Limita posloupnosti, limita funkce - přehled teorie, příklady (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz)

Při výpočtu limity používáme pojmy, tvrzení (věty) a postupy, které jsou uvedeny v kapitolách III.1 a III.4 ve skriptu [1] od J. Neustupy a v řešených příkladech ve Sbírce [2] ze seznamu literatury. Podle nich limitu skutečně **počítáme**. V úvodu kapitoly III jsou uvedena pravidla pro počítání v množině $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, v tzv. rošířené množině reálných čísel.

I. Při výpočtu limity posloupnosti používáme následující tvrzení.

1. Věta III.1.11 (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu posloupností)

2. Věta III.1.15 (o limitě sevřené posloupnosti)

3. Věta III.1.9 (o limitě vybrané posloupnosti)

Poznámka. Symbolem { výraz } jsou zapsány výrazy vzniklé při formálním použití věty o limitě součtu, rozdílu, součinu či podílu posloupností, resp. funkcí. (Stručně věta o "limitě aritm. operací", příp. o "limitě AO"). Jsou to zpravidla výrazy, jejichž hodnota není definována, tzv. neurčité výrazy. Výjimkou je typ $\{1/0\}$, o jehož hodnotě rozhodujeme podle níže uvedené Věty z odst. III.4.9.

Příklady

B1. $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)(3-2n)}{4n^2-(2n-1)^2} =^{1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{-4n^2+4n+3}{4n-1} =^{2)} \left\{\frac{-\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(-4+4/n+3/n^2)}{n(4-1/n)}$$

$$=^{3)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n(-4+4/n+3/n^2)}{4-1/n} =^{4)} \left\{\frac{+\infty(-4+0)}{4-0}\right\} = \frac{-\infty}{4} = -\infty.$$

Popis jednotlivých kroků:

1) Úprava výrazů

2) Podle věty o limitě "aritm. operací"by vyšel neurčitý výraz, proto v čitateli vytkneme nejvyšší mocninu, tj. n^2. Podobně ve jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu n.

3) Krátíme n.

4) Věta o limitě AO vede k definovanému výrazu, který upravíme podle pravidel pro počítání se symboly $+\infty, -\infty$.

B2. $$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n}) =^{1)} \{+\infty-(+\infty)\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} =^{2)} \text{ úpravy}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+4-n}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}} =^{3)} \frac{4}{+\infty} = 0.$$

1) Podle věty o limitě rozdílu by vyšel neurčitý výraz, proto větu nelze použít. Danou funkci tvaru $A-B$ upravíme násobením $A+B$ na tvar A^2-B^2, abychom odstranili odmocniny. Výrazem $A+B$ však musíme též dělit, abychom zachovali rovnost.

2) Úpravy výrazu v čitateli

3) Věta o "limitě AO"vede k výrazu $4/+\infty$, jehož hodnota 0 je hledanou limitou.

A1. $$\lim_{n\to+\infty}(n-\sqrt{n^2+n}) =^{1)} \{+\infty-(+\infty)\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}{n+\sqrt{n^2+n}} =^{2)} \text{ úpravy}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-(n^2+n)}{n+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}} =^{3)} \left\{\frac{-\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-n}{n(1+\sqrt{1+1/n})} =^{4)}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{1+\sqrt{1+1/n}} = {}^{5)} = -1/2.$

Popis jednotlivých kroků:

^{1}) Postupujeme stejně jako v 1. kroku předchozího příkladu.

^{2}) Úpravy výrazu v čitateli

^{3}) Podle věty o "limitě AO" vychází neurčitý výraz. Proto ve jmenovateli vytkneme nejvyšší mocninu, tj. n.

^{4}) Krátíme n.

^{5}) Věta o "limitě AO" vede k hodnotě $-1/2$, která je hledanou limitou.

II. Při výpočtu limity funkce používáme následující tvrzení.

1. Je-li funkce f **spojitá** v bodě x_0, pak je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Věta III.4.6 (o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí)

Pokud výraz napravo (tj. součet limit,...) nemá smysl, pak větu nelze použít. V těchto případech postupujeme takto:

2.1. Jedná-li se o **typ "1/0"**, pak použijeme **Větu z odst. III.4.9:**

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $f(x) > 0$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$, pak platí: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.
Je-li $f(x) < 0$ v $P(x_0)$, pak je $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

2.2. Jedná-li se o **neurčité výrazy typu "0/0" nebo "∞/∞"**, pak lze použít l'Hospitalovo pravidlo, tj. **Větu III.6.16.:** Předpokládejme, že $c \in \mathbb{R}^*$ a že limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ a $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ jsou buď obě nulové nebo obě nekonečné. Pak platí $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita vpravo existuje.

2.3. Jedná-li se o **neurčitý výraz typu "$0\cdot\infty$"**, pak danou funkci buď převedeme na podíl a pak zkusíme l'Hospitalovo pravidlo nebo provedeme nějakou jinou úpravu.

