, která prochází bodem $[x_0, y_0]$ a má směrnici k. Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak její hodnota $f'(x_0)$ je směrnicí tečny ke grafu funkce f v bodě dotyku $T = [x_0, f(x_0)]$. Tečna je tedy přímka popsaná rovnicí

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (1)$$

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak se tato rovnice redukuje na tvar $y = f(x_0)$. Tečnou je v tomto případě přímka rovnoběžná s osou x. V bodě x_0 je splněna nutná podmínka pro lokální extrém funkce f.

Normála je přímka procházející bodem T kolmo k tečně. Je-li $f'(x_0) \neq 0$, pak je to přímka daná rovnicí $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$. Je-li $f'(x_0) = 0$, pak normálou je přímka daná rovnicí $x = x_0$, tj. přímka rovnoběžná s osou y.

Směrnice přímky je tangens **orientovaného** úhlu mezi kladným směrem osy x a danou přímkou. Tento úhel má kladnou hodnotu ve směru proti pohybu hodinových ručiček, v opačném směru má hodnotu zápornou. Pro stanovení tohoto úhlu, tj. sklonu tečny, je vhodné znát následující hodnoty funkce tangens.

x (rad)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\operatorname{tg} x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

Pro $x \to \pi/2_-$ je $\lim \operatorname{tg} x = +\infty$.

Lineární funkce na pravé straně rovnice (1) představuje Taylorův polynom 1. stupně funkce f o středu $x = x_0$, který budeme značit $T_1(x)$. Rovnici tečny lze tedy psát ve tvaru $y = T_1(x)$. Pro $x \in U(x_0)$, tj. z okolí bodu x_0, můžeme pak hodnoty funkce f aproximovat (přibližně nahradit) výpočtem $T_1(x)$. Velikost chyby tohoto výpočtu (ve smyslu nepřesnosti), tj. rozdíl $f(x) - T_1(x)$, označujeme $R_2(x)$. Zajímá-li nás horní odhad této nepřesnosti, pak použijeme např. Lagrangeův tvar zbytku. Tomu je věnován text o Taylorově polynomu na této webové stránce.

Poznámka. Aproximace $f(x) \doteq T_1(x)$ je základem některých velmi efektivních numerických metod, pomocí nichž řešíme přibližně důležité matematické úlohy. Příkladem je přibližné řešení rovnice $f(x) = 0$ metodou Newtonovou (metoda tečen)nebo Eulerova metoda pro řešení obyčejné diferenciální rovnice.

Příklad. Je dána funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) Určete definiční obory $D(f)$ a $D(f')$.

b) Napište rovnici tečny a rovnici normály ke grafu dané funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 1$.

c) Obě přímky načrtněte do jednoho obrázku. Popište chování dané funkce v okolí bodu $x_0 = 1$, tj. zda je rostoucí nebo klesající, jak rychle (odhad sklonu tečny).

d) Pomocí rovnice tečny vypočítejte přibližně hodnotu funkce f v bodě $x = 1.3$.

e) **(pouze zkouška Alfa)** Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_2(x)$. Odhadněte velikost chyby při výpočtu přibližné hodnoty funkce f v bodě $x = 1.3$ pomocí polynomu $T_1(x)$, tj. pomocí rovnice tečny.

Řešení. Derivace $f'(x) = \dfrac{1}{3}\,x^{-2/3} = 1/(3\cdot\sqrt[3]{x^2})$, $D(f) = (-\infty,\infty)$, $D(f') = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$,
$f(1) = 1$, $f'(1) = 1/3$, rovnice tečny: $y = 1 + \dfrac{1}{3}\,(x-1)$, rovnice normály: $y = 1 - 3(x-1)$.
c) Derivace f' je spojitá v $(0,\infty)$, je tedy spojitá v okolí bodu $x_0 = 1$, jehož poloměr je menší než jedna. Z hodnoty $f'(1) = 1/3$ pak plyne, že v nějakém okolí bodu $x_0 = 1$ je daná funkce f rostoucí a sklon tečny je přibližně 20^o. d) $f(1.3) \doteq 1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{10} = 11/10 = 1.1$.
e) (pouze zkouška Alfa) $f''(x) = -\dfrac{2}{9}\,x^{-5/3} = -2/(9\cdot\sqrt[3]{x^5})$,

Vyjádříme Lagrangeův tvar zbytku: $R_2(x) = f(x) - T_1(x) = \dfrac{1}{2!}\cdot f''(\xi)\,(x-1)^2 = \dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{2}{9}\,\xi^{-5/3})\,(x-1)^2$, kde ξ leží mezi $x_0 = 1$ a x.

Hodnota v bodě $x = 1.3$:
$R_2(1.3) = f(1.3) - T_1(1.3) = \dfrac{1}{2}\cdot(-\dfrac{2}{9}\,\xi^{-5/3})\left(\dfrac{3}{10}\right)^2$, kde $\xi \in (1, 1.3)$, přesnou polohu bodu ξ však neznáme.

Pro odhad chyby vypočtené aproximace použijeme toho, že funkce $g(\xi) = \xi^{-5/3} = 1/\sqrt[3]{\xi^5}$ je klesající na intervalu $(1,\ 1.3)$. Na tomto intervalu tedy lze $g(\xi)$ odhadnout shora hodnotou $g(1) = 1$.

$|R_2(1.3)| \le \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{9}\cdot\dfrac{9}{100} = \dfrac{1}{100}$. Tento výsledek říká, že hodnota $\sqrt[3]{1.3}$ je přibližně 1.1 s tím, že přesná hodnota leží v intervalu $\left(\dfrac{11}{10} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{11}{10} + \dfrac{1}{100}\right) = (1.09,\ 1.11)$.

Poznámka. Ze znalosti 2. derivace v bodě x_0 lze určit tvar grafu funkce v okolí tohoto bodu (ryze konvexní, resp. konkávní) a graf funkce f načrtnout, případně i s tečnou. Pro danou funkci je $f''(x) = -2/(9\cdot\sqrt[3]{x^5})$, což je funkce spojitá v okolí bodu $x_0 = 1$. Hodnota $f''(1) = -2/9$, takže v okolí bodu $x_0 = 1$ je zadaná funkce ryze konkávní.

Další úlohy k samostatnému procvičení lze nalézt v doporučené literatuře, kde jsou i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: Diferenciální počet funkcé jedné proměnné (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.