Pravděpodobnost a matematická statistika

Doc. RNDr. Gejza Dohnal, CSc.

dohnal@nipax.cz

Pravděpodobnost a matematická statistika
2010

1.týden (20.09.-24.09.) Data, typy dat, variabilita, frekvenční analýza (histogramy, četnosti absolutní, relativní, prosté, kumulativní), základní statistické charakteristiky (průměr, výběr.rozptyl, minimum, maximum, medián, kvartily, boxplot), sešikmenná rozdělení (vzájemná poloha mediánu a střední hodnoty), chvosty, kvantily

2. týden (27.09.-01.10.) Princip statistické indukce, výběr, vlastnosti výběru, experiment. Náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti a jeho souvislost s histogramem. Pravděpodobnost, pravidla pro počítání s pravděpodobností, podmíněná pravděpodobnost, závislost náhodných veličin.

3.týden (04.10.-08.10.) Využití závislosti při stanovení pravděpodobnosti - věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesova věta

4.týden (11.10.-15.10.) Rozdělení chyb měření - normální rozdělení a počítání s ním. Odhady parametrů normálního rozdělení. Intervaly spolehlivosti pro normální data. Jednovýběrové testy o střední hodnotě

5.týden (18.10.-24.10.) Výběrový poměr jako odhad pravděpodobnosti sledovaného jevu. Alternativní rozdělení, binomické rozdělení. Intervalový odhad výběrového poměru. Výběry s vracením a bez vracení (binomické a hypergeometrické rozdělení)

6.týden (25.10.-29.10.) odpadá

7.týden (01.11.-05.11.) Poruchy v čase (Poissonův proces). Poissonovo rozdělení, exponenciální rozdělení, jeho výhody a nevýhody, modelování doby do poruchy pomocí Weibullova rozdělení, lognormálního rozdělení, případně useknuté normální rozdělení.

8.týden (08.11.-12.11.) Testy dobré shody, Q-Q graf (pouze vysvětlení), testy normality. Některé neparametrické testy

9.týden (15.11.-19.11.) Dvě náhodné veličiny - srovnání dvou výběrů (dvouvýběrové testy)

10. týden (22.11.-26.11.) Dvě náhodné veličiny. Dvourozměrné četnosti jako odhad dvourozměrného rozdělení, frekvenční tabulka. Marginální rozdělení (vše pouze diskrétně s tabulkou)

11. týden (29.11.-03.12.) Závislost náhodných veličin, míry závislosti (kovariance, korelace), test významnosti korelačního koeficientu

12. týden (06.12.-10.12.) Regrese, lineární regresní model (přímková, kvadratická, polynomická regrese), analýza reziduí, pásy spolehlivosti

13. týden (13.12.-17.12.) Více výběrů, jednoduché třídění, ANOVA.

14. týden (20.12.-22.12.) Rezerva, opakování, testy normality (náhrada za 28.10.)

Pravděpodobnostní modely

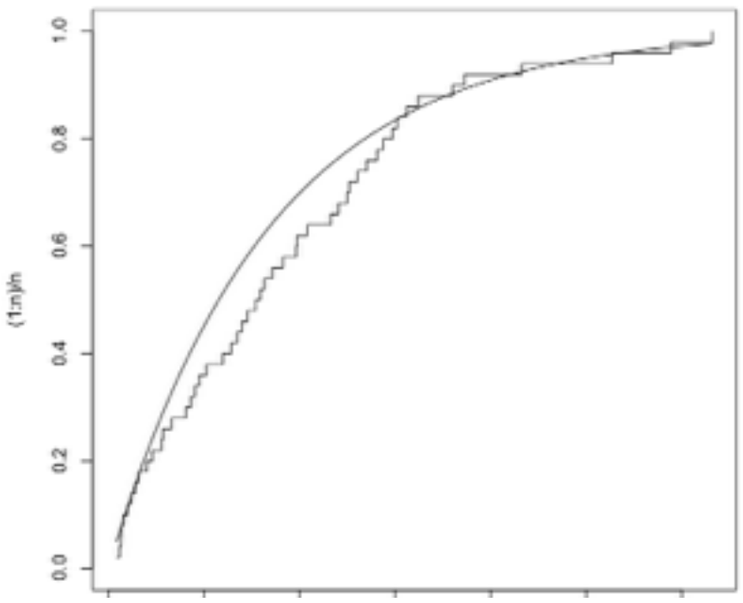
1) Diskrétní:

- Rovnoměrný $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$
- Alternativní $\Omega = \{0, 1\}$
- Binomický $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$
- Hypergeometrický $\Omega = \{\max(0, n + M - N), \ldots, \min(n, M)\}$
- Geometrický $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- Poissonův $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$

2) Spojité:

- Rovnoměrný $\Omega = \langle a, b \rangle$
- Normální $\Omega = (-\infty, \infty)$
- Exponenciální $\Omega = \langle 0, \infty)$
- Weibullův
- Logaritmicko-normální

Testy dobré shody

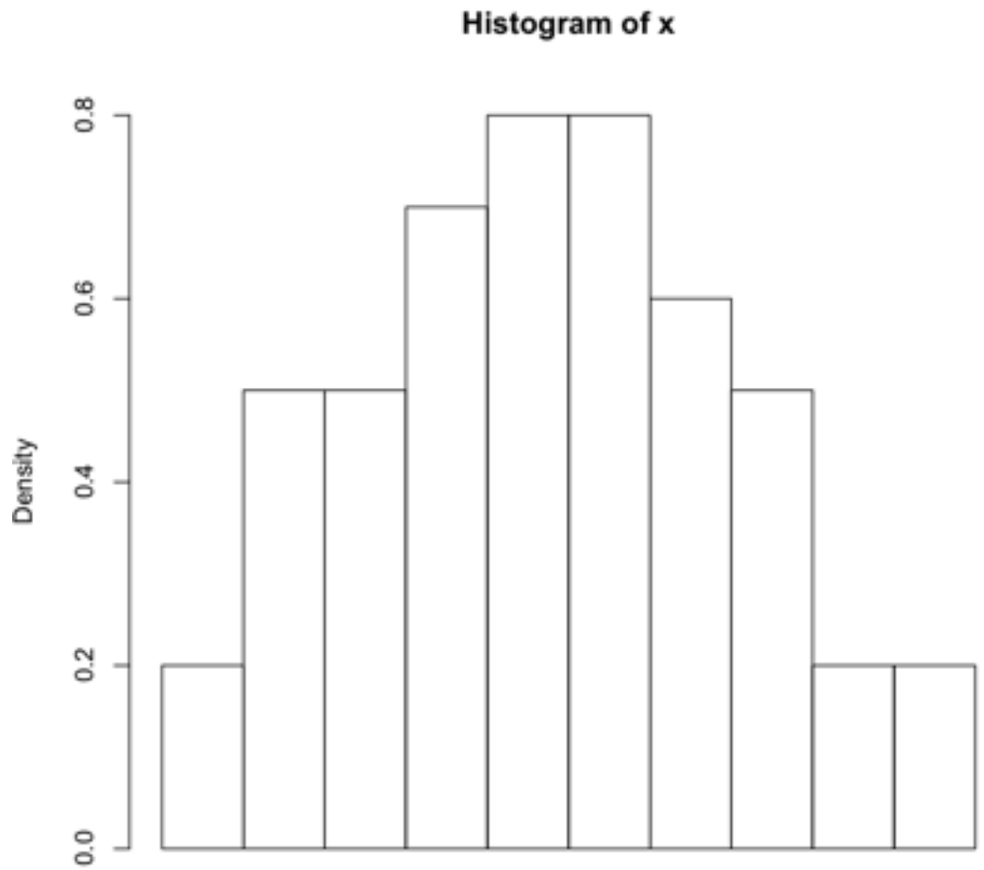


Jaká je shoda pozorovaného experimentu s teoretickým modelem?

Testy dobré shody

Co máme k dispozici?

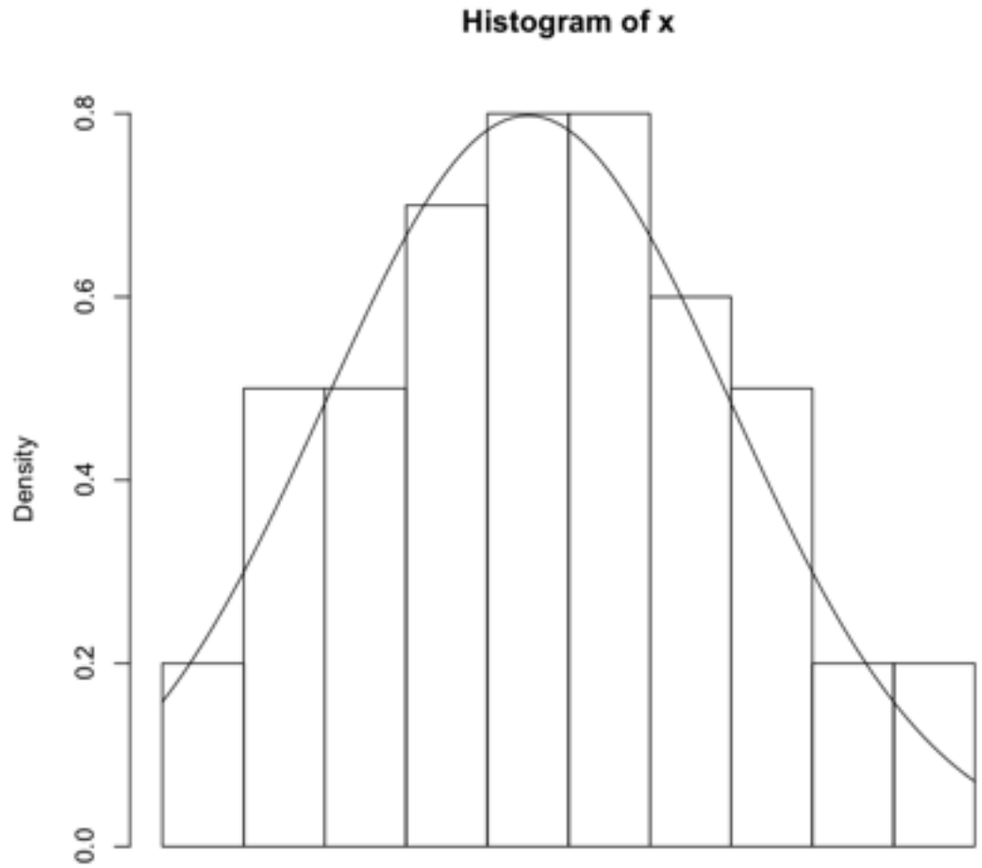
1) Pozorování výsledků experimentu (měření) = data



