

# I. Určitý integrál

## I.1. Existence určitých integrálů

- Zjistěte, zda existují určité integrály :

**Příklad 1.**  $\int_0^1 \frac{x+3}{x^2+1} dx$

**Řešení :** Ano existuje, protože funkce  $f(x) = \frac{x+3}{x^2+1}$  je spojitá na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . ■

**Příklad 2.**  $\int_1^{10} \frac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x} dx$

**Řešení :** Neexistuje, protože funkce  $f(x) = \frac{x^2+3}{x^3-3x^2-4x} = \frac{x^2+3}{x(x+1)(x-4)}$  není spojitá v bodě  $x = 4$  ( $x \in (1, 10)$ ) a  $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} f(x) = \pm\infty$ . ■

**Příklad 3.**  $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}-1}{x} dx$

**Řešení :** Integrál existuje. Funkce  $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$  sice není spojitá v bodě  $x = 0$  ( $x \in (-1, 1)$ ), avšak  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2$ . ■

4.  $\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x} dx$  [ano,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = 0$ ]      5.  $\int_0^2 xe^{x^2} dx$  [ano]

6.  $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-2\cos x} dx$  [ne,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^\pm} \frac{1}{1-2\cos x} = \pm\infty$ ]

## I.2. Newtonova-Leibnizova formule

- Pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule vypočtěte integrály :

**Příklad 7.**  $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

**Řešení :**  $I = \int_0^{\pi/4} \frac{1+1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi/4} \left( \frac{2}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \left[ 2 \operatorname{tg} x - x \right]_0^{\pi/4} = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2 - \frac{\pi}{4}$ . ■

**Příklad 8.**  $\int_3^8 \sqrt{1+x} dx$

Řešení :  $I = \int_3^8 (1+x)^{1/2} dx = \frac{2}{3} \left[ (1+x)^{3/2} \right]_3^8 = \frac{2}{3} \cdot (9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \frac{38}{3}$ . ■

**Příklad 9.**  $\int_0^2 \frac{x-3}{x^2+4} dx$

Řešení :  $I = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2x}{x^2+4} dx - 3 \int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \left[ \ln(x^2+4) \right]_0^2 - \frac{3}{2} \left[ \arctg \frac{x}{2} \right]_0^2 =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot (\ln 8 - \ln 4) - \frac{3}{2} \cdot \arctg 1 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 - \frac{3\pi}{8}$ . ■

**Příklad 10.**  $\int_2^5 \frac{5x+1}{x^2+x-2} dx$

Řešení : Integrovanou funkci nejdříve rozložíme na parciální zlomky a integrál vypočteme :

$$\frac{5x+1}{x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}, \quad 5x+1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x=1: 6=3A \rightarrow A=2; \quad x=-2: -9=-3B \rightarrow B=3$$

$$I = \int_2^5 \left( \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+2} \right) dx = \left[ 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| \right]_2^5 =$$

$$= 2 \ln 4 + 3 \ln 7 - 2 \ln 1 - 3 \ln 4 = 3 \ln 7 - \ln 4 = \ln \frac{343}{4}$$

POZOR ! Tentýž integrál na jiném intervalu  $\langle a, b \rangle$  nemusí existovat, bude-li  $\langle a, b \rangle$  obsahovat aspoň jedno z čísel  $x = -2$  nebo  $x = 1$ . ■

**Příklad 11.**  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{2} dx$

Řešení : Zde využijeme, že funkce  $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$  je sudá, tj.  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos x}{2} dx = \left[ x + \sin x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + 1$$
. ■

**Příklad 12.**  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x dx$

Řešení : Nyní využijeme to, že funkce  $f(x) = x^2 \sin x$  je lichá, tj.  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ . ■

**Příklad 13.**  $\int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} - \cos x \right| dx$

Řešení : Odstraníme absolutní hodnotu:  $\frac{1}{2} - \cos x \geq 0$  pro  $x \in \langle \frac{\pi}{3}, \pi \rangle$

a  $\frac{1}{2} - \cos x < 0$  pro  $x \in \langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$ , takže pro daný integrál platí :

$$I = \int_0^{\pi/3} -\left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx + \int_{\pi/3}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx = \left[ \sin x - \frac{1}{2}x \right]_0^{\pi/3} + \left[ \frac{1}{2}x - \sin x \right]_{\pi/3}^{\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$$
. ■

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{14.}^* \int_{-4}^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} dx & [2 \ln 3] \quad \mathbf{15.} \int_0^\pi \frac{\sin x}{2+\cos x} dx & [\ln 3] \\
 \mathbf{16.} \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+e} dx & \left[ \ln \frac{2e}{1+e} \right] \quad \mathbf{17.} \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2-x} dx & \left[ 2 \ln \frac{4}{3} \right]
 \end{array}$$

### I.3. Metoda per partes

- Vypočítejte integrály pomocí metody per partes :

**Příklad 18.**  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x| \cos x dx$

*Řešení :* Integrovaná funkce je sudá. Tedy  $I = 2 \int_0^{\pi/2} |x| \cos x dx = 2 \int_0^{\pi/2} x \cos x dx =$   
 $= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad v' = \cos x \\ u' = 1, \quad v = \sin x \end{array} \right| = 2 \left[ x \sin x \right]_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \left[ \cos x \right]_0^{\pi/2} = \pi - 2.$  ■

**Příklad 19.**  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$

*Řešení :*  $I = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1), \quad v' = 1 \\ u' = \frac{1}{x+1}, \quad v = x \end{array} \right| = \left[ x \ln(x+1) \right]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x}{x+1} dx = (e-1) \ln e -$   
 $- \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx = e-1 - \left[ x - \ln(x+1) \right]_0^{e-1} = e-1 - (e-1 - \ln e) = 1.$  ■

**Příklad 20.**  $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx$

*Řešení :*  $I = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad v' = \sin x \\ u' = 2e^{2x}, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = - \left[ e^{2x} \cos x \right]_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx =$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad v' = \cos x \\ u' = 2e^{2x}, \quad v = \sin x \end{array} \right| = 1 + 2 \left[ e^{2x} \sin x \right]_0^{\pi/2} - 4 \int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx.$$

Dostali jsme rovnici  $I = 1 + 2e^\pi - 4I$ , ze které  $5I = 1 + 2e^\pi$ .

