Vlastní čísla a vlastní vektory čtvercové matice

Definice Číslo λ (může být i komplexní) se nazývá vlastní číslo čtvercové matice A, jestliže existuje nenulový vektor X takový, že $A \cdot X = \lambda X$.

Vektor X se nazývá vlastní vektor odpovídající vlastnímu číslu λ.

Otázka. Proč je nulový vektor vyloučen ?

Poznámka. K vlastnímu číslu existuje nekonečně mnoho vlastních vektorů.

Postup při výpočtu: (soustava lin. rovnic s parametrem λ)

1. krok.

Řešíme charakteristickou rovnici matice A,

tj. rovnici $\det(A - \lambda E) = 0$. (1)

Vlastní čísla matice A jsou kořeny této rovnice.

2. krok.

Ke každému vlastnímu číslu λ zvlášť pak určíme odpovídající vlastní vektory X řešením homogenní soustavy lineárních rovnic

$(A - \lambda\, E) \cdot X = O$. (2)

!!! Soustava (2) musí mít nekonečně mnoho řešení !!!

Poznámka. Stupeň charakteristického polynomu.

Otázka. Řešení charakt. rovnice (1) pro $\boldsymbol{n = 3}$?

Některé další vlastnosti

a) Je-li λ vlastní číslo matice A s vlastním vektorem X, pak
λ^2 je vlastní číslo matice A^2 se stejným vlastním vektorem X.

b) Je-li matice A regulární, pak λ je vlastní číslo matice A právě tehdy, když $1/\lambda$ je vlastní číslo inverzní matice A^{-1}.
Odpovídající vlastní vektory jsou pro obě matice stejné.

c) Číslo $\lambda = 0$ je vlastní číslo matice A právě tehdy, když matice A je singulární.

d) Je-li λ vlastní číslo matice A s vlastním vektorem X,
pak $\overline{\lambda}$ je také vlastní číslo matice A, a to s vlastním vektorem $\overline{X}$.

Příklad a) Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Pro každé z vlastních čísel sestavte soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů a ty pak určete.

Příklad a) Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsl. $\lambda_1 = 4\mathrm{i}$, vlastní vektory $X = (5,\ 2 + 4\mathrm{i})^T \cdot p,\ p \neq 0.$

Pak $\lambda_2 = -4\mathrm{i}$, vlastní vektory $X = (5,\ 2 - 4\mathrm{i})^T \cdot p,\ p \neq 0.$

Příklad a) Najděte vlastní čísla matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Zvolte jedno z vlastních čísel, sestavte soustavu rovnic pro výpočet vlastních vektorů a ty určete.

c) Určete $\boldsymbol{\rho(A) = \max|\lambda_i|}$, tj. spektrální poloměr dané matice.

Výsl. $\lambda_1 = 2$, vlastní vektory $X = (0,\ 1,\ 0)^T \cdot p,\ p \neq 0$.

$\lambda_{2,3} = 2 \pm 2\mathrm{i}$, spektrální poloměr $\rho(A) = \sqrt{8}$.

Aplikace

1. $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, soustava lineárních rovnic

iterační metody (numerická matematika), kdy postupně počítáme posloupnost "lepšících se" přibližných řešení $\boldsymbol{X}^{\{n\}}$.

Podmínka pro konvergenci k přesnému řešení:
pro vlastní čísla tzv. iterační matice (podle použité numerické metody) platí: $\max|\boldsymbol{\lambda}_i| < \mathbf{1}$.

2. $\dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}$, soustava lineárních diferenciálních rovnic (MAT 3)

např. Je známa rychlost, určete trajektorii pohybu
Možné výsledky: elipsa, spirála, "parabola", "hyperbola"