Testy dobré shody

Co máme k dispozici?

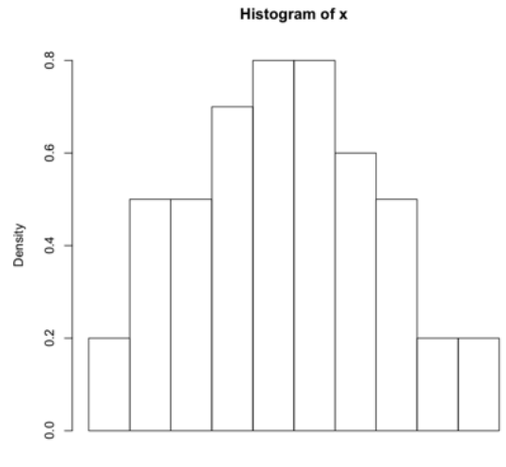
1) Pozorování výsledků experimentu (měření) = data
2) Představu o hypotetickém (teoretickém) rozdělení pozorované veličiny

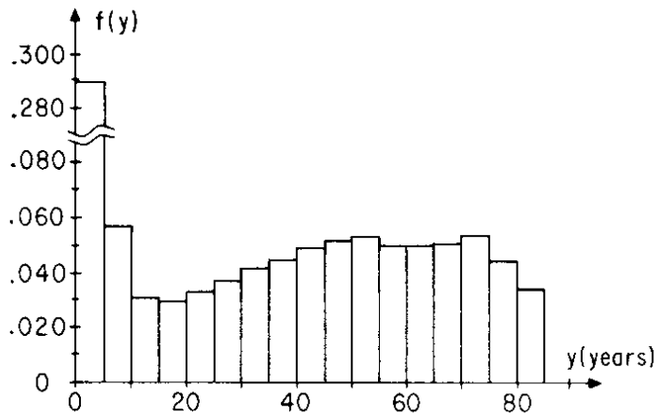


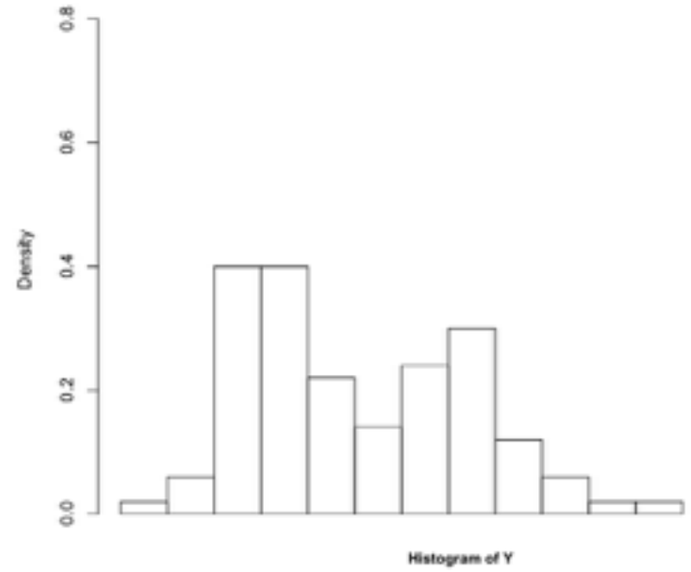
Testy dobré shody

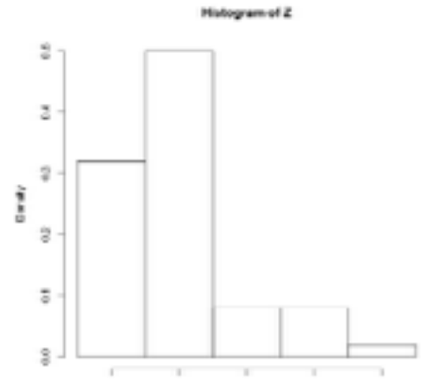
Co s tím?

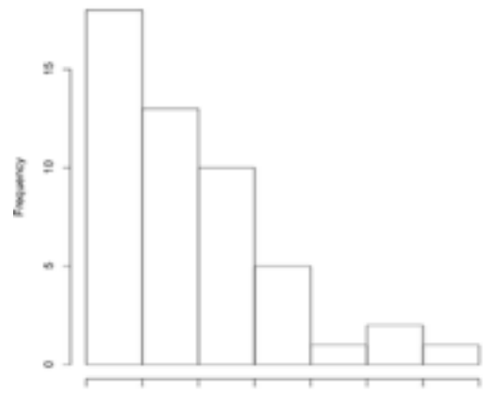
1) Histogram - poskytuje předběžnou představu o tvaru hustoty









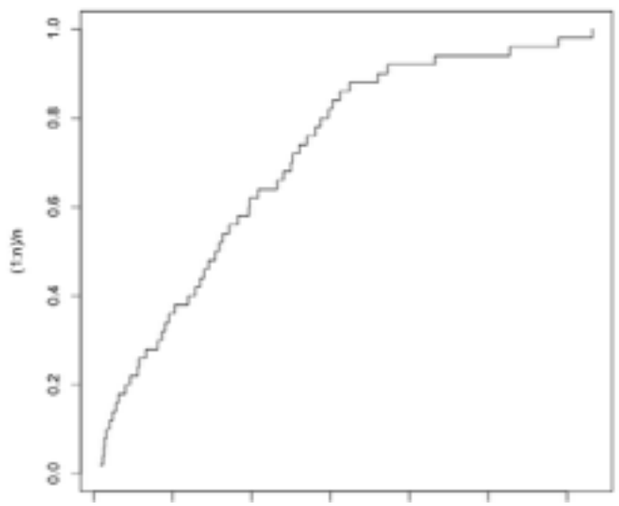


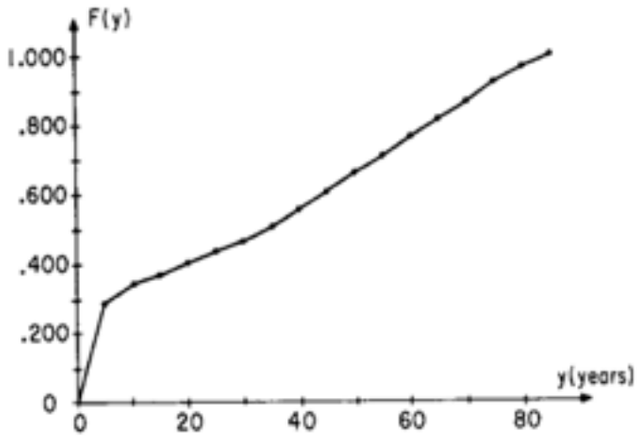
Lze použít například Sturgessovo pravidlo pro volbu počtu tříd: $k = 1 + \frac{1}{3}\log_{10}(k)$

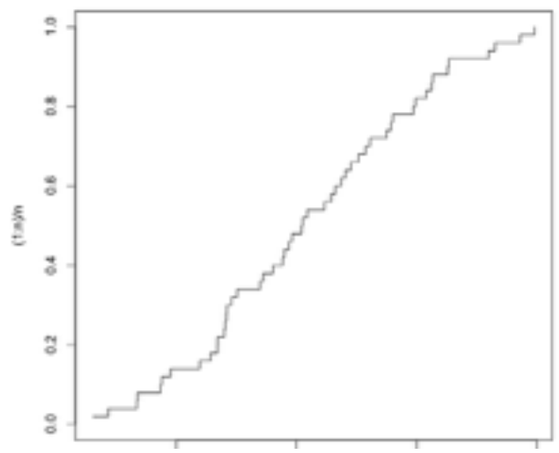
Testy dobré shody

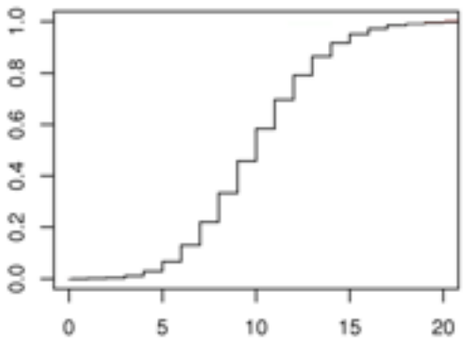
Co s tím?

