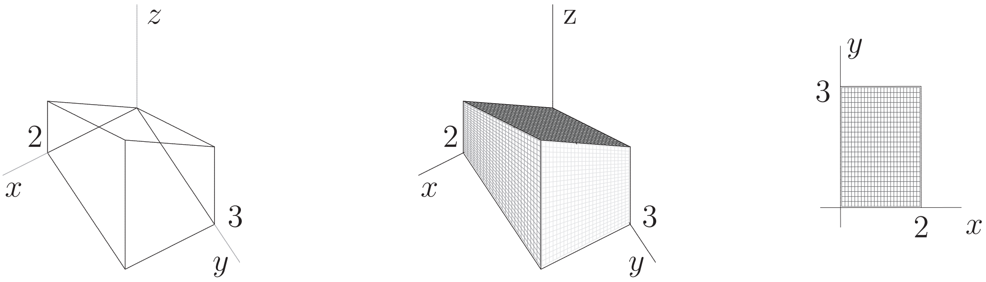
III.4. Fubiniova (Fubiniho) věta pro trojný integrál

• Vypočítejte trojné integrály na daných množinách $W \subset \mathbb{E}_3$:

***Příklad* 342**. $I = \iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz;$

$$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le z \le x+y,\ 0 \le y \le 3,\ 0 \le x \le 2\}$$

Řešení :



$$I = \int_0^2 \Big(\int_0^3 \Big(\int_0^{x+y} (x^2+y^2)\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^2+y^2) \Big[z \Big]_0^{x+y} dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^2+y^2)(x+y)\,dy \Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^3 (x^3+x^2y+xy^2+y^3)\,dy \Big)\,dx =$$
$$= \int_0^2 \Big[x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4} \Big]_0^3 dx = \int_0^2 \Big(3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 9x + \frac{81}{4} \Big)\,dx =$$
$$= \Big[\frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{81}{4}x \Big]_0^2 = \frac{165}{2}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 343**. $I = \iiint_W \frac{x}{y}(z+1)^2\,dx\,dy\,dz;$

$$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x \le 1,\ 1 \le y \le \mathrm{e}^2,\ 0 \le z \le 2\}$$

Řešení :

$$I = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{y}\,dy \cdot \int_0^2 (z+1)^2\,dx = \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 \cdot \Big[\ln|y|\Big]_1^{\mathrm{e}^2} \cdot \Big[\frac{(z+1)^3}{3}\Big]_0^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (9 - \frac{1}{3}) = \frac{26}{3}. \qquad \blacksquare$$

POZNÁMKA: Je-li funkce typu $f(x,y,z) = g_1(x) \cdot g_2(y) \cdot g_3(z)$ a množina D je kvádr $D = \langle a,\, b\rangle \times \langle c,\, d\rangle \times \langle r,\, s\rangle$, pak

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b g_1(x)\,dx \cdot \int_c^d g_2(y)\,dy \cdot \int_r^s g_3(z)\,dz.$$

***Příklad* 344**.* $I = \iiint_W z^3 y \sin x\,dx\,dy\,dz;$

$$W = \Big\{ [x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le z \le \sin x,\ 0 \le y \le \sin^2 x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \Big\}$$

Řešení :

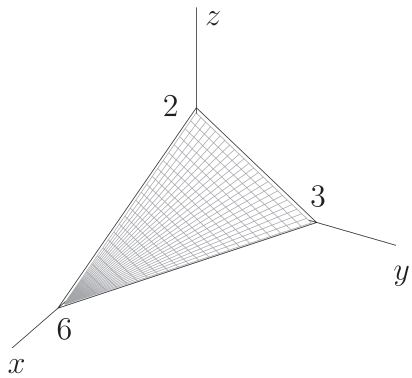
$$I = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} \Big(\int_0^{\sin x} y \sin x \cdot z^3\,dz \Big)\,dy \Big)\,dx = \int_0^{\pi/2} \Big(\int_0^{\sin^2 x} y \sin x \cdot \Big[\frac{z^4}{4} \Big]_0^{\sin x} dy \Big)\,dx =$$

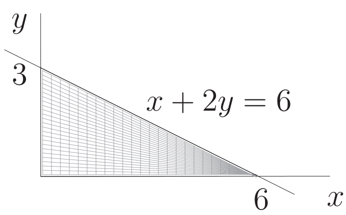
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sin^2 x} y\sin^5 x\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^5 x\cdot\Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^{\sin^2 x}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2}\sin^9 x\,dx =$$

(podle Wallisovy formule viz př. 21) $= \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\cdot 1 = \dfrac{16}{315}.$ ■

***Příklad* 345**. Vypočítejte $\displaystyle\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(1+3z)^3}$, kde W je čtyřstěn omezený rovinami $x+2y+3z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

Řešení : Obecnou rovnici roviny napíšeme v kanonickém tvaru $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{2}=1$





$$0 \le z \le \frac{6-x-2y}{3}$$
$$0 \le y \le \frac{6-x}{2}$$
$$0 \le x \le 6$$

$$I = \int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(\int_0^{\frac{6-x-2y}{3}}\frac{1}{(1+3z)^3}\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big[\frac{-1}{2(1+3y)^2}\Big]_0^{\frac{6-x-2y}{3}}dy\Big)\,dx =$$

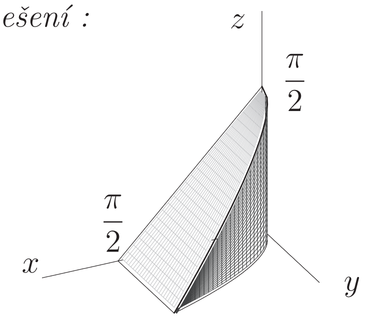
$$= \frac{1}{3}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(\frac{-1}{2(7-x-2y)^2}+\frac{1}{2}\Big)\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{6}\int_0^6\Big(\int_0^{\frac{6-x}{2}}\Big(1-\frac{1}{(7-x-2y)^2}\Big)\,dy\Big)\,dx =$$

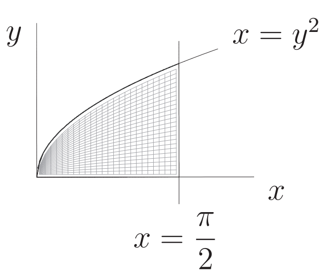
$$= \frac{1}{6}\int_0^6\Big[y-\frac{1}{2(7-x-2y)}\Big]_0^{\frac{6-x}{2}}dx = \frac{1}{6}\int_0^6\Big(\frac{6-x}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(7-x)}\Big)\,dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^6\Big(5-x-\frac{1}{x-7}\Big)\,dx = \frac{1}{12}\Big[5x-\frac{x^2}{2}-\ln|x-7|\Big]_0^6 = \frac{12+\ln 7}{12} = 1+\frac{\ln 7}{12}.$$ ■

***Příklad* 346**. Vypočítejte $\displaystyle\iiint_W y\cdot\cos(x+z)\,dx\,dy\,dz$, kde množina W je omezená plochami $y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}.$

Řešení :





$$0 \le z \le \frac{\pi}{2}-x$$
$$0 \le y \le \sqrt{x}$$
$$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$I = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cdot\cos(x+z)\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}} y\Big[\sin(x+z)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-x}dy\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}} y\Big(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\pi/2}\Big(\int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)\,dy\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x) x \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x, & v' = \sin x \\ u' = 1, & v = -\cos x \end{array} \right| = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \Big[-x \cos x + \sin x \Big]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

■

• Vypočítejte integrály na množinách W, které jsou omezeny danými plochami :

347. $\displaystyle\iiint_W (x + y + z) \, dx \, dy \, dz, \quad W : x = 1, \ y = 0, \ y = x, \ z = 0, \ z = \sqrt{2}$ $\left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$

348. $\displaystyle\iiint_W x \, dx \, dy \, dz, \quad W : x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ z = xy, \ x + y = 1$ $\left[\frac{1}{60}\right]$

349. $\displaystyle\iiint_W x^2 y z^3 \, dx \, dy \, dz, \quad W : z = xy, \ y = x, \ y = 1, \ z = 0$ $\left[\frac{1}{364}\right]$

