Vektorový prostor

Příklady:

Př.1. $\mathbb{R}^2$; $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{R}^n$ ...aritmetický $\boldsymbol{n}$-rozměrný prostor

Dvě operace v $\mathbb{R}^n$:
součet vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots u_n)$ a $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots v_n)$ je vektor
$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, \ldots u_n + v_n)$,

násobek vektoru $\boldsymbol{u}$ číslem λ je vektor
$\lambda \cdot \boldsymbol{u} = (\lambda u_1, \ldots \lambda u_n)$.

Př. 2. $V(\mathbb{E}_2)$ ...množina vektorů v $\mathbb{E}_2$, vektor je množina všech navzájem ekvivalentních orientovaných úseček v $\mathbb{E}_2$.

$V(\mathbb{E}_3)$ ...množina vektorů v $\mathbb{E}_3$,

Tyto dvě operace mají následující vlastnosti (pišme obecně množinu V):

(a) Pro libovolné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ a libovolné $\lambda \in \mathbb{R}$
patří součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ i součin $\lambda \cdot \boldsymbol{u}$ do V.

(b) Tyto dvě operace jsou tzv. rozumné, tj. komutativní, asociativní, distributivní.

Pro libovolné vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ a libovolná reálná čísla α, β platí:

(b1) $\quad \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u},$

(b2) $\quad (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}),$

(b3) $\quad 1 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u},$

(b4) $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{u},$

(b5) $\quad \alpha \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \alpha \cdot \boldsymbol{v}.$

(b6) $\quad (\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{u} = \alpha \cdot \boldsymbol{u} + \beta \cdot \boldsymbol{u}.$

(c) Ve V existuje tzv. nulový vektor $\boldsymbol{o}$. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{u}$ pak platí: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$.

(d) Ke každému vektoru $\boldsymbol{u} \in V$ existuje vektor $(-\boldsymbol{u}) \in V$ (tzv. opačný vektor k vektoru $\boldsymbol{u}$) tak, že platí: $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$.

Poznámka. Vlastnosti (a) se říká *uzavřenost množiny V* vůči oběma operacím.

Definice. Množina $\boldsymbol{V}$ s operacemi sčítání prvků (vektorů) a násobení vektorů reálnými čísly, které mají vlastnosti a) až d) se nazývá vektorový prostor.

Věta 1.4. Ve vektorovém prostoru V existuje jediný nulový vektor.

Věta 1.7. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{u} \in V$ a pro libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

1) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, 2) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$, 3) $\alpha \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o}$.

Další příklady (se standardně definovanými operacemi):

Př. 3. $C_{\langle a,b \rangle}$ ... mn. spojitých funkcí v $\langle a, b \rangle$ je vektorový prostor

Př. 4. P_2 ... mn. všech polynomů stupně právě dva,
tj. funkce tvaru $P(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ **není vektorový prostor**

Př. 5. P_2' ... mn. všech polynomů stupně nejvýše dva je vektorový prostor

Př. 6. Množina všech matic téhož typu $m \times n$ je vektorový prostor

Poznámka. Podprostor vektorového prostoru.

Příklad Prostor P_2' je podprostorem vektorového prostoru $C_{(-\infty,\infty)}$

Lineární závislost, nezávislost (skupiny vektorů)

Příklad 0. Určete vektor $\boldsymbol{w}$, který je lin. kombinací vektorů $\boldsymbol{u} = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 2, 2)$ s koeficienty $\alpha = -2$, $\beta = 2$.
Výsledek: $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} = (-6,\ -2,\ 6)$.

Definice. Skupinu vektorů $\boldsymbol{u_1}, \ldots, \boldsymbol{u_n}$ nazýváme *lineárně závislou*, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (aspoň jedno je $\neq 0$) tak, že platí
$\alpha_1\boldsymbol{u_1} + \alpha_2\boldsymbol{u_2} + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{o}$. (*).
Skupinu vektorů, která není lineárně závislá, nazýváme *lineárně nezávislou*.

Poznámka. Skupina vektorů je lin. nezávislá právě tehdy, když vektorová rovnice (*) má pouze nulové řešení $\alpha_i = 0$ pro $\forall i$.

Poznámka. V tomto textu použijeme zkratky LN (lin. nezávislá) a LZ (lin. závislá).

Věta 1.7. Jestliže skupina vektorů obsahuje nulový vektor, pak je tato skupina LZ.

Věta 1.8. Skupina vektorů je LZ právě tehdy, když alespoň jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Skupina dvou nenulových vektorů je tedy LZ právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého.

Příklad 1. Skupina vektorů $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{6}, \boldsymbol{-3}),\ \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{1})$ je LZ,
zatímco skupina $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{3}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{-3}),\ \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{6}, \boldsymbol{4}, \boldsymbol{-5})$ je LN.