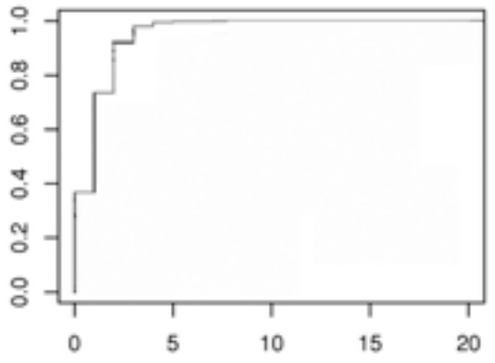
2) Empirická distribuční funkce - poskytuje předběžnou představu o tvaru distribuční funkce











Testy dobré shody

Co s tím?

3) Informaci o rozdělení nám poskytují i výběrové momenty:

1. výběrový moment = aritmetický průměr: ..... $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
   (bodový odhad střední hodnoty)

2. výběrový centrální moment = výběrový rozptyl ..... $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

3. výběrový centrální moment ..... $m_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^3$
   (bodový odhad
   koeficientu šikmosti: $S_{kew} = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}$

4. výběrový centrální moment ..... $m_4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^4$
   (bodový odhad
   koeficientu špičatosti: $K_{urt} = \frac{m_4}{m_2^2}$

Testy dobré shody

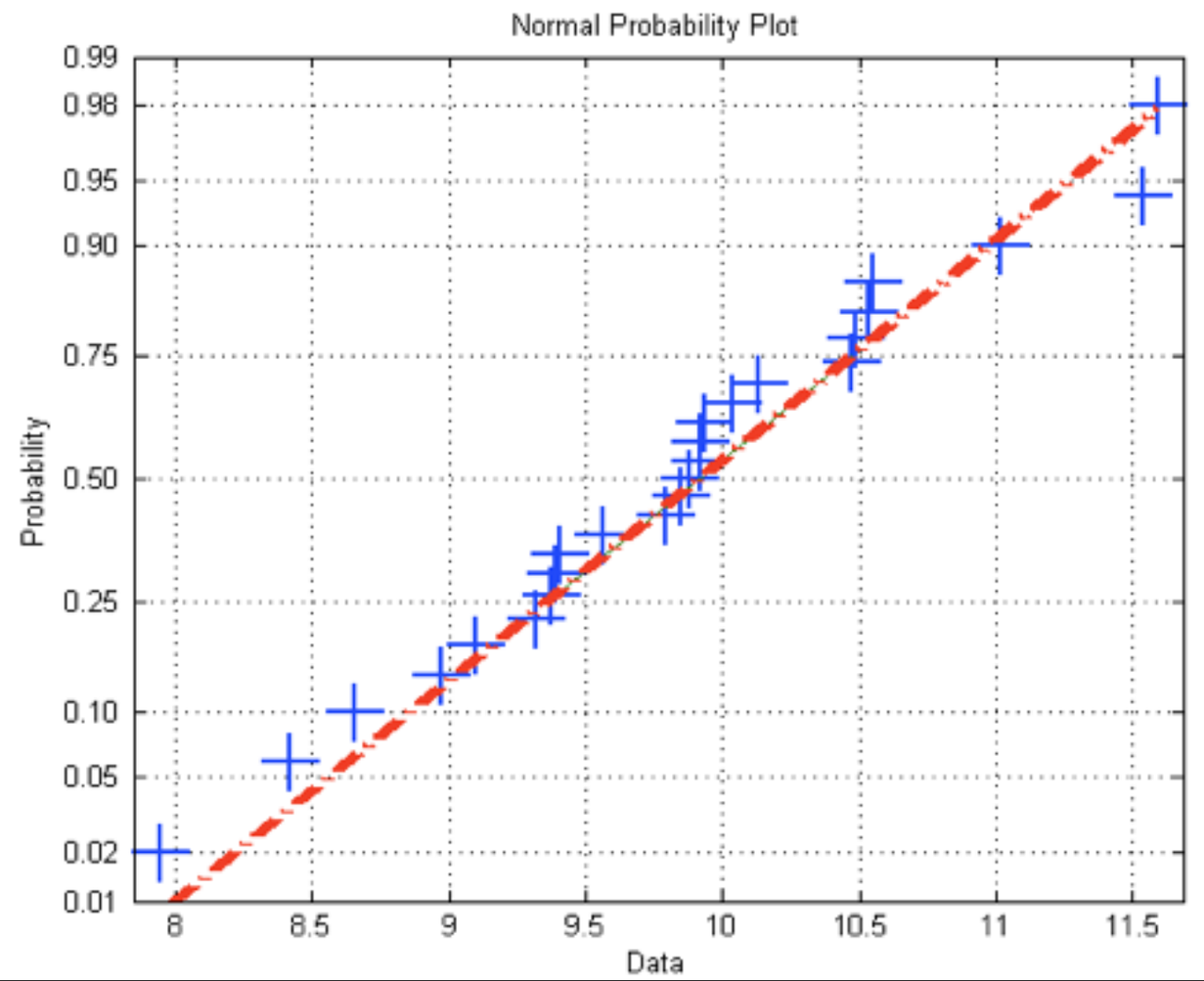
Co dál?

1) Grafická analýza

•histogram, boxplot, empirická distribuční funkce

•pravděpodobnostní papír
  osa x: lineární
  osa Y: transformované
  “pravděpodobnostní”
  měřítko

  Zakreslujeme dvojice
  $(x_{(i)}, i/n)$



Testy dobré shody

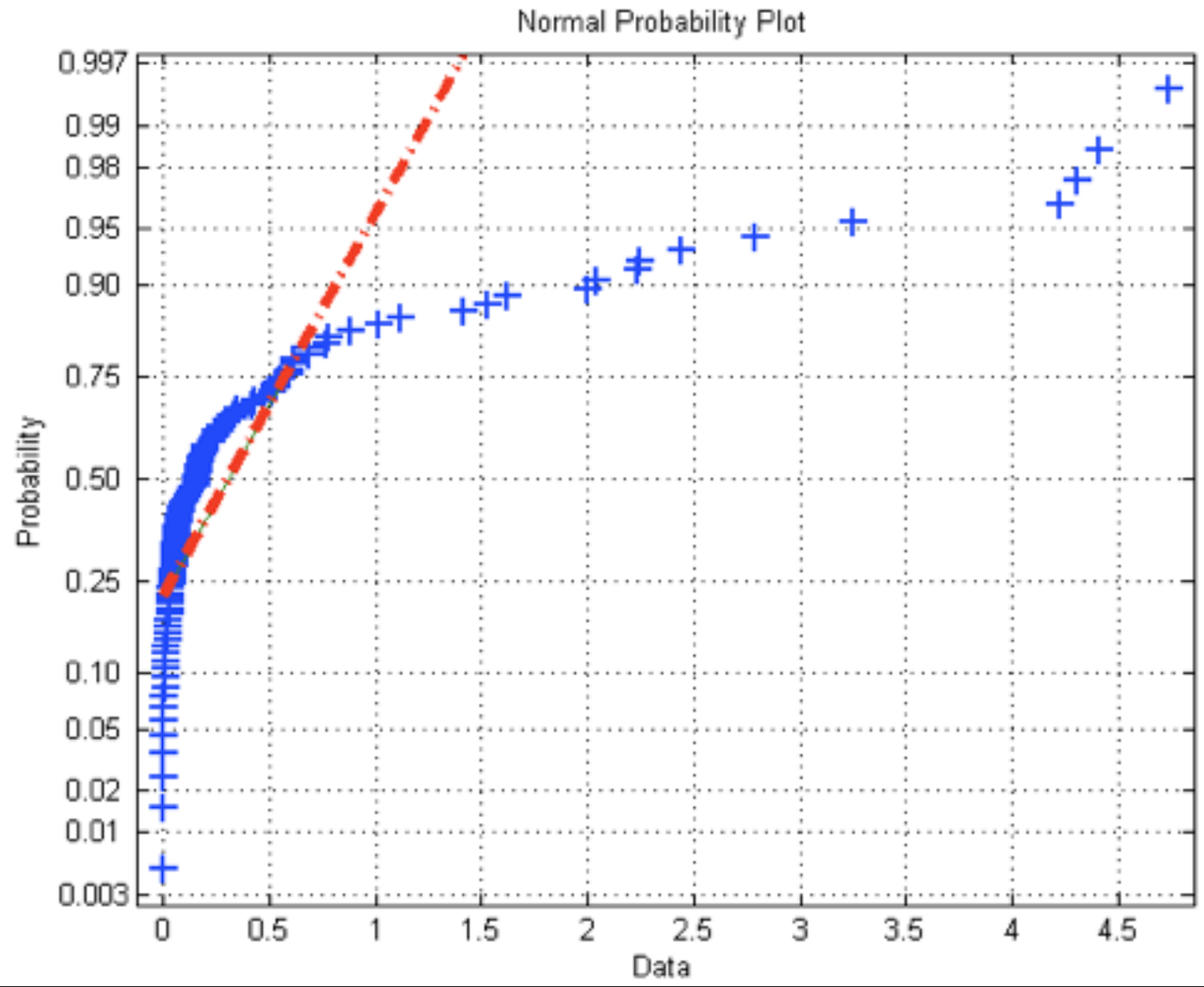
Co dál?

