

## Lineární závislost, lineární nezávislost vektorů (pracovní text)

Případné náměty k tomuto textu sdělte laskavě F. Mrázovi (e-mail: Frantisek.Mraz@fs.cvut.cz )

**Definice:** Skupinu vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  nazýváme *lineárně závislou*, jestliže existují reálná čísla  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (aspoň jedno je  $\neq 0$ ) tak, že platí  $\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$ . (\*)

Skupinu vektorů, která není lineárně závislá, nazýváme *lineárně nezávislou*. To platí právě tehdy, když vektorová rovnice (\*) má pouze nulové řešení, tj. pro  $\forall i$  je koeficient  $\alpha_i = 0$ .

Věta 1.7. Jestliže skupina vektorů obsahuje nulový vektor, pak je tato skupina lin. závislá.

Věta 1.8. Skupina vektorů je lineárně závislá právě tehdy, když alespoň jeden z vektorů této skupiny lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.

Podle této věty lze postupovat v případě dvoučlenné skupiny vektorů. Ta je lineárně závislá právě tehdy, když jeden z vektorů je násobkem druhého.

**Příklad 1.** Ověřte, že vektory  $\mathbf{u} = (6, -3)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, 1)$  jsou lineárně závislé, zatímco vektory  $\mathbf{a} = (3, 2, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (6, 4, -5)$  jsou lineárně nezávislé.

**Příklad 2.** Určete, pro které hodnoty parametrů  $\alpha, \beta$  jsou lineárně závislé (resp. nezávislé) vektory  $\mathbf{a} = (1, 2, -3)$ ,  $\mathbf{b} = (-2, \alpha + 2, \beta)$ .

Řešení: Vektory jsou závislé, pokud existuje číslo  $k$  tak, že  $\mathbf{b} = k \cdot \mathbf{a}$ , tj.  $(-2, \alpha + 2, \beta) = k \cdot (1, 2, -3)$ . Vynásobíme 2. vektor číslem  $k$ :  $(-2, \alpha + 2, \beta) = (k, 2k, -3k)$ . Rovnost vektorů vyžaduje rovnost odpovídajících souřadnic. Porovnáním prvních souřadnic tedy dostaneme, že  $k = -2$ . Porovnáním 2. souřadnic dostaneme rovnici  $\alpha + 2 = -4$ , odkud vypočteme, že  $\alpha = -6$ . Z rovnosti 3. souřadnic vypočteme  $\beta = 6$ . Provedme kontrolu: Pro hodnoty  $\alpha = -6, \beta = 6$  je vektor  $\mathbf{b} = (-2, -4, 6)$ , což je skutečně násobek vektoru  $\mathbf{a}$ .

Poznámka: Pro přehlednost výpočtu vám možná bude více vyhovovat zápis vektorů ve sloupcovém tvaru.

Máme-li rozhodnout, zda daná skupina vektorů je lin. nezávislá (LN) nebo lin. závislá (LZ), pak lze postupovat takto:

1. možnost: Rozhodneme výpočtem hodnoty matice sestavené z daných vektorů. V některých případech lze rozhodnout i pomocí determinantu. Tuto možnost probereme v dalších kapitolách.
2. možnost: Postupujeme podle definice, tj.
  - a) Sestavíme vektorovou rovnici (\*) pro hledané koeficienty. (Pro přehlednější zápis je vhodné zapisovat vektory ve sloupcovém tvaru).
  - b) Rovnici (\*) rozepíšeme do souřadnic a takto vzniklou soustavu rovnic vyřešíme.
  - c) Závěr: Má-li soustava **pouze nulové řešení**, pak je daná skupina lin. nezávislá. Má-li soustava **i nenulové řešení** (a v tomto případě už jich má nekonečně mnoho), pak je tato skupina lin. závislá.

**Příklad 3.** Zjistěte, zda vektory  $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$ ,  $\mathbf{v} = (2, 0, 0)$ ,  $\mathbf{w} = (3, 1, 0)$  jsou lin. závislé nebo nezávislé.

Řešení: Označíme-li tři hledané (neznámé) koeficienty  $\alpha, \beta, \gamma$ , pak vektorová rovnice (\*) má tvar:

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{o}.$$

Dosadíme zadané vektory, vhodný je zápis ve sloupcovém tvaru:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Na levé straně násobíme postupně vektor číslem:

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ 2\alpha \\ 4\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\gamma \\ \gamma \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tři vektory na levé straně sečteme:

$$\begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 2\alpha + \gamma \\ 4\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rovnost dvou vektorů je splněna při rovnosti odpovídajících souřadnic. Získáme tak soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{aligned} -\alpha + 2\beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \gamma &= 0 \\ 4\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice určíme  $\alpha = 0$ . Dosadíme-li do druhé rovnice, obdržíme  $\gamma = 0$ . Po dosazení do 1. rovnice získáme jediné řešení  $\beta = 0$ . Vektorová rovnice (\*) má pouze nulové řešení, proto je daná skupina vektorů lineárně nezávislá.

**Příklad 4.** Ověřte, že vektory  $\mathbf{u} = (2, 3, -1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$ ,  $\mathbf{w} = (-6, -2, 6)$  jsou lin. závislé.

Řešení: Vektorovou rovnici (\*) lze opět zapsat ve tvaru

$$\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{o}.$$

Dosadíme zadané vektory a provedeme operace na levé straně: nejprve násobení vektorů čísly a pak sčítání tří vektorů. Obdržíme tak rovnost dvou vektorů:

$$\begin{pmatrix} 2\alpha - 1\beta - 6\gamma \\ 3\alpha + 2\beta - 2\gamma \\ -\alpha + 2\beta + 6\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Z rovnosti vektorů získáme soustavu tří lineárních rovnic pro tři neznámé  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - 6\gamma &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta - 2\gamma &= 0 \\ -\alpha + 2\beta + 6\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení (ověřte si), proto je zadaná skupina vektorů lin. závislá. **Poznámka:** Pro řešení této soustavy je vhodné použít matic. Pomocí matic však lze úlohu o závislosti, resp. nezávislosti rozhodnout ještě rychleji bez řešení soustavy rovnic. Protože sestavená matice by v tomto případě byla čtvercová, je možné rozhodnout i pomocí determinantů. Tyto postupy poznáme později.

**Poznámka:** Všimněme si v tomto příkladu, že libovolné dva z daných tří vektorů jsou LN, přesto je skupina tří vektorů lin. závislá. Jaká je vzájemná poloha těchto tří vektorů ?

Literatura:

- [1] J. Neustupa: **Matematika I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.
- [2] S.Kračmar, F. Mráz, J.Neustupa: **Sbírka příkladů z Matematiky I.** Skriptum Strojní fakulty. Vydavatelství ČVUT, Praha 2013.