Vlastní čísla a vlastní vektory matice (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

1. a) Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Nalezněte vlastní čísla této matice.
b) Zvolte jedno z vlastních čísel, sestavte soustavu rovnic pro výpočet odpovídajících vlastních vektorů a ty pak určete.

<u>Ř e š e n í :</u> a) Nejprve řešíme charakteristickou rovnici matice A, tj. rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Vlastní čísla matice A jsou kořeny této rovnice: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$.

b) Najděme vlastní vektory $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, které odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$.

Určíme je řešením homogenní soustavy $(A - \lambda\, E) \cdot X = \overrightarrow{0}$, kde $\lambda = 2$, tj. $\begin{pmatrix} -1, & -1 \\ -4, & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Je to soustava dvou rovnic
$$\begin{aligned} -x \;-y &= 0 \\ -4x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

Druhou rovnici můžeme vypustit, neboť je násobkem první rovnice. Soustava se tedy redukuje na jedinou rovnici
$$-x - y = 0,$$

která má nekonečně mnoho řešení.

To je správně, je to "kontrolní místo"správnosti výpočtu. Výše uvedená soustava rovnic pro neznámé x, y totiž má mít nekonečně mnoho řešení. Pokud by tomu tak nebylo, tak je ve výpočtu chyba (ve výpočtu vlastních čísel nebo v dosazení vlastního čísla do soustavy).

Hledané vlastní vektory získáme např. tak, že položíme $y = p$, kde p je libovolné číslo. Pro hodnotu x pak platí $x = -p$. Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2$ lze tedy vyjádřit ve tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kde p je jakékoliv číslo různé od 0. Podmínku $p \neq 0$ přidáváme proto, že nulový vektor nemůže být vlastním vektorem.

Vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ určíme stejným postupem. Obdržíme soustavu dvou rovnic
$$\begin{aligned} 4x \;-y &= 0 \\ -4x + y &= 0 \end{aligned}$$

Druhou rovnici opět můžeme vypustit, neboť je násobkem první rovnice. Soustava se redukuje na jedinou rovnici
$$4x - y = 0,$$

která má nekonečně mnoho řešení ("kontrolní místo"). Při volbě $x = p$ pak je $y = 4p$. Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ lze vyjádřit ve tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, kde p je jakékoliv číslo různé od 0.

Poznámka. Správnost výsledku lze ověřit podle definice vlastního čísla a vlastního vektoru, tj. ověřením platnosti vztahu $A \cdot X = \lambda\, X$.

2. a) Najděte vlastní čísla matice
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Zvolte jedno z vlastních čísel, sestavte soustavu rovnic pro výpočet odpovídajících vlastních vektorů a ty pak určete.

c) Určete spektrální poloměr $\rho(A)$ dané matice, tj. největší z absolutních hodnot vlastních čísel matice A.

Ř e š e n í : a) Sestavíme charakteristickou rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -5 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Determinant vypočítáme rozvojem podle 1. řádku, což vede k rovnici

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)[(1-\lambda)(3-\lambda)+5] = 0$$

$$(4-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 8] = 0.$$

Kořeny jsou $\lambda_1 = 4$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm 2\mathrm{i}$ a to jsou vlastní čísla matice A.

b) Určíme vlastní vektory $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, které odpovídají vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$.

Získáme je řešením soustavy $(A - \lambda\, E)\cdot X = \overrightarrow{0}$, kde $\lambda = 4$, tj. $\begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \\ -1, & -3, & -5 \\ 2, & 1, & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Přepíšeme ve tvaru soustavy rovnic, ve které 1. rovnici vypustíme, neboť má všechny koeficinty nulové. Získáme tak soustavu dvou rovnic pro tři neznámé:

$$\begin{aligned} -x - 3y - 5z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Přičteme-li ke druhé rovnici dvojnásobek 1. rovnice (Gaussův algoritmus), získáme soustavu

$$\begin{aligned} -x - 3y - 5z &= 0 \\ -5y - 11z &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení ("kontrolní místo"). Jednu neznámou lze volit, tedy např. $z = p$, kde p je libovolné číslo. Ze druhé rovnice určíme $y = -11p/5$.
Po dosazení do 1. rovnice vypočteme $x = -3y - 5z = 8p/5$.

Všechny vlastní vektory odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1 = 4$ lze vyjádřit ve tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 8/5 \\ -11/5 \\ 1 \end{pmatrix}$,

kde p je jakékoliv číslo různé od 0. To lze zapsat též v jednodušším tvaru $X = p \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$, kde $p \neq 0$.

c) Spektrální poloměr $\rho(A) = \{\max|\lambda_\mathrm{i}|;\ \mathrm{i} = 1, ..., \mathrm{n}\} = \max\{4;\ |2+2\mathrm{i}|;\ |2-2\mathrm{i}|\} = \max\{4;\ \sqrt{8}\} = 4$.

Poznámka. S pojmem spektrální poloměr matice se setkáme např. v numerické matematice při ověření podmínek konvergence iteračních metod pro přibližné řešení soustav lineárních rovnic.

Další úlohy k samostatnému procvičení lze nalézt v doporučené literatuře, kde jsou i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2010 (též 2008,2013).
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.