1) Grafická analýza

•histogram, boxplot, empirická distribuční funkce

•pravděpodobnostní papír
  osa x: lineární
  osa Y: transformované
   “pravděpodobnostní”
   měřítko

  Zakreslujeme dvojice
  $(x_{(i)}, i/n)$



Testy dobré shody

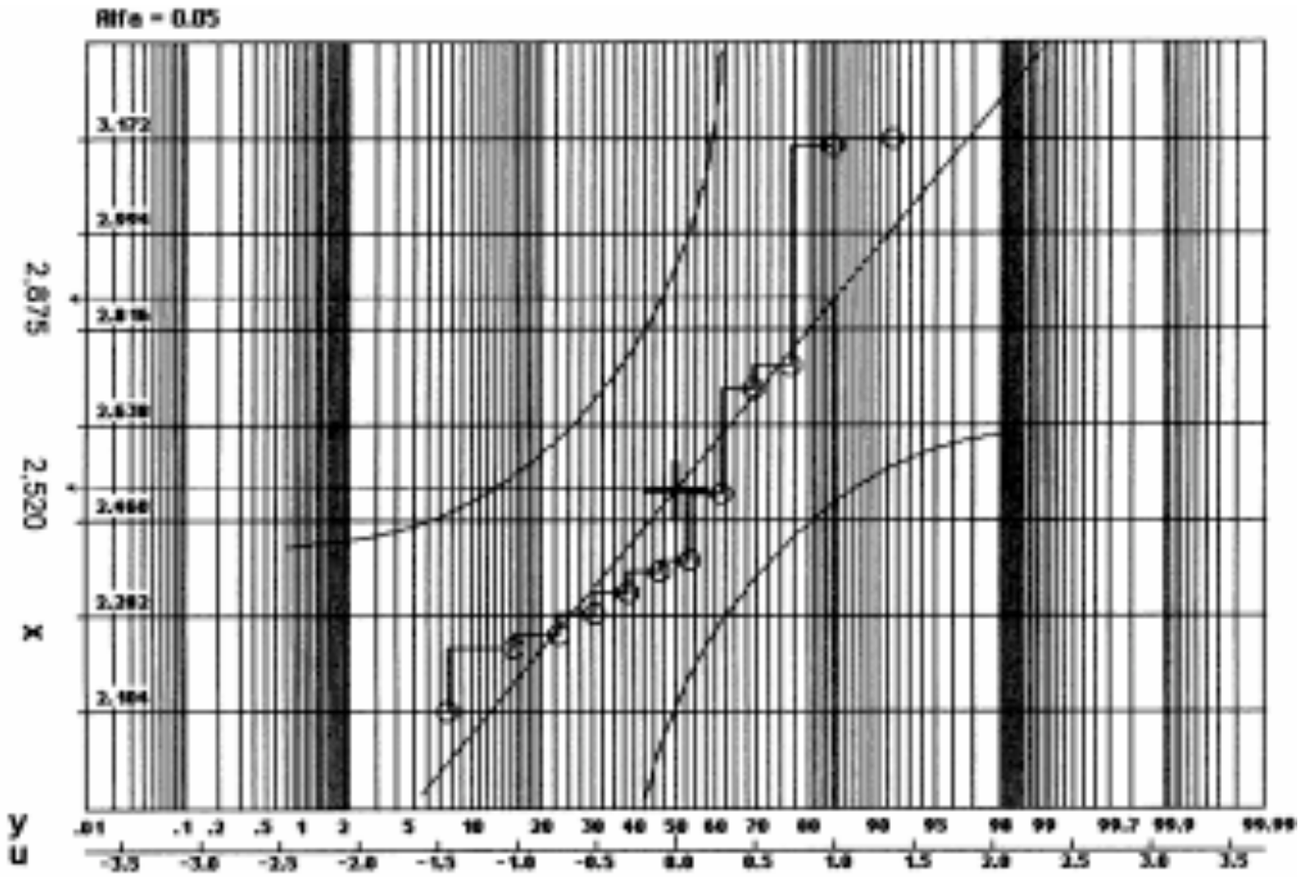
Co dál?

1) Grafická analýza

•histogram, boxplot, empirická distribuční funkce

•pravděpodobnostní papír
  osa x: lineární
  osa Y: transformované
   “pravděpodobnostní”
   měřítko

  Zakreslujeme dvojice
  $(x_{(i)}, i/n)$



Testy dobré shody

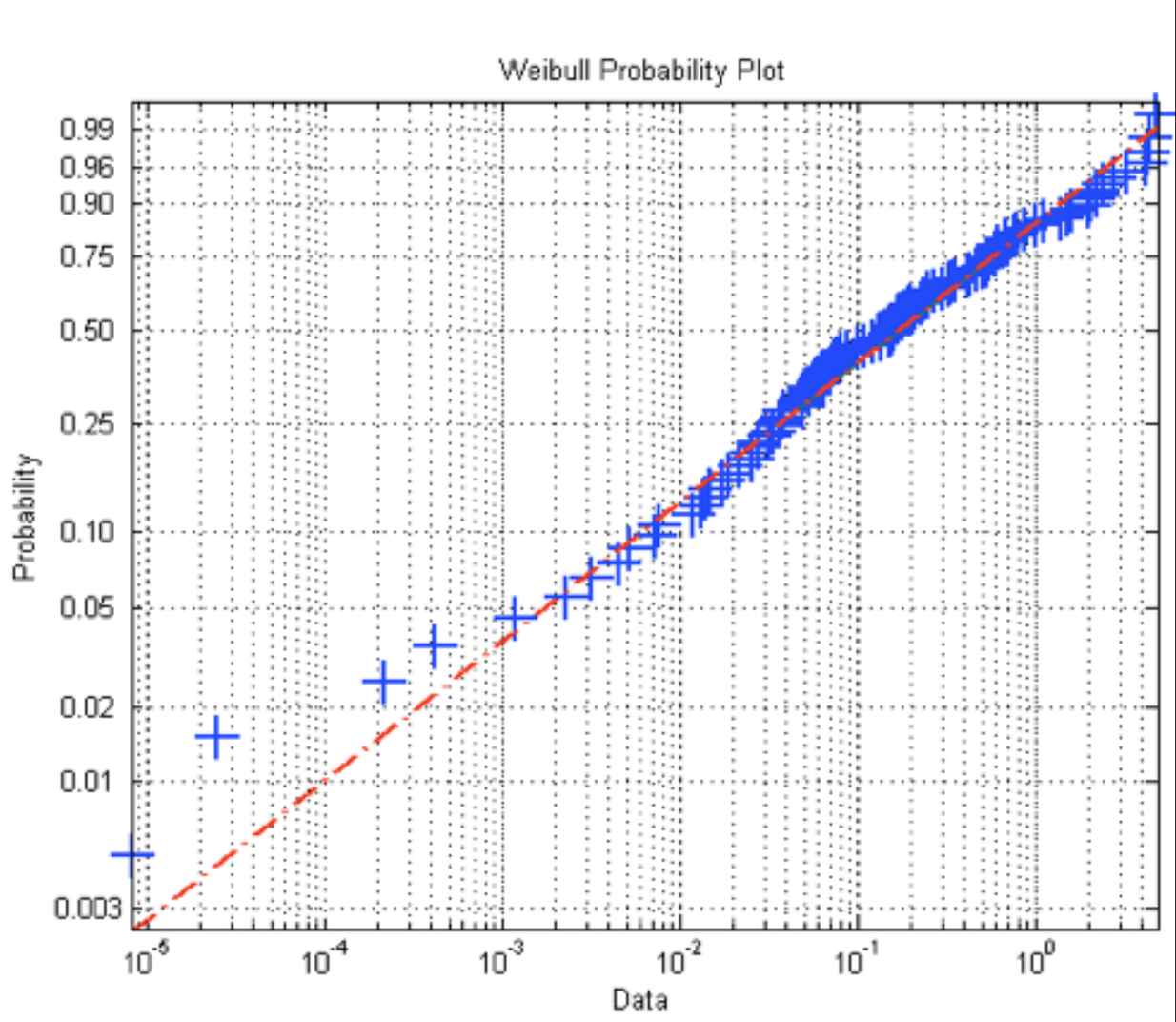
Co dál?