350. $\displaystyle\iiint_W (x + y) \, dx \, dy \, dz, \quad W : x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ x = a, \ y = a, \ z = a^2 - x^2 - y^2$ $\left[\frac{a^5}{6}\right]$

351. $\displaystyle\iiint_W xz \, dx \, dy \, dz, \quad W : x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ x + y = 1, \ z = x^2 + y^2 + 1$ $\left[\frac{7}{120}\right]$

III.5. Substituční metoda pro trojný integrál

• Spočítejte integrály substitucí do cylindrických souřadnic :

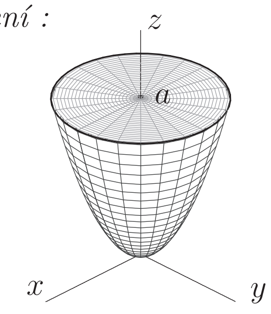
$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = w \end{array} \right\} \qquad J = \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{array} \right| = r$$

$$r > 0 \ ; \quad 0 \le \varphi < 2\pi \ ;$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

***Příklad* 352**. $\displaystyle\iiint_W (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz,$

$$W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 \le az, \ z \le a, \ (a > 0)\}$$

Řešení :



W je část vnitřku rotačního paraboloidu :

$$x^2 + y^2 \le az \Longrightarrow r^2 \le aw \Longrightarrow \frac{r^2}{a} \le w \le a,$$

$$z = a : \quad x^2 + y^2 = a^2 \Longrightarrow r^2 = a^2,$$

$$0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

$$\iiint_W (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_{\frac{r^2}{a}}^a r^2 r \, dw \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^3 \Big[w \Big]_{\frac{r^2}{a}}^a dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^a r^3\Big(a - \frac{r^2}{a}\Big)\,dr = 2\pi\Big[a\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6a}\Big]_0^a = 2\pi\Big(\frac{a^5}{4} - \frac{a^5}{6}\Big) = \frac{2\pi\cdot a^5}{12} = \frac{\pi a^5}{6}.$$

V tomto příkladě jsme mohli postupovat i bez použití cylindrických souřadnic. Mohli jsme vyjádřit z přímo : $\dfrac{x^2+y^2}{a} \le z \le a$ a potom vzít v úvahu průmět tělesa do roviny (xy), což je řez tělesa rovinou $z = a$ tj. $x^2+y^2 \le a^2$ a použít polární souřadnice pro dvojný integrál. Tedy

$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+y^2\le a} \Big(\int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a (x^2+y^2)\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

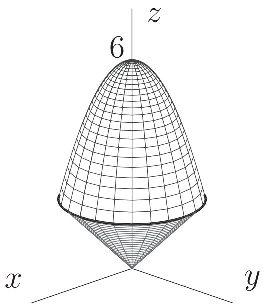
$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le a} (x^2+y^2)\Big[z\Big]_{\frac{x^2+y^2}{a}}^a\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le a} (x^2+y^2)\Big(a - \frac{x^2+y^2}{a}\Big)\,dx\,dy =$$

$$= \left|\begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi & | & 0\le\varphi\le 2\pi \\ J = r & & \end{array}\right| = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\big(a - \frac{r^2}{a}\big)\,r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi a^5}{6}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 353**. $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$

$$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 6 - x^2 - y^2\}$$

Řešení :



$z = \sqrt{x^2+y^2}$ je rovnice rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku;
$z = 6 - x^2 - y^2$ je rovnice rotačního paraboloidu.
Obě plochy mají společnou osu rotace z, a proto se protínají v kružnici, jejíž poloměr dostaneme ze soustavy :

$$\begin{cases} z^2 = x^2+y^2, \\ z = 6 - x^2 - y^2. \end{cases} \quad \text{Tedy } z = 6 - z^2,\ z^2+z-6 = 0,$$

$(z-2)(z+3) = 0$. Úloze vyhovuje řešení $z = 2 \Longrightarrow x^2+y^2 = 4$.

Použijeme cylindrické souřadnice a určíme příslušné meze : $\begin{cases} r \le w \le 6 - r^2 \\ 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2\Big(\int_r^{6-r^2} r\cdot r\,dw\Big)\,dr\Big)\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(6 - r^2 - r)\,dr\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot\Big[\frac{6r^3}{3} - \frac{r^5}{5} - \frac{r^4}{4}\Big]_0^2 = 2\pi\Big(16 - \frac{32}{5} - 4\Big) = \frac{56\pi}{5}.$$

$\blacksquare$

• Spočítejte integrály substitucí do sférických souřadnic :

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \end{array}\right\} \qquad J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial\vartheta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\vartheta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\vartheta} \end{vmatrix} = r^2\cos\vartheta$$

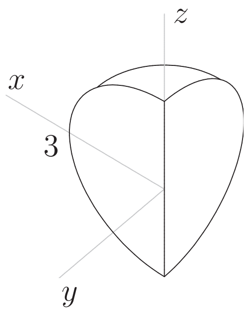
$r > 0$; $0 \le \varphi < 2\pi$; $-\dfrac{\pi}{2} < \vartheta < \dfrac{\pi}{2}$;

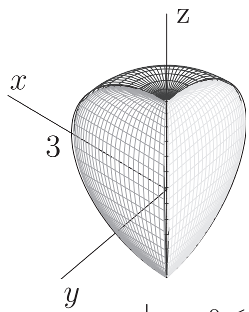
$x^2+y^2+z^2 = r^2$;

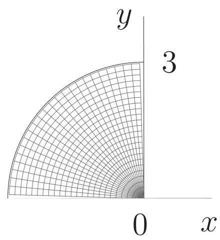
***Příklad* 354.** $\displaystyle\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$

$$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \le 0\}$$

Řešení :







$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \left| \begin{array}{c} 0 \le r \le 3 \\ \frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(\int_0^3 r \cdot r^2 \cos\vartheta\,dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\,d\vartheta \cdot \int_{3\pi/2}^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^3 r^3\,dr =$$

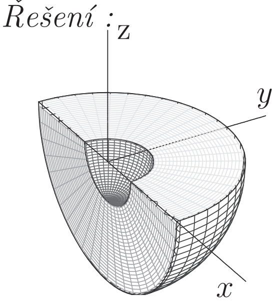
$$= 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{81}{4} = \frac{81}{4}\pi.$$

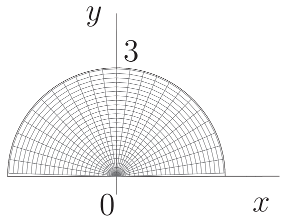
■

***Příklad* 355.** $\displaystyle\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz,$

$$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ y \ge 0,\ z \le 0\}$$

Řešení :





$$\iiint_W (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} 1 \le r \le 3 & & x^2+y^2 = r^2\cos^2\vartheta \\ 0 \le \varphi \le \pi & | & dx\,dy\,dz = J\,dr\,d\varphi\,d\vartheta \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le 0 & & J = r^2\cos\vartheta \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^3 r^2\cos^2\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta\,dr \right) d\varphi \right) d\vartheta = \int_{-\pi/2}^{0} \cos^3\vartheta\,d\vartheta \cdot \int_0^{\pi} 1 d\varphi \cdot \int_1^3 r^4\,dr =$$

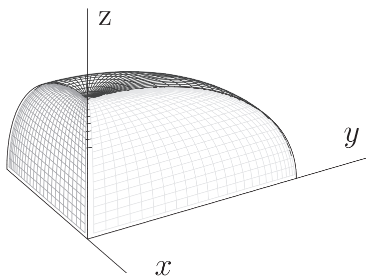
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta\,d\vartheta \cdot \pi \cdot \left[\frac{r^5}{5} \right]_1^3 = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot \frac{242}{5} = \frac{484}{15}\pi.$$

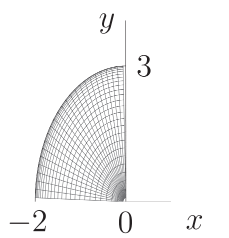
■

***Příklad* 356.** $\displaystyle\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz,$

$$W = \left\{ [x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{9} + \tfrac{z^2}{4} \le 1,\ x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0 \right\}$$