2.4. Jedná-li se o **neurčitý výraz typu "$\infty-\infty$"**, pak zkusíme danou funkci upravit.

3. Jedná-li se o **složenou funkci** $f(g(x))$, pak použijeme tomu odpovídající tvrzení, které je zobecněním vět III.4.32 a III.4.34.

Věta (o limitě složené funkce)

Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, kde $g(x) \neq a$ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$. Nechť $\lim\limits_{y\to a} f(y) = L$.
Pak platí: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = L$.

Příklady

$\boxed{\textbf{B3.}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{2x}}{\sin 3x - \frac{x}{2}} = {}^{1)} \left\{\dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin x - 2e^{2x}}{3\cos 3x - \frac{1}{2}} = {}^{2)} \dfrac{0-2}{3-\frac{1}{2}} = -4/5.$

Popis jednotlivých kroků:

^{1}) Podle věty o "limitě AO" by vyšel neurčitý výraz "0/0". To však znamená, že lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Při derivování nezapomeňte na složené funkce e^{2x}, $\sin 3x$.

^{2}) Podle věty o "limitě AO" získáme definovaný výraz, který upravíme.

B4. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2+3x+9}{x}$. Určete limitu pro $x \to 0_+$ a limitu pro $x \to +\infty$.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{x^2+3x+9}{x} =^{1)} \left\{\frac{9}{0}\right\} =^{2)} \left\{\frac{9}{0_+}\right\} = +\infty.$

Popis jednotlivých kroků: [1]) Podle věty o "limitě AO"by vyšel nedefinovaný výraz "9/0".

[2]) Funkce ve jmenovateli, zde to je $g(x) = x$, nabývá pro $x \to 0_+$ hodnot kladných. Podle Věty III.4.9 je tedy výsledná limita $+\infty$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x+9}{x} =^{1)} \left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{1} =^{2)} \left\{\frac{+\infty}{1}\right\} = +\infty.$

Popis jednotlivých kroků:

[1]) Podle věty o "limitě AO"by vyšel neurčitý výraz "$+\infty/+\infty$". To však znamená, že lze použít l'Hospitalovo pravidlo.

[2]) Věta o "limitě AO"vede k hodnotě$+\infty$.

A2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x - 1}{x\sin x} =^{1)} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin 3x}{\sin x + x\cos x} =^{2)} \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{-9\cos 3x}{2\cos x - x\sin x} =^{3)} = -9/2.$

Popis jednotlivých kroků:

[1]) Podle věty o "limitě AO"by vyšel neurčitý výraz "0/0". Lze tedy použít l'Hospitalovo pravidlo.

[2]) Podruhé by vyšel neurčitý výraz "0/0", znovu lze použít l'Hospitalovo pravidlo.

[3]) Věta o "limitě AO"vede k definované hodnotě $= -9/2$.

A3. Je dána funkce $f(x) = \mathrm{e}^{x-x^2}$. Určete definiční obor a limity v jeho krajních bodech.

Def. obor $D(f) = (-\infty, +\infty)$, budeme tedy počítat limitu pro $x \to -\infty$ a limitu pro $x \to +\infty$. Postupujeme podle věty o limitě složené funkce.

a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x-x^2} = 0$, neboť:

1. Limita vnitřní funkce $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x - x^2) =^{1)} \{+\infty - (+\infty)\} = \lim_{x\to +\infty} x^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) =^{2)} +\infty \cdot (0-1) = -\infty$.

2. Limita vnější funkce $\displaystyle\lim_{y\to -\infty} \mathrm{e}^y = 0$ [3])

3. Podle věty o limitě složené funkce je tedy $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x-x^2} = 0$

Popis jednotlivých kroků:

[1]) Podle věty o limitě rozdílu by vyšel neurčitý výraz, proto větu nelze použít. Danou funkci upravíme vytknutím nejvyšší mocniny.

[2]) Věta o "limitě AO"vede k hodnotě $-\infty$.

[3]) Znalost základních vlastností exponenciální funkce.

b) Podobně vypočítáme, že stejný výsledek má limita v levém krajním bodě, tj. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \mathrm{e}^{x-x^2} = 0$.

Výpočet limity vnitřní funkce je v tomto případě kratší, neboť věta o limitě rozdílu vede k definovanému výrazu i bez úpravy: $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x - x^2) = \{-\infty - (+\infty)\} = -\infty$.

Další úlohy k samostatnému procvičení lze nalézt v doporučené literatuře, kde jsou i úlohy řešené.

Literatura:

[1] J. Neustupa: Matematika I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
[2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: Sbírka příkladů z Matematiky I. Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2014.
[3] E. Brožíková, M. Kittlerová: Diferenciální počet funkcé jedné proměnné (řešené příklady). Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2007.