1) Grafická analýza

•histogram, boxplot, empirická distribuční funkce

•pravděpodobnostní papír
  osa x: lineární
  osa Y: transformované
  “pravděpodobnostní”
  měřítko

  Zakreslujeme dvojice
  $(x_{(i)}, i/n)$

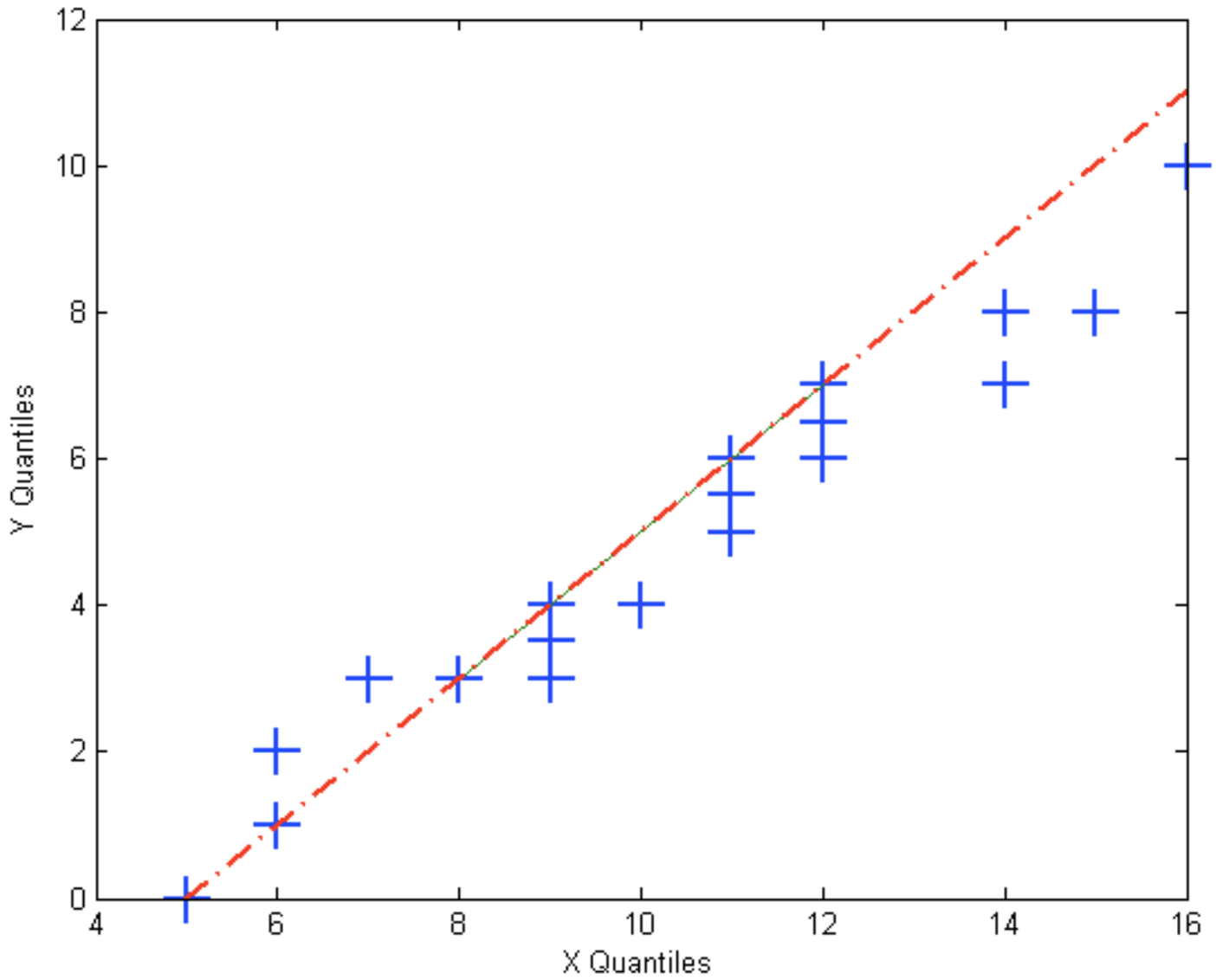


Testy dobré shody

Co dál?

1) Grafická analýza

- Q-Q graf
  - osa x: měření
  - osa y: kvantily
    - hypotetické d.f



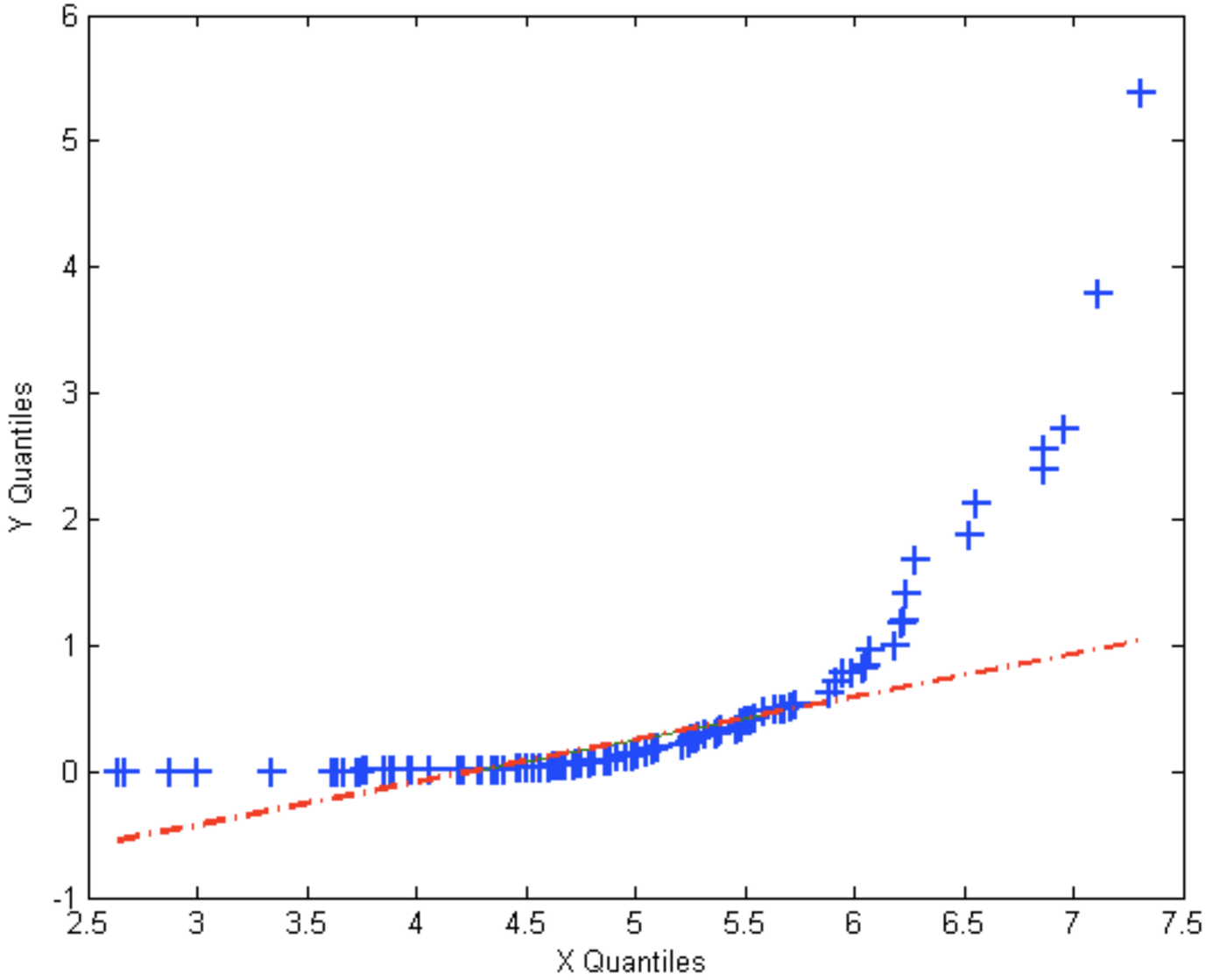
Zakreslujeme dvojice $(x_{(i)}, \mathrm{F}^{-1}(i/n))$

Testy dobré shody

Co dál?

1) Grafická analýza

•Q-Q graf
osa x: měření
osa y: kvantily
hypotetické d.f.



Pomocí grafické analýzy můžeme metodou srovnání se standardními modely pouze odhadnout typ rozdělení

Testy dobré shody

Co dál?

2) Kvantitativní testy hypotézy o daném typu rozdělení

nulová hypotéza : $H_0: \quad F(x) = F_0(x)$

alternativní hypotéza: $H_A: \quad F(x) \neq F_0(x)$

testová statistika : $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

hladina významnosti: α

chyba 1. druhu: zamítneme hypotézu, která platí

chyba 2. druhu: nezamítneme hypotézu, která neplatí

hladina významnosti testu: pravděpodobnost chyby 1. druhu

síla testu: pravděpodobnost zamítnutí hypotézy, když neplatí

p-hodnota: nejmenší hladina významnosti, při které bychom ještě zamítli nulovou hypotézu.

Testy dobré shody

Co dál?