Řešení : Použijeme zobecněné sférické souřadnice.





$$\iiint_W xy\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left| \begin{array}{lcc} x = 2r\cos\varphi\cos\vartheta & & 0 \le r \le 1 \\ y = 3r\sin\varphi\cos\vartheta & | & \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ z = 2r\sin\vartheta & & \\ J = 12r^2\cos\vartheta & & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big(\int_0^1 6r^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos^2\vartheta \cdot 12r^2 \cos\vartheta \, dr \Big) \, d\varphi \Big) \, d\vartheta =$$

$$= 72 \cdot \Big[\frac{r^5}{5}\Big]_0^1 \cdot \Big[\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cdot \Big[\frac{2}{3} \cdot 1\Big] = -\frac{24}{5}. \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 357**. Vypočítejte integrál $\iiint_W z^3 \, dx \, dy \, dz$,

$$W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x \le 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}$$

Řešení : Použijeme zobecněné sférické souřadnice :

$$\left.\begin{array}{l} x = ar\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = br\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = cr\sin\vartheta \end{array}\right\} \qquad J = abcr^2\cos\vartheta, \qquad \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\iiint_W z^3 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \Big(\int_0^1 c^3 r^3 \sin^3\vartheta \cdot abcr^2 \cos\vartheta \, dr \Big) d\,\varphi \Big) \, d\,\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \cdot \int_0^1 r^5 \, dr = abc^4 \Big[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \Big[\frac{r^6}{6}\Big]_0^1 = \frac{abc^4\pi}{48}. \qquad \blacksquare$$

• Vypočítejte integrály :

358. $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - 4} \, dx \, dy \, dz$,
$W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1,\ y \ge 0,\ z \le 0\}$ $\Big[\pi\Big(\frac{9}{2} + 16\ln 3\Big)\Big]$

359. $\displaystyle\iiint_W x^2 y \, dx \, dy \, dz$, $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : z \le 4 - x^2 - y^2,\ y \ge 0,\ z \ge 0\}$ $\Big[\frac{512}{105}\Big]$

360. $\displaystyle\iiint_W (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$, $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : 4x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} \le 1\}$ $[4\pi]$

361. $\displaystyle\iiint_W \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz$,
$W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \le 0,\ z \ge 0\}$ $\Big[\frac{\pi(8 - 3\sqrt{3})}{6}\Big]$

362. $\displaystyle\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$,
$W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2 - 2x + y^2 \le 0,\ -1 \le z \le 1\}$ $\Big[\frac{11}{3}\pi\Big]$

363. $\displaystyle\iiint_W xy \, dx \, dy \, dz$,
$W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : 0 \le x^2 + z^2 \le 4,\ 0 \le y \le 4 - x^2 - z^2,\ x \ge 0\}$
(Návod : cylindrické souř. $x = r\cos\varphi, y = w, z = r\sin\varphi$) $\Big[\frac{1024}{105}\Big]$

III.6. Aplikace trojných integrálů

***Příklad* 364**. Užitím vzorce pro výpočet objemu tělesa pomocí trojného integrálu (tj. $V = \iiint_T 1\,dx\,dy\,dz$) ukažte, že objem tělesa $T = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : [x,y] \in B \subset \mathbb{E}_3,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$ “pod “ grafem funkce $z = f(x,y)$, která je spojitá na B, B je měřitelná množina v $\mathbb{E}_2$, lze spočítat pomocí dvojného integrálu $\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$.

Řešení : Těleso T je elementárním oborem integrace vzhledem k rovině (x,y) a proto lze přímo aplikovat Fubiniovu větu pro trojný integrál.

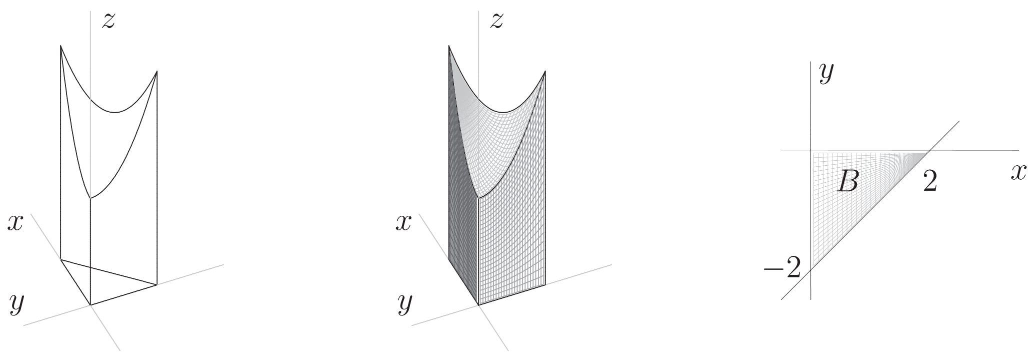
$$\iiint_T 1\,dx\,dy\,dz \overset{Fubini}{=} \iint_B \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dx\,dy = \iint_B \big[z\big]_0^{f(x,y)} dx\,dy = \iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

POZNÁMKA : Vzhledem k linearitě integrálu lze tento postup zobecnit pro tělesa, která jsou (ve směru osy z) omezena shora i zdola ve smyslu $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$. I zde lze přímo aplikovat Fubiniovu větu, z níž dostáváme $V = \iint_B \big(f_2(x,y) - f_1(x,y)\big)\,dx\,dy$.

- Vypočítejte objem tělesa W omezeného plochami :

***Příklad* 365**. $z = x^2 + y^2 + 4,\ x - y = 2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

Řešení : W je část trojbokého hranolu se základnou v rovině $z = 0$. Hranol je ”shora” omezený rotačním paraboloidem s vrcholem $[0,0,4]$.



$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \left| \begin{array}{ll} W: & 0 \le z \le x^2 + y^2 + 4 \\ & x - 2 \le y \le 0 \\ & 0 \le x \le 2 \end{array} \right| = \left(\iint_B z(x,y)\,dx\,dy \right) =$$

$$= \int_0^2 \Big(\int_{x-2}^0 \Big(\int_0^{x^2+y^2+4} 1\,dz \Big) dy \Big) dx = \int_0^2 \Big(\int_{x-2}^0 (x^2 + y^2 + 4)\,dy \Big) dx =$$

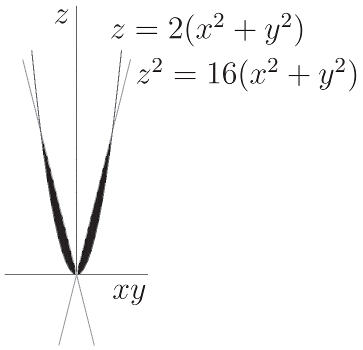
$$= \int_0^2 \Big[x^2 y + \frac{y^3}{3} + 4y \Big]_{x-2}^0 dx = -\int_0^2 \Big(x^2(x-2) + \frac{(x-2)^3}{3} + 4(x-2) \Big) dx =$$

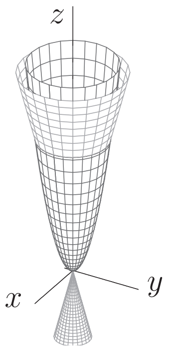
$$= -\Big[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{(x-2)^4}{12} + 2x^2 - 8x \Big]_0^2 = \frac{32}{3}$$

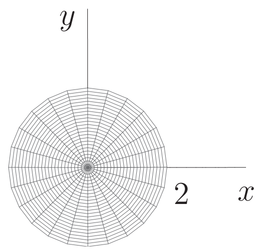
■

***Příklad* 366**. $z = 2(x^2 + y^2),\ z^2 = 16(x^2 + y^2)$

Řešení : $W : z = 2(x^2 + y^2)$ - rovnice paraboloidu
$z^2 = 16(x^2 + y^2)$ - rovnice kuželové plochy







$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \big(\text{použijeme cylindrické souřadnice}\big)$$

$$= \left| \begin{array}{llll} x = r\cos\varphi & | & 2(x^2+y^2) \le z \le 4\sqrt{x^2+y^2} \implies & 2r^2 \le w \le 4r \\ y = r\sin\varphi & & 2r^2 \le 4r & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = w & & r \le 2 \implies & 0 \le r \le 2 \\ J = r & & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{2r^2}^{4r} r\,dw \right) dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r \Big[w\Big]_{2r^2}^{4r} r \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \cdot \int_0^2 r(4r - 2r^2)\,dr =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{4}{3}r^3 - \frac{2r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi$$

■

***Příklad* 367**. $z = 1 - x^2 - 4y^2,\ z = 0$

Řešení : Plocha $z = 1 - x^2 - 4y^2$ je eliptickým paraboloidem s vrcholem v bodě $[0, 0, 1]$.

