Trojný integrál $\int\int\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Nutností je znalost AG v $\mathbb{E}_3$, kvadratické plochy

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_3$ je omezená množina, funkce $f(x,y,z)$ je omezená na M

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenního tělesa

I. (Speciální případ)

Trojný integrál na kvádru

a) dělení D

b) volba V bodů

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V:

$s(f, D, V)$

Definice.
Říkáme, že funkce $f(x,y,z)$ je integrovatelná na kvádru K, jestliže existuje vlastní limita Riemannových součtů, tj. $\lim_{\|D\|\to 0} s(f,D,V) = S$.

II. Trojný integrál na obecné množině M

převedeme na integrál na kvádru, viz. kap. II.5 (J. Neustupa).

Fubiniova věta - výpočet $\int\int\int_M f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

převod integrálu trojného na trojnásobný,

je-li M tzv. elementární obor integrace

Věta Fubiniova (II.7.2.).

Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na M, kde M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy.

Pak existuje

$$\iiint_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_{M_{xy}} \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Poznámka: Podobně (cyklicky) při elementárním oboru vzhledem k rovině xz, resp. yz.

Př.

Existence trojného integrálu Analogicky jako pro dvojný integrál

Nutná podmínka pro existenci:
M je omezená množina, fce f je omezená na M.

Postačující podmínka pro existenci
1. varianta
Funkce $f(x, y)$ je spojitá na M, kde M je
elementární obor integrace - viz Fubiniova věta

2. Pro obecnější podm. potřebujeme nový pojem:
Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá měřitelná,
je-li omezená a existuje integrál $\displaystyle\int\int_M 1 \cdot \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Jeho hodnotu značíme $\mu_2(M)$ a nazýváme
dvourozměrnou Jordanovou mírou množiny M

Věta.
Množina $M \subset \mathbb{E}_2$ je měřitelná $\Longleftrightarrow$ M je omezená a $\mu_2(\partial M) = 0$.

Příklady
Měřitelná je libovolná množina M v $\mathbb{E}_2$, jejíž hranice ∂M je omezená křivka, neboť $\mu_2(\partial M) = 0$.

Věta II.2.1. (Postačující podmínka pro existenci)
Nechť M je uzavřená a měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$ a fce f je spojitá na M.
Pak existuje $\displaystyle\iint_M f \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

V odst. II.2.1 jsou uvedeny další varianty postačující podmínky, např.
fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_2(D) = 0$

II.2 Některé vlastnosti dvojného integrálu

(za předpokladu existence integrálů)

a) $\displaystyle\iint_M \mathbf{konst} \cdot f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathbf{konst} \cdot \iint_M f \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

b) $\displaystyle\iint_M (f+g) = \iint_M f + \iint_M g.$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak

$$\iint_{M_1 \cup M_2} f = \iint_{M_1} f + \iint_{M_2} f.$$

d) Je-li $f(x,y) \geq 0$ na M, pak $\displaystyle\iint_M f \geq 0.$

e) Je-li f omezená fce na mn. M a $\mu_2(M) = 0$, pak $\displaystyle\iint_M f = 0.$

Další aplikace - mechanické charakteristiky desky

Aplikace integrálů (přehled obecně)

Symbol $\int_M f \, \mathrm{d}X$

v tomto přehledu znamená integrál

a) dvojný

b) trojný

c) křivkový

d) plošný