2) Kvantitativní testy hypotézy o daném typu rozdělení

Chí-kvadrát test dobré shody

Kolmogorov-Smirnovův test

Testy normality (Shapiro-Wilkův test, testy na základě šikmosti a špičatosti, Lilieforsův, Anderson-Darlingův test)

Kvantitativní statistické testy nám poskytnou objektivní míru shody dat s teoretickým modelem

Chí-kvadrát test dobré shody

Test srovnává empirické a teoretické četnosti při zadaném třídění:

i) provedeme roztřídění naměřených hodnot do k tříd

ii) napočítáme empirické četnosti $n_1, n_2, ..., n_k$

iii) napočítáme pravděpodobnosti tříd $p_1, p_2, ..., p_k$ při hypotetickém rozdělení (kde $p_j = F(x_{j+1}) - F(x_j)$)

iv) napočítáme teoretické četnosti $np_1, np_2, ..., np_k$

v) pokud pro všechna $j = 1, 2, ..., k$ platí $np_j > 5$, spočítáme hodnotu testové statistiky

$$\chi^2 = \sum_{j-1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$$

vi) neplatí-li podmínka v bodě (v), provedeme úpravu třídních intervalů (nemusejí být stejně velké)

Chí-kvadrát test dobré shody

Test srovnává empirické a teoretické četnosti při zadaném třídění pomocí testové statistiky

$$\chi^2 = \sum_{j-1}^{k} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$$

vii) známe-li parametry hypotetického rozdělení předem, bude mít testová statistika rozdělení $\chi^2(k-1)$ a nulovou hypotézu zamítneme, pokud bude $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$, kde $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ je $(1-\alpha)$-kvantil chí-kvadrát rozdělení o $(k$-$1)$ stupních volnosti.

viii) pokud neznámé parametry hypotetického rozdělení odhadujeme z naměřených dat, bude mít testová statistika chí-kvadrát rozdělení o $(k$-r-$1)$ stupních volnosti, kde r je počet odhadovaných parametrů. Nulovou hypotézu v tomto případě zamítneme, pokud bude $\chi^2 \geq \chi^2_{1-\alpha}(k-r-1)$

Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody

Test srovnává empirickou a teoretickou distribuční funkci pomocí maximálního rozdílu hodnot.

i) seřadíme n naměřených hodnot podle velikosti od nejmenší do největší

ii) pro každou hodnotu $x_{(i)}$ spočteme rozdíly

$$\left|F_0(x_{(i)}) - \frac{i}{n}\right|, \qquad \left|F_0(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n}\right|$$

iii) největší z těchto rozdílů je hodnota testové statistiky $D(n)$

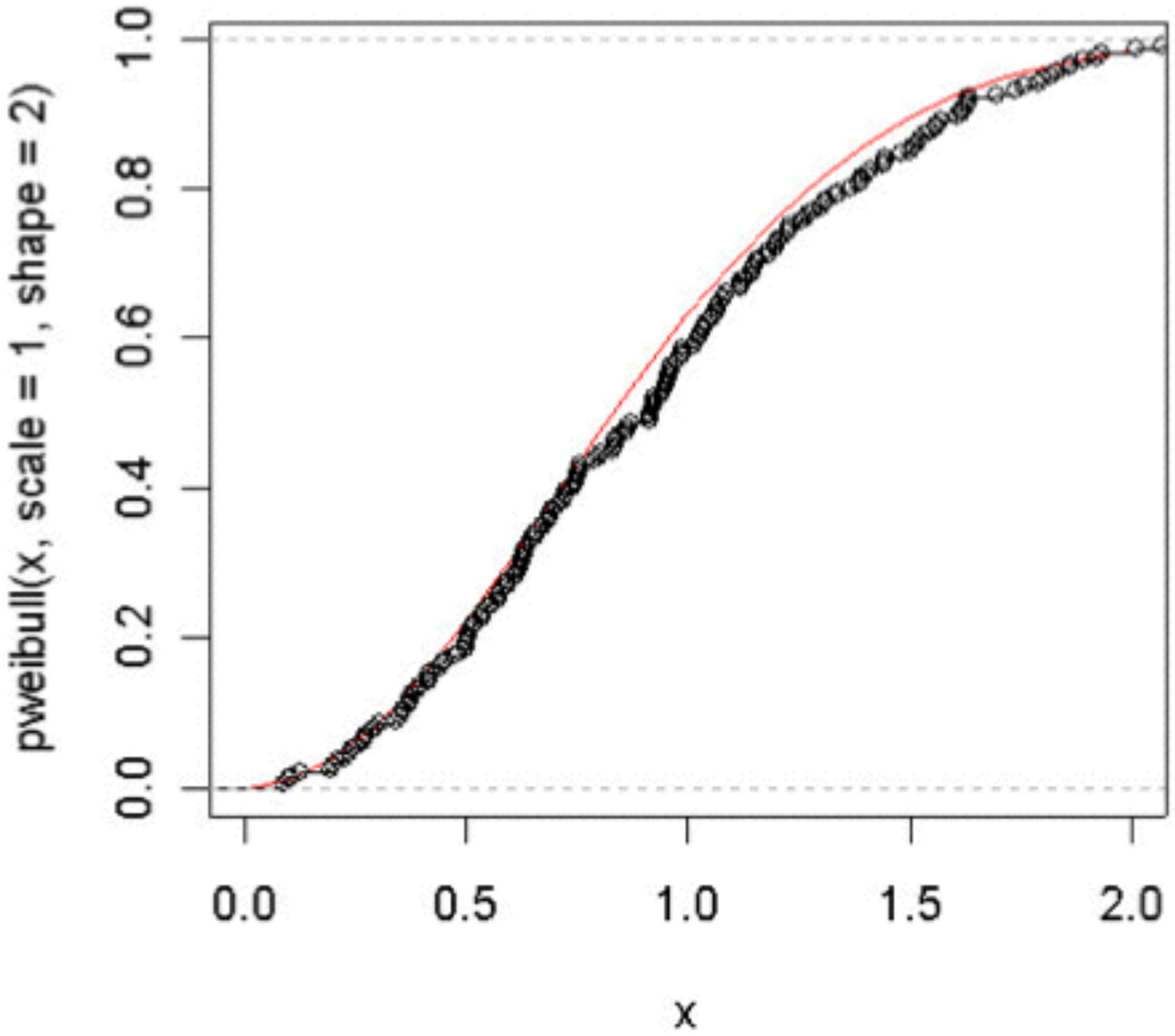
iv) pokud je hypotetické rozdělení známé včetně parametrů, použijeme krok (v). Jinak musíe použít některou z modifikací K-S testu (Liliefors, Anderson-Darling)

v) pro malá n tuto hodnotu porovnáme s tabulkovou kritickou hodnotou $d_{1-\alpha}(n)$ pro K-S-test. Pro velká n můžeme použít aproximaci $d_{1-\alpha}(n) = \sqrt{(1/2n)\ln(2/\alpha)}$

Pokud je $D(n) \geq d_{1-\alpha}(n)$, nulovou hypotézu zamítáme.

Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody

```
> x<-seq(0,2,0.1)
> plot(x,pweibull(x,scale=1,shape=2),type="l",col="red")
> plot(ecdf(x.wei),add=TRUE)
```



Kolmogorov-Smirnovův test dobré shody

```
> ks.test(x.wei,"pweibull", shape=2,scale=1)

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

  data: x.wei D = 0.0623, p-value = 0.4198
  alternative hypothesis: two.sided
```

Testy normality

Testy na základě šikmosti a špičatosti

Za předpokladu, že výběr pochází z normálního rozdělení, platí pro index šikmosti:

$$E(S_{kew}^{norm}) = 0$$

$$Var(S_{kew}^{norm}) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}$$

a pro index špičatosti:

$$E(K_{urt}^{norm}) = 3 - \frac{6}{n+1}$$

$$Var(K_{urt}^{norm}) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}$$

Máme-li dostatečný počet pozorování (řádově stovky), mají statistiky

$$T_3 = \frac{S_{kew}^{norm}}{\sqrt{Var(S_{kew}^{norm})}} \qquad T_4 = \frac{K_{urt}^{norm} - E(K_{urt}^{norm})}{\sqrt{Var(K_{urt}^{norm})}}$$

přibližně standardní normální rozdělení pravděpodobnosti.

Testy normality

Testy na základě šikmosti a špičatosti

Tedy hypotézu o normalitě na základě šikmosti zamítáme, pokud bude platit $|T_3| \geq u_\alpha$, nebo pokud bude $p \leq \alpha$, kde $p = 2\min\{\Phi(T_3), 1 - \Phi(T_3)\}$

Hypotézu o normalitě na základě špičatosti zamítáme, pokud bude platit $|T_4| \geq u_\alpha$, nebo pokud bude $p \leq \alpha$, kde $p = 2\min\{\Phi(T_4), 1 - \Phi(T_4)\}$

Oba testy by se měly používat současně, proto se často používá kombinovaný test s testovou statistikou $T_{34} = T_3^2 + T_4^2$, která má χ^2-rozdělení o 2 stupních volnosti. Hypotézu o normalitě potom zamítáme, když $T_{34} \geq \chi^2_\alpha(2)$

Testy normality

Shapirův-Wilkův test

Jeden z nejsilnějších testů normality

$$SW = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_{(i)} x_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n} a_{(i)}^2 \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - \bar{x})^2}$$

kde $a_{(i)} = \Phi^{-1}\left(\frac{8i-3}{8n+2}\right)$ a kritické hodnoty jsou tabelovány.

=> pro aplikaci tohoto testu potřebujete tabulky a počítač, případně specializovaný statistický software.

```
>  shapiro.test(x.norm)

          Shapiro-Wilk normality test

data: x.norm W = 0.9938, p-value = 0.5659
```

Testy normality

Shapirův-Wilkův test

Jeden z nejsilnějších testů normality

$$SW = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} a_{(i)} x_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{n} a_{(i)}^2 \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - \bar{x})^2}$$

kde $a_{(i)} = \Phi^{-1}\left(\frac{8i-3}{8n+2}\right)$ a kritické hodnoty jsou tabelovány.

=> pro aplikaci tohoto testu potřebujete tabulky a počítač, případně specializovaný statistický software.