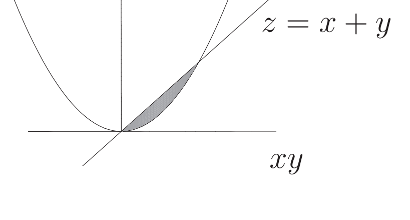
$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1} \left(\int_0^{1-x^2-4y^2} 1\,dz \right) dx\,dy = \iint\limits_{x^2+4y^2\le 1} \left(1 - x^2 - 4y^2\right) dx\,dy =$$

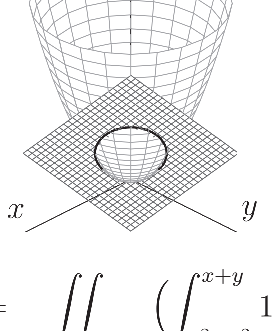
$$= \left| \begin{array}{lll} x = r\cos\varphi & & 0 \le r \le 1 \\ y = \dfrac{r}{2}\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = \dfrac{r}{2} & & \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - r^2) \cdot \frac{r}{2}\,dr \right) d\varphi = \frac{2\pi}{2} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

■

***Příklad* 368**. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$

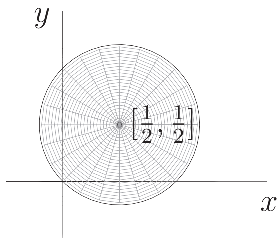
Řešení : Plocha je ohraničena rotačním paraboloidem s vrcholem v počátku souřadnic a rovinou, která prochází počátkem.





$$V = \iiint_W 1\,dx\,dy\,dz = \left| \begin{array}{c} x^2 + y^2 \le z \le x + y \\ \{[x, y] \in \mathbb{E}_2 : x^2 + y^2 \le x + y\} \end{array} \right| = \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y} \left(\int_{x^2+y^2}^{x+y} 1\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le x+y} \left(x + y - x^2 - y^2\right) dx\,dy = \left| \begin{array}{c} x+y-x^2-y^2 = \frac{1}{2} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \\ x^2+y^2 \le x+y \Longrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2} \end{array} \right| =$$



$$= \left| \begin{array}{lcl} x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi & & 0 \le r \le \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & & \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{1/2}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) r\,dr \right) d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1/2}} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 369**. Určete hmotnost koule, jestliže hustota $\varrho(x, y, z)$ je rovna čtverci vzdálenosti od středu koule.

Řešení : Zvolíme počátek soustavy souřadnic ve středu koule. Pak koule je popsána nerovnicí $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ a hustota $\varrho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

$$m = \iiint_W \varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

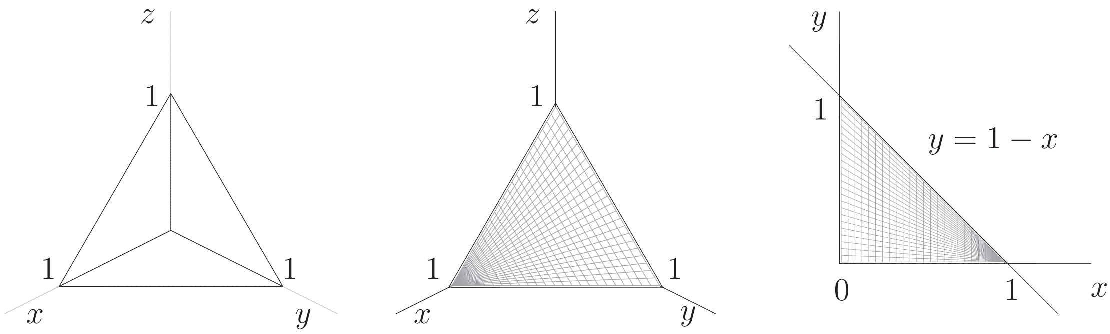
$$= \left| \begin{array}{lcc} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & | & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & & -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & & \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^2 \cdot r^2 \cos\vartheta\,dr \right) d\vartheta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^4 \cos\vartheta\,dr \right) d\vartheta \right) d\varphi = 2\pi \Big[\sin\vartheta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4\pi a^5}{5} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 370**. Určete hmotnost a x-ovou souřadnici těžiště tělesa omezeného rovinami $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x + y + z = 1$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = 1$.

Řešení : Hmotnost tělesa při $\varrho = 1$ se číselně rovná objemu.

Těleso je čtyřstěn a jeho objem je roven $\frac{1}{6}$ objemu krychle o hraně 1.



$$m = V \cdot \varrho = \frac{1}{6} \cdot 1 \qquad x_T = \frac{M_{yz}}{m},$$

$$M_{yz} = \iiint_W x \cdot \varrho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

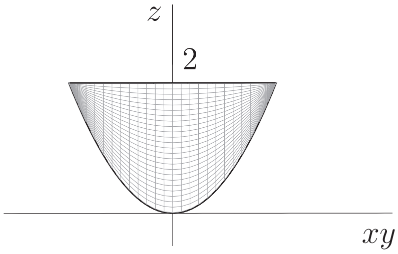
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x\,dz \right) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x(1 - x - y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 x\Big[(1-x)y - \frac{y^2}{2}\Big]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\Big((1-x)^2 - \frac{(1-x)^2}{2}\Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{24}, \qquad \boxed{x_T = \frac{1}{4}} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 371**. Určete těžiště tělesa omezeného plochami $z = x^2 + y^2$, $z = 2$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = k$.

Řešení : Těleso je rotační poraboloid, tedy je symetrické vzhledem k ose z, proto jeho těžiště je na z-ové ose, tj. $x_T = y_T = 0$.



Těžiště $T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad m =$

$$= \iiint_W k\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^2 k\,dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= k \iint_{x^2+y^2\le 2} (2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le \sqrt{2} \\ y = r\sin\varphi & \mid\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

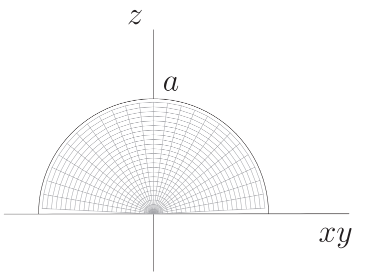
$$= k \cdot \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2}} (2 - r^2) r\,dr\Big)\,d\varphi = k \cdot 2\pi \cdot \Big[r^2 - \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{2}} = 2k\pi.$$

$$M_{xy} = \iiint_W z\varrho\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\le 2} \Big(\int_{x^2+y^2}^2 zk\,dz\Big)\,dx\,dy = \cdots = \frac{8}{3}k\pi, \qquad \boxed{T = \Big[0, 0, \frac{4}{3}\Big]}$$

$\blacksquare$

***Příklad* 372**. Určete těžiště tělesa $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 : x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge 0\}$, $\quad \varrho = 1$.

Řešení : Těleso je homogenní polokoule se středem v počátku [0,0,0], poloměrem a a je nad půdorysnou. Těžišě leží na ose z.



