Lineární závislost (nezávislost) vektorů, báze vektorového prostoru (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Definice: Skupinu vektorů $\boldsymbol{u_1 ..., u_n}$ nazýváme *lineárně závislou*, jestliže existují reálná čísla $\alpha_1, ..., \alpha_n$ (aspoň jedno je $\neq 0$) tak, že platí $\boldsymbol{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n = o}$. (*).
Skupinu vektorů, která není lineárně závislá, nazýváme *lineárně nezávislou.* To platí právě tehdy, když vektorová rovnice (*) má pouze nulové řešení, tj. pro $\forall i$ je koeficient $\alpha_i = 0$.

Věta 1.7. Jestliže skupina vektorů obsahuje nulový vektor, pak je tato skupina lin. závislá.

Věta 1.8. Skupina vektorů je lineárně závislá právě tehdy, když alespoň jeden z vektorů této skupiny lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Podle této věty lze výhodně postupovat v případě dvou nenulových vektorů. Taková skupina je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.

Příklad 1. Ověřte, že skupina dvou vektorů $\boldsymbol{u = (6, -3)},\ \boldsymbol{v = (-2, 1)}$ je lin. závislá, zatímco skupina $\boldsymbol{a = (3, 2, -3)},\ \boldsymbol{b = (6, 4, -5)}$ je lin. nezávislá.

Příklad 2. Určete, pro které hodnoty parametrů α, β je lineárně závislá (resp. nezávislá) skupina vektorů $\boldsymbol{a = (1, 2, -3), b = (-2, \alpha + 2, \beta)}$.
Řešení: Skupina je závislá, pokud existuje číslo k tak, že $\boldsymbol{b} = k \cdot \boldsymbol{a}$, tj. $(-2, \alpha + 2, \beta) = k \cdot (1, 2, -3)$. Vynásobíme 2. vektor číslem k: $(-2, \alpha + 2, \beta) = (k, 2k, -3k)$. Rovnost vektorů vyžaduje rovnost odpovídajích souřadnic. Porovnáním prvních souřadnic tedy dostaneme, že $k = -2$. Porovnáním 2. souřadnic dostaneme rovnici $\alpha + 2 = -4$, odkud vypočteme, že $\alpha = -6$. Z rovnosti 3. souřadnic vypočteme $\beta = 6$. Proveďme kontrolu: Pro hodnoty $\alpha = -6, \beta = 6$ je vektor $\boldsymbol{b} = (-2, -4, 6)$, což je skutečně násobek vektoru $\boldsymbol{a}$.

Poznámka: Pro přehlednost výpočtu bude možná více vyhovovat zápis vektorů ve sloupcovém tvaru.

Máme-li rozhodnout, zda daná skupina vektorů je lin. nezávislá nebo závislá, lze postupovat takto:

1. možnost: Rozhodneme výpočtem hodnosti matice sestavené z daných vektorů. V některých případech lze rozhodnout i pomocí determinantu. Tuto možnost probereme v dalších kapitolách.

2. možnost: Postupujeme podle definice, tj.

a) Sestavíme vektorovou rovnici (*) pro hledané koeficienty.

b) Rovnici (*) rozepíšeme do souřadnic a takto vzniklou soustavu rovnic vyřešíme.

c) Závěr: Má-li soustava **pouze nulové řešení**, pak je daná skupina lin. nezávislá.
Má-li soustava **i nenulové řešení** (a v tomto případě už jich má nekonečně mnoho), pak je tato skupina lin. závislá.

Příklad 3. Zjistěte, zda vektory $\boldsymbol{u} = (-1, 2, 4),\ \boldsymbol{v} = (2, 0, 0), \boldsymbol{w} = (3, 1, 0)$ jsou lin. závislé nebo nezávislé.
Řešení: Označíme-li tři hledané (neznámé) koeficienty α, β, γ, pak vektorová rovnice (*) má tvar:

$$\alpha \boldsymbol{u} + \beta \boldsymbol{v} + \gamma \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}.$$

Dosadíme zadané vektory, vhodný je zápis ve sloupcovém tvaru:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na levé straně násobíme postupně vektor číslem a takto vzniklé tři vektory sečteme:

$$\begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \gamma \\ 4\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rovnost dvou vektorů je splněna při rovnosti odpovídajících složek. Získáme tak soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé α, β, γ:

$$\begin{aligned} -\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \gamma &= 0 \\ 4\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice určíme $\alpha = 0$. Dosadíme-li do druhé rovnice, obdržíme $\gamma = 0$. Po dosazení do první rovnice získáme jediné řešení $\beta = 0$. Vektorová rovnice (*) má pouze nulové řešení, proto je daná skupina vektorů lineárně nezávislá.

Příklad 4. Zdůvodněte, zda vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ z předchozího příkladu tvoří bázi vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Prostor $\mathbb{R}^3$ má dimenzi 3. Uvedené vektory jsou tři. Protože jsou lineárně nezávislé, tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^3$ - viz definice dimenze a báze vektorového prostoru.

Příklad 5. Rozhodněte, zda vektory $\boldsymbol{u} = (2, 3, -1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 2, 2), \boldsymbol{w} = (-6, -2, 6)$ tvoří bázi vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

Řešení: Báze vektorového prostoru V dimenze n je libovolná skupina n lineárně nezávislých vektorů z V. Zadané jsou tři vektory v prostoru $\mathbb{R}^3$, který má dimenzi 3. Uvedená skupina proto tvoří bázi v $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, je-li lineárně nezávislá. Dále tedy postupujeme jako v Příkladu 3.

Sestavíme vektorovou rovnici (*) ve tvaru

$$\boldsymbol{\alpha u} + \boldsymbol{\beta v} + \boldsymbol{\gamma w} = \boldsymbol{o}.$$

Dosadíme zadané vektory a provedeme operace na levé straně: nejprve násobení vektorů čísly a pak sčítání tří vektorů. Obdržíme tak rovnost dvou vektorů:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - 1\beta - 6\gamma \\ 3\alpha + 2\beta - 2\gamma \\ -\alpha + 2\beta + 6\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z rovnosti vektorů získáme soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé α, β, γ:

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - 6\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 2\gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení (ověřte si), proto je zadaná skupina vektorů lin. závislá a netvoří bázi v $\mathbb{R}^3$.

Poznámka: Při řešení této soustavy je vhodné použít matic. Pomocí matic však lze úlohu o závislosti, resp. nezávislosti vektorů rozhodnout ještě rychleji, a to výpočtem tzv. hodnosti matice (bez řešení soustavy rovnic). Protože sestavená matice by v tomto případě byla čtvercová, je možné rozhodnout i pomocí determinantu. Tyto postupy poznáme později.

Poznámka: Všimněme si v tomto příkladu, že libovolné dva z daných tří vektorů jsou lin. nezávislé. Skupina těchto tří vektorů tedy generuje (vytváří) v $\mathbb{R}^3$ podprostor dimenze 2. Jeho bázi tvoří např. libovolné dva z těchto tří vektorů. Jaká je vzájemná poloha těchto tří vektorů ?

Literatura:

[1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.

[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I**. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.