

Trojný integrál $\int \int \int_M f(x, y, z) \, dx dy dz$

Nutností je znalost AG v \mathbb{E}_3 , kvadratické plochy

Předpoklad (NP pro existenci):

$M \subset \mathbb{E}_3$ je omezená množina, funkce $f(x, y, z)$ je omezená na M

Fyzikální aplikace: hmotnost nehomogenního tělesa

I. (Speciální případ)

Trojný integrál na kvádru

a) dělení D

b) volba V bodů

c) Riemannův součet funkce f při dělení D a volbě bodů V :

$s(f, D, V)$

Definice.

Říkáme, že funkce $f(x, y, z)$ je integrovatelná na kvádru K ,
jestliže existuje vlastní limita Riemannových součtů,

$$\text{tj. } \lim_{\|D\| \rightarrow 0} s(f, D, V) = S.$$

II. Trojný integrál na obecné množině M

převodeme na integrál na kvádru, viz. kap. II.5 (J. Neustupa).

Fubiniova věta - výpočet $\int \int \int_M f \, dx \, dy \, dz$
převod integrálu trojného na trojnásobný,
je-li M tzv. elementární obor integrace

Věta Fubiniova (II.7.2.).

Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na M , kde M je elementární obor integrace vzhledem k rovině xy .

Pak existuje

$$\begin{aligned} & \int \int \int_M f(x, y, z) \, dx dy dz = \\ & = \int \int_{M_{xy}} \left(\int_{\Phi_1(x,y)}^{\Phi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy \end{aligned}$$

Poznámka: Podobně (cyklicky) při elementárním oboru vzhledem k rovině xz , resp. yz .

Př.

Existence trojného integrálu Analogicky jako pro dvojný integrál

Nutná podmínka pro existenci:

M je omezená množina, fce f je omezená na M .

Postačující podmínka pro existenci

1. varianta

Funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na M , kde M je elementární obor integrace - viz Fubiniova věta pro trojný integrál.

2. Pro obecnější podm. potřebujeme nový pojem:

Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá **měřitelná**,

je-li omezená a existuje integrál $\int \int \int_M 1 \cdot dx dy dz$.

Jeho hodnotu značíme $\mu_3(M)$ a nazýváme

třírozměrnou Jordanovou mírou množiny M

Věta.

Množina $M \subset \mathbb{E}_3$ je měřitelná $\iff M$ je omezená a $\mu_3(\partial M) = 0$.

Příklady

Měřitelná je libovolná množina M v \mathbb{E}_3 , jejíž hranice ∂M je jednoduchá (po částech) hladká plocha, neboť $\mu_3(\partial M) = 0$.

Věta II.6.1. (Postačující podmínka pro existenci)

Nechť M je uzavřená a měřitelná množina v \mathbb{E}_3 a fce f je spojitá na M .

Pak existuje $\int \int \int_M f \, dx dy$.

V odst. II.6.1 jsou uvedeny další varianty postačující podmínky, např.

fce f je spojitá a omezená na $M \setminus D$, kde M je měřitelná a $\mu_3(D) = 0$

II.2 Některé vlastnosti trojného integrálu (za předpokladu existence integrálů)

a) $\int \int \int_M \text{konst} \cdot f \, dx dy dz = \text{konst} \cdot \int \int \int_M f \, dx dy dz.$

b) $\int \int \int_M (f + g) = \int \int \int_M f + \int \int \int_M g.$

c) Je-li $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak
 $\int \int \int_{M_1 \cup M_2} f = \int \int \int_{M_1} f + \int \int \int_{M_2} f.$

d) Je-li $f(x, y, z) \geq 0$ na M , pak $\int \int \int_M f \geq 0.$

e) Je-li f omezená fce na M a $\mu_3(M) = 0$, pak $\int \int \int_M f = 0.$

Některé aplikace integrálů (přehled vzorců obecně)

Symbol $\int_D f(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$ znamená integrál

a) dvojný, b) trojný, c) křivkový, d) plošný

1. míra množiny: $\mu(D) = \int_D 1 \cdot d\mathbf{X}$

2. hmotnost: $m = \int_D \varrho(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$

3. moment setrvačnosti vzhledem k útvaru U (bod, přímka, rovina):

$$J_U = \int_D (d_U)^2 \cdot \varrho(\mathbf{X}) d\mathbf{X}$$

d_U je vzdálenost bodu \mathbf{X} od útvaru U .

4. souřadnice těžiště T , statický moment M_U :

$$x_T = \frac{1}{m} \int_D x \cdot \varrho(X) dX$$

cyklická záměna pro y_T, z_T

5. objem "válcového" tělesa

$$V = \int \int_D f(x, y) dx dy$$

Příklad.

Cylindrické souřadnice v \mathbb{E}_3

$[r, \varphi, w]$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \sin(\varphi)$$

$$z = w$$

Jacobiho determinant (jakobián) $\mathbf{J} = r$

Zobecněné cylindrické souřadnice v \mathbb{E}_3

$[r, \varphi, w]$

$$x = a r \cos(\varphi) + x_0$$

$$y = b r \sin(\varphi) + y_0$$

$$z = c w + z_0$$

jakobián $\mathbf{J} = abc r$

Sférické souřadnice v \mathbb{E}_3 $[r, \varphi, \vartheta]$

$$x = r \cos(\vartheta) \cos(\varphi)$$

$$y = r \cos(\vartheta) \sin(\varphi)$$

$$z = r \sin(\vartheta)$$

$$\text{jakobián } J = r^2 \cos(\vartheta)$$

Zobecněné sférické souřadnice v \mathbb{E}_3 $[r, \varphi, \vartheta]$

$$x = a r \cos(\vartheta) \cos(\varphi) + x_0$$

$$y = b r \cos(\vartheta) \sin(\varphi) + y_0$$

$$z = c r \sin(\vartheta) + z_0$$

$$\text{jakobián } J = abc r^2 \cos(\vartheta)$$