$T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$, $\quad V = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\pi a^3$,

$m = V \cdot \varrho = \dfrac{2}{3}\pi a^3 \cdot 1$, $\quad M_{xy} = \displaystyle\iiint_W z\,dx\,dy\,dz =$

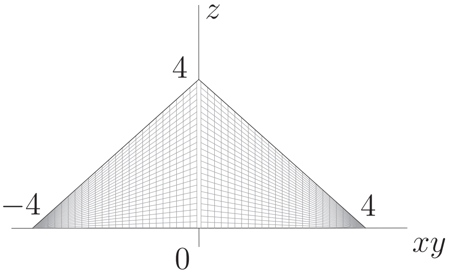
$$= \left| \begin{array}{lcl} x = r\cos\varphi\cos\vartheta & & 0 \le r \le a \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta & \mid & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ z = r\sin\vartheta & & 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \\ J = r^2\cos\vartheta & & \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^a r\sin\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta\,dr\Big)\,d\varphi\Big)\,d\vartheta =$$

$$= \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \Big[\frac{r^4}{4}\Big]_0^a \cdot \Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4\pi}{2}, \qquad \boxed{T = \Big[0, 0, \frac{3}{8}\,a\Big]}$$

$\blacksquare$

***Příklad* 373**. Určete těžiště kužele se základnou $x^2 + y^2 \le 16$ a vrcholem v bodě $[0, 0, 4]$, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = k$.

Řešení : Uvažovaný kužel je rotační, osa z je jeho osou rotace. Meridiánem tohoto rotačního kužele je část přímky $x + z = 4 \Longrightarrow z = 4 - x$. Potom rovnice kuželové plochy je $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$



$T = [0, 0, z_T]$, kde $z_T = \dfrac{M_{xy}}{m}$,

$m = V \cdot \varrho = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot k = \dfrac{64}{3} k\pi.$

$M_{xy} = \displaystyle\iiint_W z \cdot \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_W z \cdot k\, dx\, dy\, dz$

$$M_{xy} = k \cdot \iint\limits_{x^2+y^2 \le 16} \Big(\int_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} z\, dz\Big)\, dx\, dy = k \iint\limits_{x^2+y^2 \le 16} \Big[\frac{z^2}{2}\Big]_0^{4-\sqrt{x^2+y^2}} dx\, dy =$$

$$= \frac{k}{2} \iint\limits_{x^2+y^2 \le 16} \Big(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\Big)^2 dx\, dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & \mid \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ y = r\sin\varphi & \quad 0 \le r \le 4 \\ J = r & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^4 (4-r)^2 r\, dr\, d\varphi = \frac{k}{2} \cdot 2\pi \cdot \int_0^4 (16r - 8r^2 + r^3)\, dr = k\pi \Big[8r^2 - \frac{8}{3}r^3 + \frac{r^4}{4}\Big]_0^4 =$$

$$= \frac{64}{3} k\pi, \qquad \boxed{T = [0, 0, 1]} \qquad \blacksquare$$

***Příklad* 374**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k bodu $[0, 0, 0]$ tělesa W

$$W = \Big\{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3;\quad \frac{x^2 + y^2}{2} \le z \le \sqrt{3 - x^2 - y^2}\Big\}, \quad \varrho(x, y, z) = k.$$

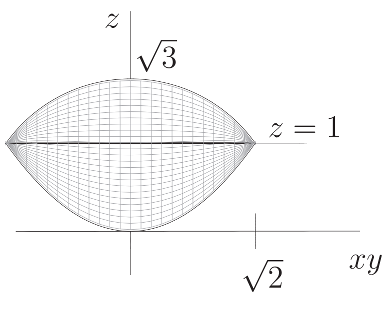
Řešení : $\dfrac{x^2 + y^2}{2} = z \quad \Rightarrow \quad 2z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow$ rovnice paraboloidu

$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \Rightarrow$ rovnice kulové plochy

Plochy mají společnou osu rotace. Body průniku leží v rovině kolmé na osu z . Rovnici roviny dostaneme vyřešením soustavy:

$2z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad z \ge 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad z^2 + 2z - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (z + 3)(z - 1) = 0$



Průnikem je kružnice $x^2 + y^2 = 2$ v rovině $z = 1$.

$J_0 = \displaystyle\iiint_W (x^2+y^2+z^2) \cdot \varrho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$

$$= \left| \begin{array}{lc} x = r\cos\varphi & \frac{r^2}{2} \le w \le \sqrt{3 - r^2} \implies \frac{r^2}{2} \le \sqrt{3 - r^2} \implies r^4 \le 4(3 - r^2) \implies \\ y = r\sin\varphi \quad \mid & r^4 + 4r^2 - 12 \le 0 \implies (r^2 - 2)(r^2 + 6) \le 0 \implies r^2 \le 2 \implies \\ z = w & 0 \le r \le \sqrt{2}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

$$= k \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{2}} \Big(\int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} (r^2 + w^2) r\, dw\Big)\, dr\Big)\, d\varphi = 2k\pi \cdot \int_0^{\sqrt{2}} \Big[r^3 w + r\frac{w^3}{3}\Big]_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} dr =$$

$$= 2k\pi \int_0^{\sqrt{2}} \Big(r^3\sqrt{3 - r^2} + \frac{r}{3}(3 - r^2)\sqrt{3 - r^2} - \frac{r^5}{2} - \frac{r^7}{24}\Big)\, dr = 2k\pi \Big[-\frac{r^6}{12} - \frac{r^8}{24 \cdot 8}\Big]_0^{\sqrt{2}} +$$

$$+\,2k\pi\int_0^{\sqrt2}\Big(r\sqrt{3-r^2}+\frac{2}{3}r^3\sqrt{3-r^2}\Big)\,dr = 2k\pi\Big(-\frac{8}{12}-\frac{16}{24\cdot 8}\Big)-$$

$$-k\pi\int_0^{\sqrt2}\sqrt{3-r^2}\Big(1+\frac{2}{3}r^2\Big)(-2r)\,dr = \left|\begin{array}{ll} 3-r^2=t & \mid\ r_1=0\Rightarrow t_1=3 \\ -2r\,dr=dt & \ \ r_2=\sqrt2\Rightarrow t_2=1\end{array}\right| =$$

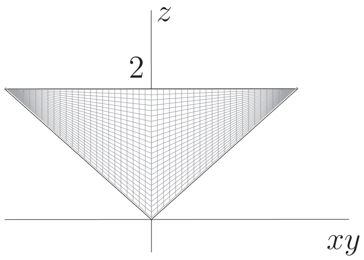
$$= -\frac{3}{2}\,k\pi - k\pi\int_3^1\sqrt{t}\Big(1+\frac{2}{3}(3-t)\Big)\,dt = -\frac{3}{2}\,k\pi + k\pi\int_1^3\Big(3\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}\Big)\,dt =$$

$$= -\frac{3}{2}\,k\pi + k\pi\Big[\frac{2\cdot 3t^{3/2}}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2t^{5/2}}{5}\Big]_1^3 = -\frac{3}{2}\,k\pi + k\pi\Big(2\cdot 3\sqrt3-\frac{4}{15}\cdot 9\sqrt3-2+\frac{4}{15}\Big) =$$

$$= k\pi\Big(\frac{18\sqrt3}{5}-\frac{97}{30}\Big) \doteq 3{,}002\,k\pi$$ ■

***Příklad* 375**. Určete moment setrvačnosti vzhledem k ose z homogenního tělesa W,
$W=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3;\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2\}$.

Řešení : Homogenní kužel má konstantní hustotu, označíme ji $\varrho(x,y,z)=k$



$$J_z=\iiint_W (x^2+y^2)\cdot\varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

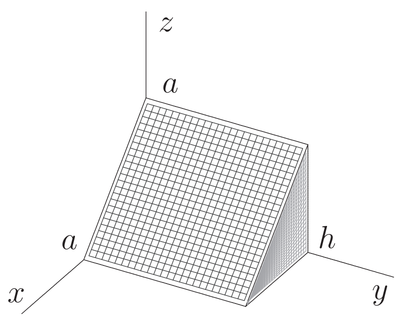
$$= k\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}\Big((x^2+y^2)\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} dz\Big)\,dx\,dy =$$

$$= k\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)\Big(2-\sqrt{x^2+y^2}\Big)\,dx\,dy = \left|\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi & \mid\ 0\le r\le 2 \\ y=r\sin\varphi & \ \ 0\le\varphi\le 2\pi \\ J=r & \end{array}\right| =$$

$$= k\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 r^2(2-r)r\,dr\Big)\,d\varphi = 2k\pi\Big[2\cdot\frac{r^4}{4}-\frac{r^5}{5}\Big]_0^2 = 2k\pi\Big(8-\frac{32}{5}\Big) = \frac{16}{5}\,k\pi$$ ■

***Příklad* 376**. Určete statický moment M_{yz} (vzhledem k rovině (yz)) tělesa omezeného rovinami $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y=a,\ y=h,\ (a>0,h>0)$, je-li hustota $\varrho(x,y,z)$ konstantní.