Lilieforsův test

Testová statistika je totožná s Kolmogorov-Smirnovovým testem, parametry hypotetického rozdělení odhadujeme z dat a kritické hodnoty hledáme v tabulkách

Testy normality

Lilieforsův test

Testová statistika je totožná s Kolmogorov-Smirnovovým testem, parametry hypotetického rozdělení odhadujeme z dat a kritické hodnoty hledáme v tabulkách

Anderson-Darlingův test

Test, který je modifikací Kolmogorovova-Smirnovova testu (používá empirickou distribuční funkce a uspořádaný výběr) s testovou statistikou

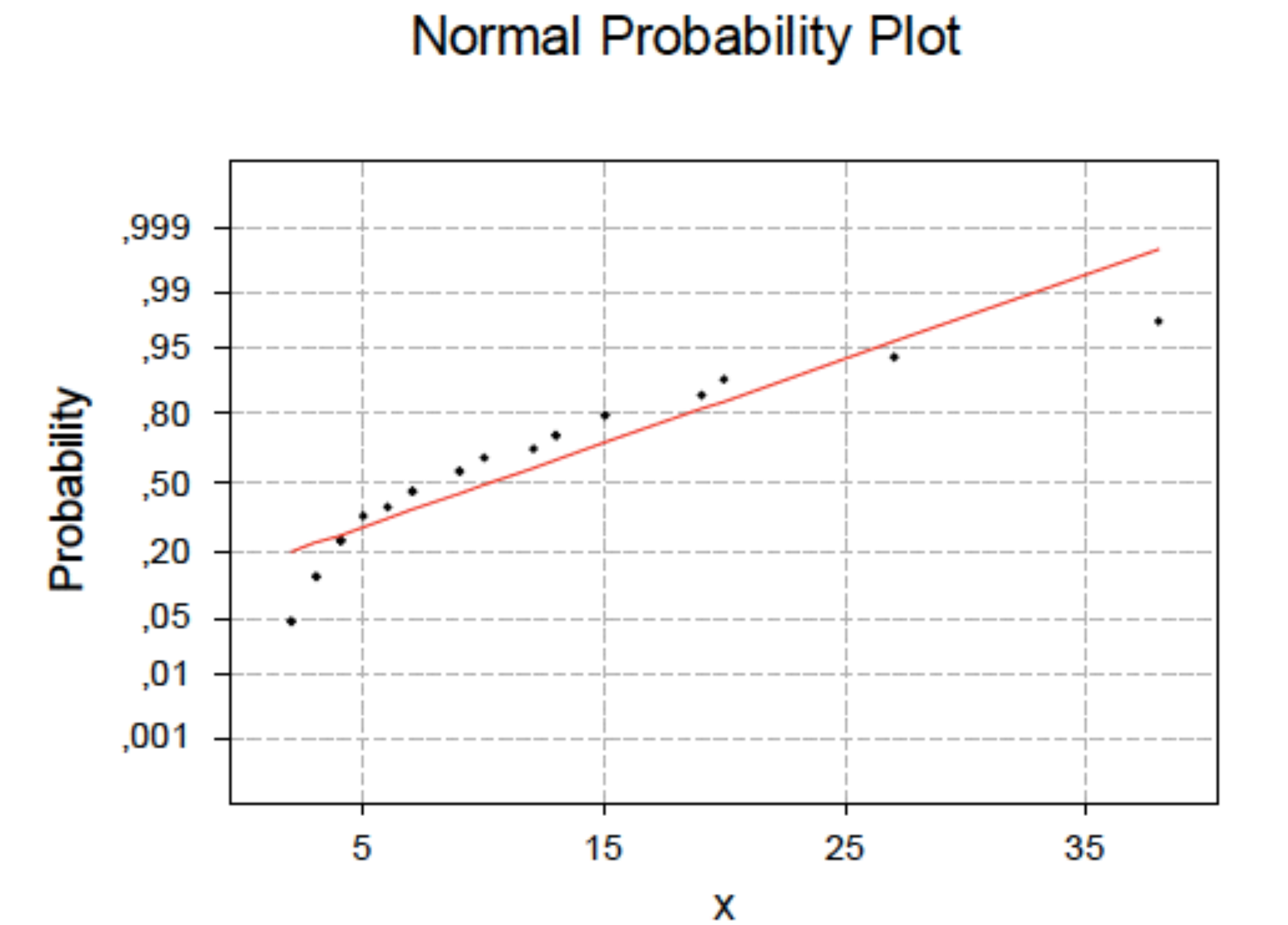
$$AD = -\frac{\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left(\ln F_0(x_{(i)}) + \ln(1 - F_0(x_{(n-i+1)})\right)}{n} - n$$

Kritické hodnoty jsou pro malá n tabelovány, pro velká n lze použít aproximaci $ad_{0,95} = 1,0348(1 - 1,013/n - 0,93/n^2)$

=> pro aplikaci tohoto testu potřebujete tabulky a počítač, případně specializovaný statistický software.

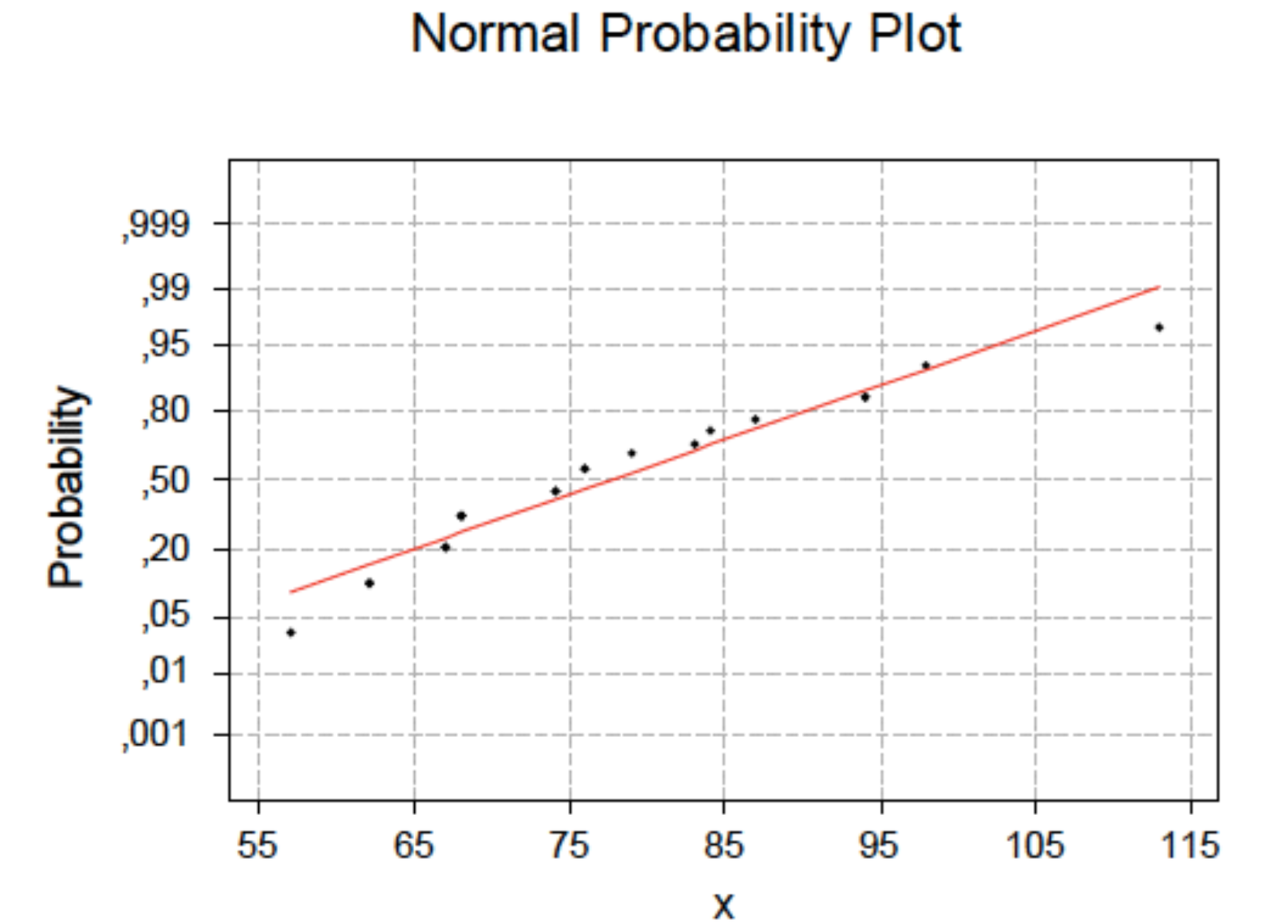
Testy normality

Anderson-Darlingův test



Testy normality

Anderson-Darlingův test



Testy dobré shody

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455	24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721	24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405	23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285	24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777	24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906