Příklad 2. Určete, pro které hodnoty parametrů α, β je LZ (resp. LN) skupina dvou vektorů $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{-3}), \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{-2}, \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{2}, \boldsymbol{\beta})$.
Výsledek: Pro $\alpha = -6, \beta = 6$ je skupina LZ. Pro $\alpha \neq -6$ nebo $\beta \neq 6$ je skupina LN.

ÚLOHA. Určete, zda daná skupina (tří a více vektorů) je LN nebo LZ.

Postup.

1. možnost: Pomocí matice sestavené z daných vektorů (někdy i pomocí determinantu).
2. možnost: Postupujeme podle definice, tj.

1. Sestavíme vektorovou rovnici (*) pro hledané koeficienty (vhodný je zápis vektorů ve sloupcovém tvaru).
2. Rovnici (*) rozepíšeme do souřadnic a takto vzniklou soustavu rovnic vyřešíme.
3. Závěr: Má-li soustava **pouze nulové řešení**, pak je daná skupina lin. nezávislá.

   Má-li soustava **i nenulové řešení** (a v tomto případě už jich má nekonečně mnoho), pak je tato skupina lin. závislá.

Příklad 3. Skupina tří vektorů $\boldsymbol{u} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 2, 3)$, $\boldsymbol{w} = (3, 5, 4)$ je LZ nebo LN?
Výsledek: Daná skupina je LN.

Příklad 4. Vektory $\boldsymbol{u} = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 2, 2)$, $\boldsymbol{w} = (-6, -2, 6)$ z Př. 0 jsou LZ. Ověřte!
Poznámka. Libovolné dva z daných tří vektorů jsou LN (ověřte si). Jaká je vzájemná poloha těchto tří vektorů ?

Příklad 1* . (Obměna př. 4a z kap. Úlohy ze ZK)
Dána skupina LN vektorů.
a) Co lze říci o skupině, která vznikne přidáním jednoho vektoru (je LN, nebo LZ, nebo nelze říci) ?
b) Co lze říci o skupině, která vznikne z té původní odebráním jednoho vektoru ?

Dimenze a báze vektorového prostoru

Definice.

Vektorový prostor $\boldsymbol{V}$ se nazývá $\boldsymbol{n}$ *rozměrný* (má dimenzi $\boldsymbol{n}$, dim $\boldsymbol{V}$ $=\boldsymbol{n}$), jestliže

a) ve $\boldsymbol{V}$ existuje skupina $\boldsymbol{n}$ vektorů, která je LN,

b) každá skupina více než $\boldsymbol{n}$ vektorů je LZ.

Každou lin. nezáv. skupinu $\boldsymbol{n}$ vektorů z $\boldsymbol{V}$ nazýváme *bází prostoru* $\boldsymbol{V}$.

Poznámka. Dimenze prostoru $\boldsymbol{V}$ je tedy rovna maximálnímu počtu LN vektorů z V. Počet vektorů v libovolné bázi je stejný a je roven dim $\boldsymbol{V}$.

Věta 1.15. Libovolný vektor z $\boldsymbol{V}$ lze vyjádřit jediným způsobem jako lineární kombinaci vektorů dané báze.

Příklad 5. a) Vektory $\mathbf{e_1} = \mathbf{(1;0)}; \mathbf{e_2} = \mathbf{(0;1)}$ tvoří bázi prostoru $\boldsymbol{V}(\mathbb{E}_2)$.
b) Vektory $\boldsymbol{a} = (1;2); \boldsymbol{b} = (3;1)$ tvoří bázi prostoru $\boldsymbol{V}(\mathbb{E}_2)$.

Příklad 6. Vektory $\boldsymbol{i} = (1; 0; 0)$; $\boldsymbol{j} = (0; 1; 0)$; $\boldsymbol{k} = (0; 0; 1)$ tvoří bázi prostoru $\boldsymbol{V}(\mathbb{E}_3)$.

Příklad 7. Báze v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Příklad 8.
a) Určete, zda vektory z př. 3, tj. $\boldsymbol{u} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 2, 3)$, $\boldsymbol{w} = (3, 5, 4)$
tvoří bázi vektorového prostoru $\boldsymbol{V}(\mathbb{E}_3)$.

b) Pokud je to možné, vyjádřete vektor $\boldsymbol{a} = (-2, 1, 4)$ ve tvaru lineární kombinace těchto vektorů.

c) Jaká je vzájemná poloha těchto čtyř vektorů (geometrická interpretace) ?

Příklad 2* . (viz Úlohy ze ZK)
Dána skupina $n + 1$ vektorů v prostoru dimenze n. Je tato skupina LZ, nebo LN nebo nelze jednoznačně odpovědět ?
Dána skupina $n - 1$ vektorů ....
Dána skupina n vektorů ...