Řešení : Těleso je trojboký hranol s podstavou v rovině (x,z).



$$M_{yz}=\iiint_W x\cdot\varrho\,dx\,dy\,dz =$$

$$= k\cdot\iiint_W x\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} W: & 0\le z\le a-x \\ & 0\le x\le a \\ & 0\le y\le h\end{array}\right| =$$

$$= k\int_0^a\Big(\int_0^h\Big(\int_0^{a-x} x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = k\int_0^a\Big(\int_0^h x(a-x)\,dy\Big)\,dx = k\cdot h\Big[a\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^a =$$

$$= \frac{1}{6}\,k\,h\,a^3$$ ■

***Příklad* 377**. Určete moment setrvačnosti J_{xy} (vzhledem k rovině (xy)) tělesa W,
$W=\{[x,y,z]\in\mathbb{E}_3; x^2-2x+y^2\le 0,\ -1\le z\le 1\},\ \varrho=k.$

Řešení : Těleso W je rotační válec s osou rovnoběžnou s osou z.

$$J_{xy} = \iiint_W z^2 \cdot \varrho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \Big(\int_{-1}^{1} kz^2\, dz\Big)\, dx\, dy =$$

$$= k \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} \left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} dx\, dy = \frac{2}{3}k \iint\limits_{(x-1)^2+y^2\le 1} 1\, dx\, dy = \frac{2}{3}k\cdot\pi\cdot 1 = \frac{2}{3}k\,\pi$$

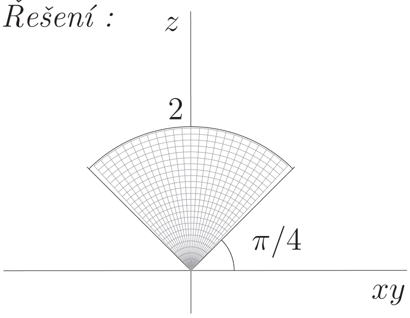
■

***Příklad* 378**. Vypočítejte integrál a stanovte jeho možný fyzikální význam:

$$I = \iiint_W \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

$$W = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2},\ y \ge 0\}.$$

Řešení :



W :
$z^2 = x^2 + y^2$ (rotační kuželová plocha)
$z^2 = 4 - x^2 - y^2 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 4$ (kulová plocha)

$$\left|\ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z = r\sin\vartheta \\ J = r^2\cos\vartheta \end{array}\ \middle|\ \begin{array}{c} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \varphi \le \pi \\ (y \ge 0) \\ \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \end{array}\ \right|$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\pi} \Big(\int_0^2 r\cdot r^2\cos\vartheta\, dr\Big)\, d\varphi\Big)\, d\vartheta = \int_0^2 r^3\, dr \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta \cdot \int_0^{\pi} 1\, d\varphi =$$

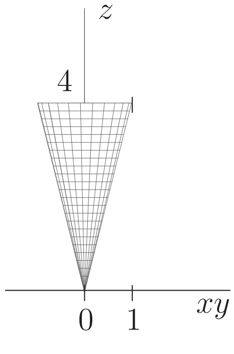
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \Big[\sin\vartheta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi = 4\pi\Big(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

Význam : 1) I je celková hmota tělesa při hustotě $\varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
2) I je statický moment tělesa vzhledem k bodu $[0,0,0]$ při hustotě $\varrho(x,y,z) = 1$.

■

***Příklad* 379**. Vypočítejte hmotnost kužele s vrcholem v počátku, s poloměrem podstavy $a = 1$ a výškou $h = 4$. Hustota se lineárně mění v závislosti na vzdálenosti bodu tělesa od podstavy. Ve vrcholu je $\varrho(x,y,z) = 1$ a $\varrho(x,y,z) = 5$ v každém bodě podstavy.

Řešení :



Zvolíme soustavu souřadnic s počátkem ve vrcholu kužele, osa z bude osou rotace, meridiánem bude část přímky $z = 4x$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$.

Kuželová plocha bude mít rovnici $z = 4\sqrt{x^2+y^2}$.

Uvažované těleso W zapíšeme pomocí nerovnic.

$$W: \quad \begin{array}{c} 4\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{array}$$

Pro hustotu platí : $\varrho(z) = k_1(4-z) + k_2$: $\quad \varrho(0) = 1 \Longrightarrow \quad 1 = 4k_1 + k_2$

$\varrho(4) = 5 \Longrightarrow \quad 5 = k_2 \Longrightarrow k_1 = -1$

$$\Longrightarrow \quad \varrho(x,y,z) = -(4-z) + 5 = z + 1$$

$$m = \iiint_W \varrho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W (z+1)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4} (z+1)\,dz \right) dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left[\frac{z^2}{2} + z \right]_{4\sqrt{x^2+y^2}}^{4} dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(12 - 8(x^2+y^2) - 4\sqrt{x^2+y^2} \right) dx\,dy = \left| \begin{array}{ll} x = r\cos\varphi & 0 \le r \le 1 \\ y = r\sin\varphi & \mid \; 0 \le \varphi \le 2\pi \\ J = r & \end{array} \right| =$$

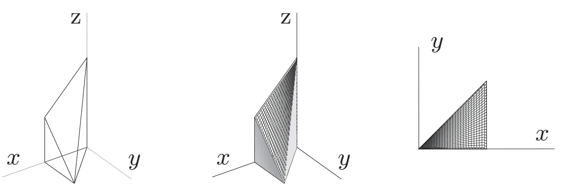
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (12 - 8r^2 - 4r)\cdot r\,d\varphi \right) dr = 2\pi \cdot \left[6r^2 - 2r^4 - \frac{4}{3}r^3 \right]_0^1 = 2\pi\left(4 - \frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{16}{3}\pi$$

■

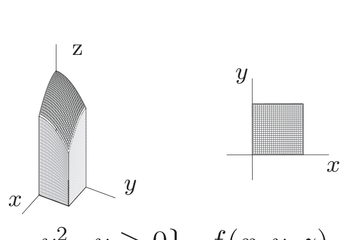
- Je dána množina D v $\mathbb{E}_3$ a funkce $z = f(x,y,z)$.
  a) Načrtněte množinu D a její průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
  b) Ověřte předpoklady pro použití Fubiniovy věty a vypočítejte trojný integrál $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.
  c) Uveďte příklady možného fyzikálního významu daného integrálu. Uveďte, zda se jedná o hmotnost (při jaké hustotě), statický moment či moment setrvačnosti (při jaké hustotě a vzhledem k jakému bodu, přímce nebo rovině).

380. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 :\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x,\; 0 \le z \le 2 - x - y\},\; f(x,y,z) = x^2$



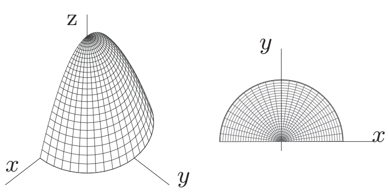
[b) $\frac{1}{5}$
c) $m,\ \varrho = x^2$
$J_{yz},\ \varrho = 1$]

381. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 :\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1,\; 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2\},\; f(x,y,z) = xy$



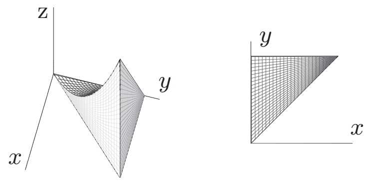
[b) $\frac{3}{4}$
c) $m,\ \varrho = xy$
$M_{yz},\ \varrho = y$
$M_{xz},\ \varrho = x$]

382. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 :\; 0 \le z \le 4 - x^2 - y^2,\; y \ge 0\},\; f(x,y,z) = x^2y$



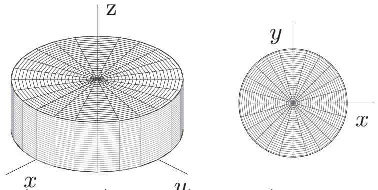
[b) $\frac{512}{105}$
c) $m,\ \varrho = x^2y$
$M_{xz},\ \varrho = x^2$
$J_{yz},\ \varrho = y$]

383. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ 0 \le x \le 3,\ x \le y \le 3,\ 0 \le z \le xy\},\ f(x, y, z) = (x^2 + y^2)\, z$



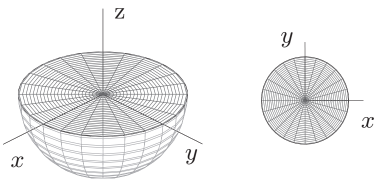
$\left[\begin{array}{l} b)\ \dfrac{3^7}{10} \\ c)\ m,\ \varrho = (x^2+y^2)z \\ \quad M_{xy},\ \varrho = x^2+y^2 \\ \quad J_z,\ \varrho = z \end{array}\right]$

384. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3 :\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0,\ z = 2\},\ f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2},$



$\left[\begin{array}{l} b)\ 36\pi \\ c)\ m,\ \varrho = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right]$

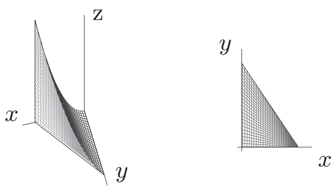
385. $D : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ z = 0,\ (z \le 0),\quad f(x, y, z) = z,\ R$ je kladná konstatnta



$\left[\begin{array}{l} b)\ \dfrac{1}{4}\pi R^4 \\ c)\ M_{xy},\ \varrho = 1, \\ \quad \text{nevyjadřuje hmotnost} \\ \quad \text{protože}\ \varrho = z \le 0 \end{array}\right]$

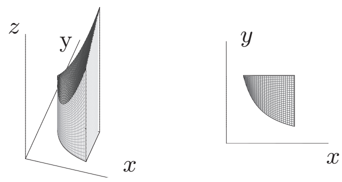
- Je dáno těleso $D \subset \mathbb{E}_3$ omezené plochami :
  - a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
  - b) Množinu D vyjádřete ve tvaru elementárního oboru integrace v souřadnicích, ve kterých budete objem počítat.
  - c) Vypočítejte objem tohoto tělesa.

386. $D : 3x + 2y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = x^2$



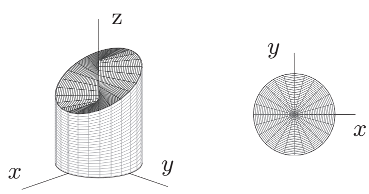
$\left[\begin{array}{l} b)\ 0 \le x \le 4 \\ \quad 0 \le y \le 6 - \dfrac{3}{2}x \\ \quad 0 \le z \le x^2 \\ c)\ 32 \end{array}\right]$

387. $D : x = 2,\ y = 2,\ xy = 1,\ z = 0,\ z = x^2 + y$



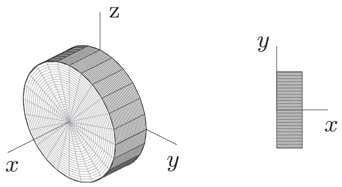
$\left[\begin{array}{l} b)\ \dfrac{1}{2} \le x \le 2 \\ \quad \dfrac{1}{x} \le y \le 2 \\ \quad 0 \le z \le x^2 + y \\ c)\ \dfrac{45}{8} \end{array}\right]$

388. D: $x^2 + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 4 - x$



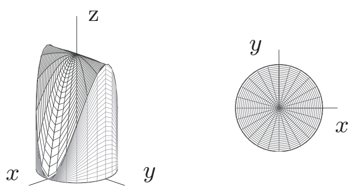
$\left[\begin{array}{ll} b) & 0 \le r \le 2 \\ & 0 \le \varphi \le 2\pi \\ & 0 \le w \le 4 - r\cos\varphi \\ c)\ 16\pi & \end{array}\right]$

389. $D:\ y^2+z^2=9,\ x=0,\ x=2$



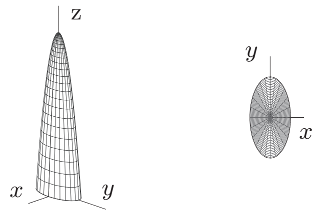
$\left[\begin{array}{l} b)\ 0\le w\le 2 \\ \quad\ 0\le r\le 3 \\ \quad\ 0\le \varphi\le 2\pi \\ c)\ 18\pi \end{array}\right]$

390. $D:\ z=0,\ z=a^2-x^2,\ x^2+y^2=a^2$



$\left[\begin{array}{ll} b) & 0\le r\le a \\ & 0\le \varphi\le 2\pi \\ & 0\le w\le a^2-r^2\cos^2\varphi \\ c)\ \dfrac{3}{4}\pi a^4 & \end{array}\right]$

391. $D:\ \ z=0,\ z=36-4x^2-y^2$



$\left[\begin{array}{ll} b) & 0\le r\le 1 \\ & 0\le \varphi\le 2\pi \\ & 0\le w\le 36-36r^2 \\ c)\ 324\pi & \end{array}\right]$

• Vypočítejte objem V tělesa $W\subset \mathbb{E}_3$:

392. $W:\ z=0,\ y+z=1,\ y=\ln x,\ y=\ln^2 x$ $[3e-8]$

393. $W:\ z=x^2+y^2,\ z=18-x^2-y^2$ $[81\pi]$

394. $W:\ \ 2z\ge x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2=3$ $\left[2\pi\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi\right]$

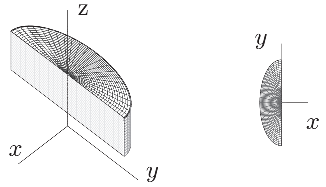
395. $W: x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2\le b^2,\ 0\le b\le a$ $\left[\frac{4}{3}\pi\left(a^3-\sqrt{(a^2-b^2)^3}\,\right)\right]$

396. $W: (x+y)^2+2z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$ $\left[\frac{1}{6}(3\sqrt{3}-1)\right]$

397. $W: 1+x^2+y^2=z^2,\ z=5-x^2-y^2,\ z\ge 0$ $\left[\frac{35}{6}\pi\right]$

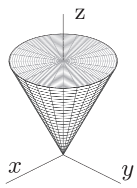
• Je dáno těleso $D\subset \mathbb{E}_3$ omezené plochami :
a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z=0$.
b) Při vhodné substituci vyjádřete D jako elementární obor v transformovaných souřadnicích.
c) Vypočítejte hmotnost tělesa, je-li dána hustota $\varrho(x,y,z)$.

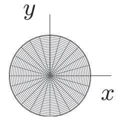
398. $D:\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1,\ x=0,\ z=1,\ z=4,\ (x\le 0),\quad \varrho(x,y,z)=z$



$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0\le r\le 1 \\ \quad \frac{1}{2}\pi\le \varphi\le \frac{3}{2}\pi \\ \quad\ 1\le w\le 4 \\ c)\ 30\pi \end{array}\right]$

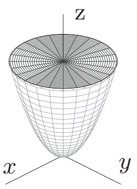
399. $D: z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 4, \quad \varrho(x,y,z) = z$

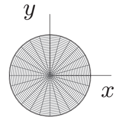




$$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0 \le r \le 2 \\ \quad\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \quad\ \ r \le w \le 4 \\ c)\ 64\pi \end{array}\right]$$

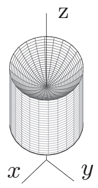
400. $D: z = x^2+y^2,\ z = 4, \quad \varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

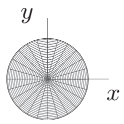




$$\left[\begin{array}{l} b)\ \ 0 \le r \le 2 \\ \quad\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \quad\ \ r^2 \le w \le 4 \\ b)\ \dfrac{128}{15}\pi \end{array}\right]$$

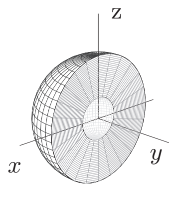
401. $D: z = x^2+y^2+4,\ z = 3-x^2-y^2,\ x^2+y^2 = 1, \quad \varrho(x,y,z) = k$

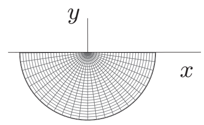




$$\left[\begin{array}{l} b)\ \ r \in \langle 0,1\rangle \\ \quad\ \ \varphi \in \langle 0,2\pi\rangle \\ \quad\ \ w \in \langle 3-r^2, 4+r^2\rangle \\ c)\ 2k\pi \end{array}\right]$$

402. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ y \le 0\}, \quad \varrho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$

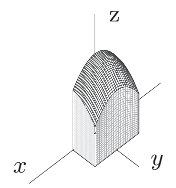


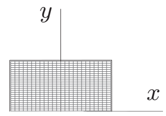


$$\left[\begin{array}{l} b)\ r \in \langle 0,3\rangle \\ \quad\ \varphi \in \langle \pi,2\pi\rangle \\ \quad\ \psi \in \langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\rangle \\ c)\ 40\pi \end{array}\right]$$

- Je dáno těleso $D \subset \mathbb{E}_3$.
  - a) Načrtněte těleso D a jeho průmět D_{xy} do roviny $z = 0$.
  - b) Vypočítejte objem tělesa D.
  - c) Vypočítejte hmotnost tělesa D, je-li dána hustota $\varrho(x,y,z)$.