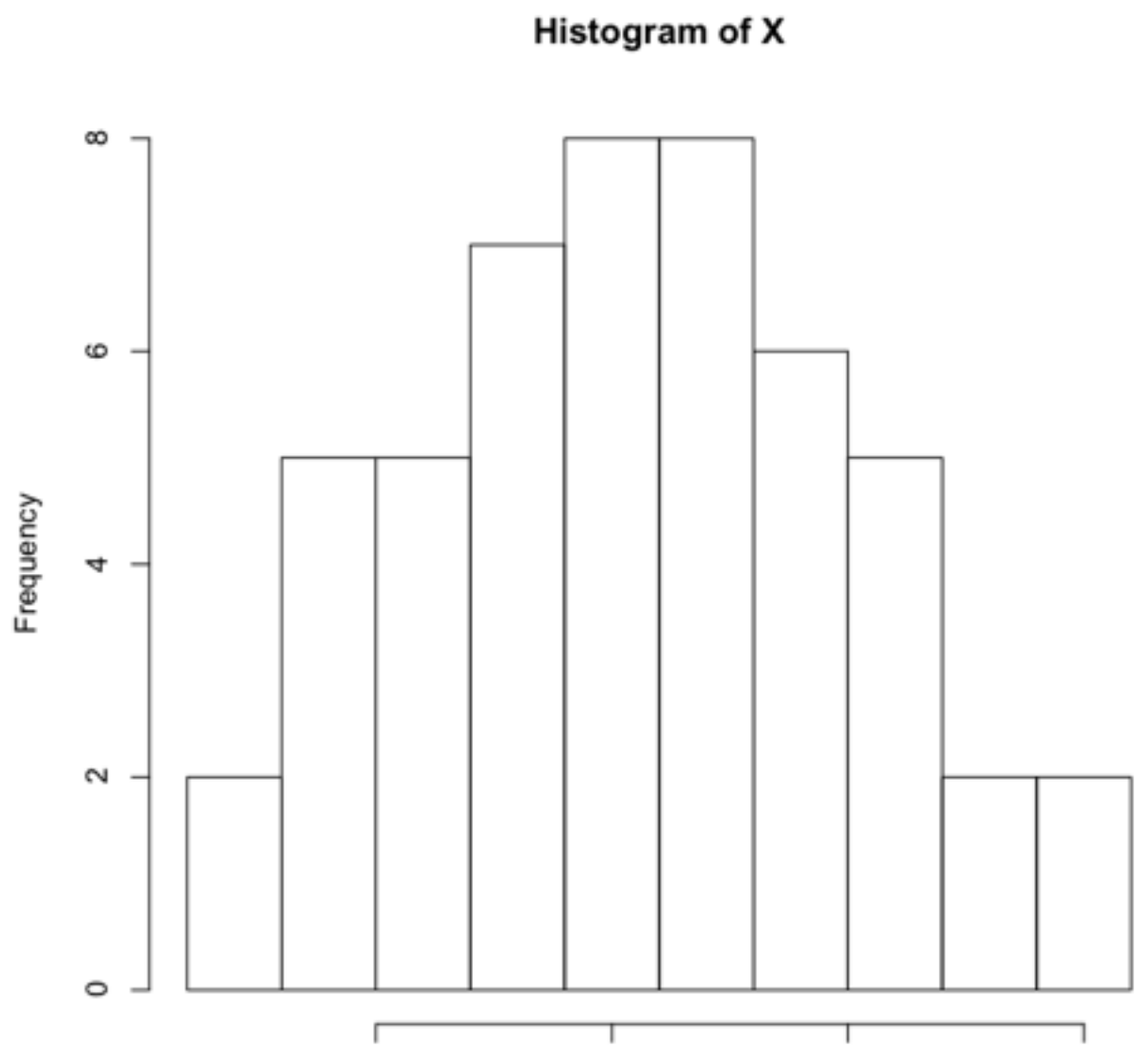
$$H_0 : F(x) = F_{N(24,55;0,21024)}(x)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = 24.54689$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2 = 0,2102477$$

$$s = \sqrt{0,2102477} = 0,4585$$

$$N(24,55; 0,2102)$$

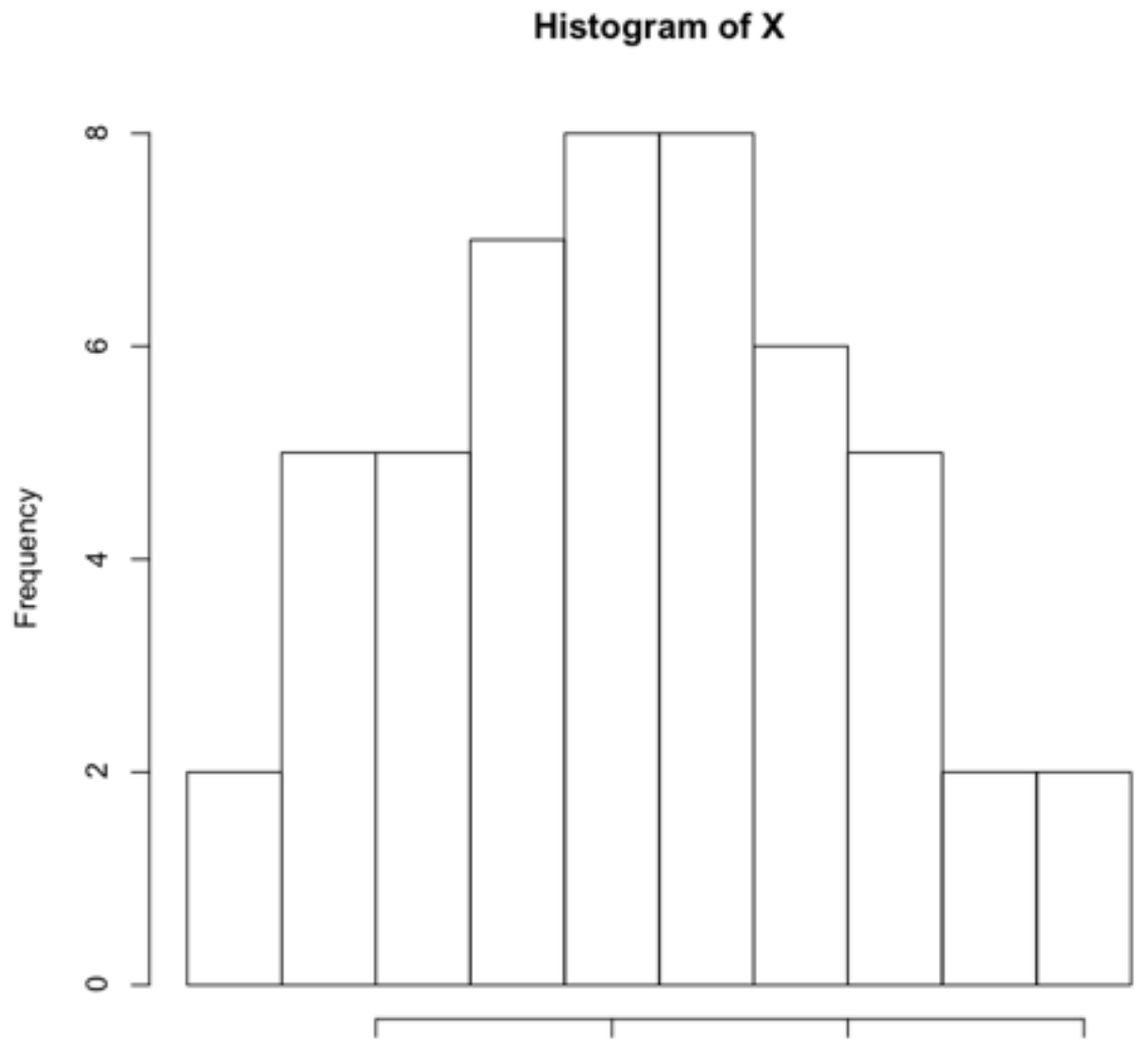


Testy dobré shody

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455	24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721	24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405	23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285	24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777	24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906

$$H_0 : F(x) = F_{N(24,55;0,21024)}(x)$$

	i	ni	pi	npi	(ni-npi)2/npi
23,6	**23,8**	2	0,0634	3,17	0,4323
23,8	**24**	5	0,0743	3,72	0,4433
24	**24,2**	4	0,1187	5,94	0,6312
24,2	**24,4**	8	0,1572	7,86	0,0025
24,4	**24,6**	8	0,1727	8,63	0,0463
24,6	**24,8**	8	0,1572	7,86	0,0025
24,8	**25**	6	0,1187	5,94	0,0007
25	**25,2**	5	0,0743	3,72	0,4433
25,2	**25,4**	2	0,0386	1,93	0,0026
25,4	**26**	2	0,0248	1,24	0,4636
	suma	50	1,0000	50,00	2,4684



Testy dobré shody

24.52586	24.17119	24.54486	24.44240	23.93455	24.20389	24.19974	24.34851	23.94024	24.21022
24.87474	25.06155	25.48924	25.32572	23.71721	24.61622	25.06676	24.90055	24.36213	24.98580
24.80591	24.20853	24.72623	24.64437	24.70405	23.97645	25.29837	24.46910	24.99453	25.42994
24.66147	24.75773	25.03970	24.44901	25.13285	24.40205	24.78721	23.83656	24.17186	23.65390
24.48244	24.68550	24.22988	23.83956	24.09777	24.52098	24.89240	24.25332	24.14259	25.12906

$$H_0 : F(x) = F_{N(24,55;0,21024)}(x)$$

	i	ni	pi	npi	(ni-npi)2/npi
23,6	**24**	7	0,1377	6,89	0,0018
24	**24,2**	4	0,1187	5,94	0,6312
24,2	**24,4**	8	0,1572	7,86	0,0025
24,4	**24,6**	8	0,1727	8,63	0,0463
24,6	**24,8**	8	0,1572	7,86	0,0025
24,8	**25**	6	0,1187	5,94	0,0007
25	**26**	9	0,1377	6,89	0,6482
	suma	50	1,0000	50,00	1,3332

$$\chi^2 = 1,3332 \leq \chi_{0,95}(47) = 32,3$$