Výsledek daného příkladu je  $I = \frac{1}{5}(1 + 2e^\pi).$  ■

**Příklad 21.\***  $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

*Řešení :*

★ pro  $n = 0$  je  $I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2};$

★ pro  $n = 1$  je  $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\pi/2} = 1;$

★ pro  $n = 2$  je  $I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4};$

$$\begin{aligned} \star \text{ pro } n \geq 3 \text{ je } I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cdot \cos x \cdot \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad v' = \sin^{n-2} \cdot \cos x \\ u' = -\sin x, \quad v = \frac{1}{n-1} \sin^{n-1} x \end{array} \right| = \\ &= I_{n-2} - \left[ \frac{\cos x \cdot \sin^{n-1} x}{n-1} \right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx. \end{aligned}$$

Dostaneme rovnici  $I_n = I_{n-2} - 0 - \frac{1}{n-1} I_n$ , ze které vypočteme  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .

Provedeme diskuzi :

$$\text{Pro } \begin{cases} n = 2k \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \\ n = 2k+1 \text{ je } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 1. \end{cases}$$

Tím jsme odvodili tzv. **Wallisovy formule**.

Tentýž výsledek platí i pro  $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ , jelikož  $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$ . ■

$$\begin{array}{ll} \mathbf{22.}^* \int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx & \left[ \frac{16}{35} \right] \quad \mathbf{23.}^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^8 x \, dx & \left[ \frac{35\pi}{128} \right] \\ \mathbf{24.}^* \int_0^{\pi} \cos^6 x \, dx & \left[ \frac{5\pi}{16} \right] \quad \mathbf{25.}^* \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^9 x \, dx & [0] \\ \mathbf{26.} \int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \arctg x \, dx & \left[ \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \quad \mathbf{27.} \int_{1/e}^e |\ln x| \, dx & \left[ 2 - \frac{2}{e} \right] \\ \mathbf{28.} \int_0^1 y \cdot \ln(x+y) \, dx, \quad (y > 0) & & [y(y+1) \ln(y+1) - y^2 \ln y - y] \end{array}$$

#### I.4. Substituční metoda

• Vypočtete integrály substituční metodou :

**Příklad 29.**  $\int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}} \, dx$

**Řešení :** Použijeme substituci  $\left[ \begin{array}{l} 1 + \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \quad \rightarrow t_1 = 1 \\ x_2 = e^3 \quad \rightarrow t_2 = 4 \end{array} \right. \right]$  a dostaneme

$$I = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2 \left[ \sqrt{t} \right]_1^4 = 2 \cdot (2 - 1) = 2. \quad \blacksquare$$

**Příklad 30.**  $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \cdot \sin \frac{1}{x} \, dx$

Řešení : Po substituci  $\left[ \begin{array}{l|l} \frac{1}{x} = t & x_1 = \frac{1}{\pi} \rightarrow t_1 = \pi \\ -\frac{dx}{x^2} = dt & x_2 = \frac{2}{\pi} \rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right]$  obdržíme

$$I = - \int_{\pi}^{\pi/2} \sin t \, dt = \int_{\pi/2}^{\pi} \sin t \, dt = \left[ -\cos t \right]_{\pi/2}^{\pi} = 1 . \quad \blacksquare$$

**Příklad 31.**  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$

Řešení : Po substituci  $\left[ \begin{array}{l|l} x^2 = t & x_1 = 0 \rightarrow t_1 = 0 \\ 2x dx = dt & x_2 = 1 \rightarrow t_2 = 1 \end{array} \right]$  získáme

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{arctg} t \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} . \quad \blacksquare$$

**Příklad 32.**  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Řešení : Použijeme substituci  $\left[ \begin{array}{l|l} x = 2 \sin t & x_1 = 0 \rightarrow t_1 = 0 \\ dx = 2 \cos t \, dt & x_2 = 2 \rightarrow t_2 = \pi/2 \end{array} \right]$  a dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4-4\sin^2 t} \cdot 2 \cos t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \\ &= 2 \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Příklad 33.**  $\int_1^2 \frac{x}{(x^2+4)^2} dx$

Řešení : Zvolíme substituci  $\left[ \begin{array}{l|l} x^2+4 = t & x_1 = 1 \rightarrow t_1 = 5 \\ 2x dx = dt & x_2 = 2 \rightarrow t_2 = 8 \end{array} \right]$  a potom

$$I = \frac{1}{2} \int_5^8 \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{t} \right]_5^8 = -\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{80} . \quad \blacksquare$$

**34.**  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x + 3}} dx$   $[\ln \sqrt{3}]$

**35.**  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$   $\left[ \frac{\pi}{4} \right]$

**36.**  $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$   $\left[ \frac{\pi^2}{72} \right]$

**37.**  $\int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cdot \cos x \, dx$   $\left[ \frac{1}{48} \right]$

**38.**  $\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \, dx$   $\left[ \frac{5}{24} \right]$

**39.**  $\int_0^{1/2} r \sqrt{1-4r^2} \, dr$   $\left[ \frac{1}{12} \right]$

**40.**  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}+1} dx$   $[2(2-\ln 2)]$

**41.**  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$   $\left[ \frac{\sqrt{3}\pi}{9} \right]$