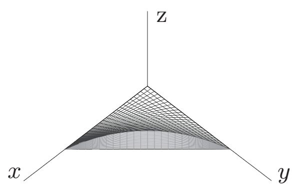
403. $D = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3\,;\ -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le\ z \le 4-x^2-y^2\}, \varrho(x,y,z) = x^2+y.$

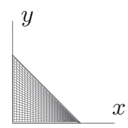




$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{20}{3}\pi \\ c)\ m = \dfrac{439}{90}\pi \end{array}\right]$$

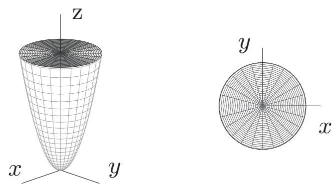
404. $D:\ x = 0,\ y = 0,\ x+y = 1,\ z = 0,\ z = xy,\ \varrho(x,y,z) = x$





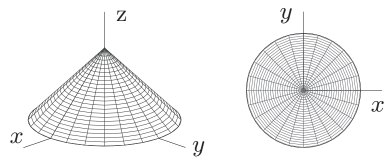
$$\left[\begin{array}{l} b)\ V = \dfrac{1}{24} \\ c)\ m = \dfrac{1}{60} \end{array}\right]$$

405. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x^2 + y^2 \leq z \leq 9\}, \quad \varrho(x, y, z) = x^2 + y^2.$



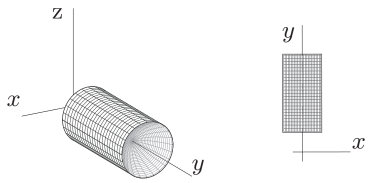
$$\left[\begin{array}{l} b)\, V = \dfrac{81}{2}\pi \\ c)\, m = \dfrac{243}{2}\pi \end{array}\right]$$

406. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ 0 \leq z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\}, \quad \varrho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2},$



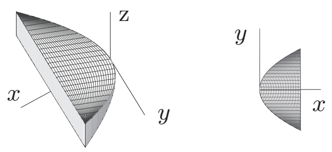
$$\left[\begin{array}{l} b)\, V = \dfrac{16}{3}\pi \\ c)\, m = \dfrac{128}{3}\pi \end{array}\right]$$

407. $D : x^2 + z^2 = 1,\ y = 1,\ y = x^2 + z^2 + 4, \quad \varrho(x, y, z) = y$



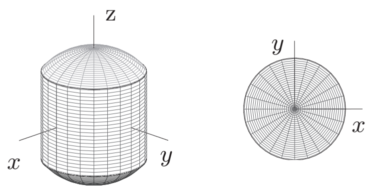
$$\left[\begin{array}{l} b)\, V = \dfrac{7}{2}\pi \\ c)\, m = \dfrac{29}{3}\pi \end{array}\right]$$

408. $D :\ x = y^2,\ x = 1,\ z = 0,\ z = x, \quad \varrho(x, y, z) = z$



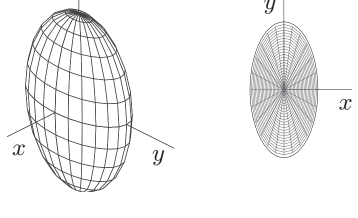
$$\left[\begin{array}{l} b)\, V = \dfrac{4}{5} \\ c)\, m = \dfrac{2}{7} \end{array}\right]$$

409. $D = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 16,\ \ x^2 + y^2 \leq 9\}, \quad \varrho(x, y, z) = k$



$$\left[\begin{array}{l} b)\, V = \dfrac{4}{3}\pi(64 - 7\sqrt{7}) \\ c)\, m = \dfrac{4}{3}k\pi(64 - 7\sqrt{7}) \end{array}\right]$$

410. $D : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \quad \varrho(x, y, z) = 3$



$$\left[\begin{array}{l} b)\, V = \dfrac{4}{3}\pi abc \\ c)\, m = 4\pi abc \end{array}\right]$$

• Určete hmotnost m tělesa $W \subset \mathbb{E}_3$:

411. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,; 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq c\}, \quad \varrho(x, y, z) = x + y + z.$

$$\left[\frac{abc}{2}(a + b + c)\right]$$

412. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4 - x - 2y\}, \quad \varrho(x, y, z) = x^2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

413. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ z \geq 0\}, \quad \varrho(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ $[8\pi]$

414. W je koule o poloměru a, jestliže hustota je rovna čtverci vzdálenosti od průměru.
(Zvolte kouli se středem v počátku souřadnic a průměr ležící na ose z.) $\left[\frac{8}{15}\pi a^5\right]$

415. W je omezené plochami o rovnicích: $z = 0,\ 2x + y + z = 4,\ x = 0,\ y = 0,$
je-li $\varrho(x, y, z) = 4x$. $\left[\frac{32}{2}\right]$

416. W je omezené plochami o rovnicích : $z = x^2 + y^2 + 4,\ z = 3 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 = 1,$
je-li $\varrho(x, y, z) = 2z(x^2 + y^2)$. $\left[\frac{49}{6}\pi\right]$

• Určete těžiště T tělesa $\subset \mathbb{E}_3$ omezeného plochami :

417. $W : z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ x + y = 5,\ x = 0,\ y = 0, \varrho(x, y, z) = k$
$\left[T = \left[2, 2, \frac{35}{6}\right]\right]$

418. $W : 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 3,\ z \geq 0,\ \varrho(x, y, z) = k$
$\left[T = \left[0, 0, \frac{5}{6\sqrt{3} - 5}\right]\right]$

419. $W : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (v prvním oktantu), $\varrho(x, y, z) = k$
$\left[T = \left[\frac{3a}{8}, \frac{3b}{8}, \frac{3c}{8}\right]\right]$

• Určete moment setrvačnosti tělesa $W \subset \mathbb{E}_3$:

420. $W : x^2 + y^2 = 2z,\ x + y = z$ vzhledem k osám souřadnic, je-li $\varrho(x, y, z) = 1$.
$\left[J_z = \frac{7}{2}\pi, J_x = J_y = \frac{4}{3}\pi,\right]$

421. $W : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ (z \geq 0)$ vzhledem k ose z, je-li $\varrho(x, y, z) = 1$.
$\left[J_z = \frac{4}{15}\pi(4\sqrt{2} - 5)\right]$

422. rotačního válce s poloměrem podstavy a a výškou b vzhledem k přímce p, která se dotýká pláště válce a je rovnoběžná s osou rotace.
(Zvolte válec $(x - a)^2 + y^2 \leq\ a^2,\ 0 \leq z \leq b$, přímka p pak bude osa z.) $\left[\frac{3}{2}\pi a^4 b\right]$

423. $W = \{[x, y, z] \in \mathbb{E}_3\,;\ \sqrt{3x^2 + 3y^2} \leq z \leq 3\}$, vzhledem k ose z, je-li hustota $\varrho(x, y, z) = k$
$\left[J_z = \frac{27}{10}\pi\varrho\right]$